بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده ریاضی و رایانه

بخش ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض گرایش آنالیز

آنالیز چند ریزه ساز کوینکوکس برای $L^{2}(\mathbb{Q}_{2}^{2})$

استاد راهنما:

دکتر عطاءالله عسکری همت

استاد مشاور:

دکتر حسین مؤمنایی

مولف:

زینب عسکری جواران

شهریور ماه ۱۳۹۰

این پایان نامه

به عنوان یکی از شرایط احراز کارشناسی ارشد

به

بخش ریاضی – دانشکده ریاضی و رایانه

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچگونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی شود.

دانشجو: زینب عسکری جواران

استاد راهنما: دکتر عطاءالله عسکری همت

استاد مشاور: دکتر حسین مؤمنایی

داور ۱: دکتر اکبر نظری

داور ۲: دکتر زهره رهبانی

نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه: دکتر سید ناصر حسینی

تقدیم به:

ساحت مقدس آقا امام زمان

که آمدنش بزرگترین آرزوها و آرامش دهنده دل های خسته و روان های پریشان است.

تقدیم به:

اولین معلمان زندگیم، پدر بزرگوار و مادر عزیزم

که شمع وجودشان روشنایی بخش تمام مراحل زندگیم می باشد.

تقدیم به:

همسر صبور و مهربانم

که شادابی بوستان زندگیم و بهار باغ روزگارم می باشد.

تقدیر و تشکر

سپاس خداوندی را که سخنوران از ستودن او عاجزند، حسابگران از شمارش نعمت های او ناتوان و تلاشگران از ادای حق او درمانده اند. خدایی که افکار ژرف اندیش، ذات او را درک نمی کنند و دست غواصان دریای علوم به او نخواهد رسید. پروردگاری که برای صفات او حدی وجود ندارد.

خداوند سبحان را شاکرم که به بنده حقیر توفیق داد که از محضر استادان گرانقدر بهره برده و در راه کسب علم و دانش گامی بردارم. به امید آن روزی که بتوانم آموخته های خود را در جهتی سازنده برای میهن عزیز اسلامی استفاده نمایم.

از استاد راهنمایم، استاد بزرگوار جناب آقای دکتر عطاءالله عسکری همت که در این رساله توجه فراوانی به کارم نشان دادند و در طول راه مشوق اصلی من بودند و با راهنمایی هایشان همواره افق دیدم را وسیع تر و گسترده تر کردند، نهایت تشکر و قدردانی را می نمایم. از خداوند متعال توفیق روز افزون و سربلندی را برای ایشان که به تاریکی وجودم روشنایی علم را هدیه دادند، خواستارم.

از استاد گرامی آقای دکتر حسین مؤمنایی که مشاوره این پایان نامه را برعهده داشتند، کمال تشکر را دارم. راهنمایی های ایشان راهگشایم بود.

از اساتید گرامی آقای دکتر اکبر نظری و خانم دکتر زهره رهبانی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند و با لطف فراوان، ره آورد تلاشم را با بزرگواری مطالعه و مورد عنایت قرار داده اند کمال تشکر را دارم.

از استاد گرامی خانم طیبه عسکری جواران به خاطر زحمات بی دریغشان و از تمام اساتیدی که در طول تحصیل مشوقین من بوده اند، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از خانواده عزیزم که در مراحل مختلف زندگی و تحصیل، پشتیبان و مشوق من بوده اند و پیمودن

این راه بدون وجود مهربانشان بر من مشکل می نمود سپاسگزاری می نمایم. به خصوص از همسر مهربانم که زحمات بی پایانی را در این مدت متقبل شده اند، کمال سپاس را دارم.

از تمامی دوستان عزیزم که در اینجا اسمی از آن ها به میان نیامد بی نهایت سپاسگزارم.

هر پاسخی که زندگی به تلاش هایمان بدهد یا ندهد، هنگامی که به پایان تلاش هایمان نزدیک می شویم هر کداممان باید حق آن را داشته باشیم که با صدای بلند بگوییم:

«من آنچه در توان داشته ام انجام داده ام.»

در پایان از قطب جبر خطی و بهینه سازی دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان به واسطه حمایت مالی تشکر می کنم.

زینب عسکری جواران

شهریور ماه ۱۳۹۰

چکیده

اعداد حقیقی و p ای هر دو از اعداد گویا توسط روشی به نام کامل سازی بدست آمده اند که کامل سازی می تواند برای هر فضای متریک با استفاده از فاصله های مختلف روی اعداد گویا بکار برده شود: فاصله اقلیدسی معمولی برای اعداد حقیقی و یک فاصله p ای جدید به ازای عدد اول p، برای اعداد p ای. فاصله p ای در *"نامساوی مثلثی قوی"* صدق می کند که سبب خواص شگفت انگیزی از اعداد p ای می شود و منجر به تفاوت های جالبی از آنالیز حقیقی کلاسیک می شود. از سوی دیگر تشابه ها وقتی ناشی می شوند که حقیقت وابسته به *"نامساوی مثلثی قوی"* نیست و در این حالت ها اثبات یکسانی در حالت های حقیقی و p ای بکار می رود. هدف اصلی فصل دوم معرفی میدان اعداد p ای، $\mathbb{Q}_p$، تعریف شده برای هر عدد اول p است.

در فصل سوم با معرفی آنالیز چند ریزه ساز (MRA) کوینکوکس روی $L^{2}(\mathbb{Q}_2^2)$، موجک متناظر با آن را می سازیم.

کلمات کلیدی: اعداد p ای، کامل سازی، فاصله p ای، نامساوی مثلثی قوی، آنالیز چند ریزه ساز، موجک.

مقدمه

تاریخچه: ایده نمایش یک تابع برحسب مجموعه کاملی از توابع اولین بار توسط ژوزف فوریه[۱]، ریاضیدان و فیزیکدان، بین سال های ۱۸۰۶ – ۱۸۰۲ طی رساله ای در آکادمی علوم راجع به انتشار حرارت، برای نمایش توابع به کار گرفته شد. در واقع فوریه به طور اساسی ثابت کرد برای آنکه یک تابع $f(x)$ به شیوه ای ساده و فشرده نمایش داده شود می توان از مجموع هایی استفاده کرد که به کمک خانواده ای نامتناهی از توابع سینوس وار ساخته می شوند. به عبارت دیگر فوریه نشان داد که یک تابع $f(x)$ را می توان به صورت حاصل جمع بی نهایت تابع سینوسی و کسینوسی به شکل $sin(ax)$ و $cos(ax)$ نمایش داد.

پایه های فوریه به صورت ابزارهای اساسی، با کاربردهای بسیار زیاد در علوم در آمده اند زیرا برای نمایش انواع متعددی از توابع و در نتیجه کمیت های فیزیکی کاربرد فراوانی دارند. با گذشت زمان ضعف پایه های فوریه نمایان شد. برای مثال دانشمندان پی بردند پایه های فوریه و نمایش توابع سینوس وار در مورد سیگنال های پیچیده نظیر تصاویر نه تنها ایده آل نیستند بلکه از شرایط مطلوب دورند، به عنوان مثال به شکل کارآمدی قادر به نمایش ساختارهای گذرا نظیر مرزهای موجود در تصاویر نیستند. همچنین آنها متوجه شدند تبدیل فوریه تنها برای توابع پایه مورد استفاده قرار می گیرد و برای توابع غیر پایه کارآمد نیست. (البته در سال ۱۹۴۶ با استفاده از توابع پنجره ای، که منجر به تبدیل فوریه ی پنجره ای شد این مشکل تا حدودی حل شد.)

در سال ۱۹۰۹ هار [۲] اولین کسی بود که به موجک ها اشاره کرد. در سال ۱۹۳۰ ریاضیدانان به فکر اصلاح پایه های فوریه افتادند و پس از آن در سال ۱۹۷۰ یک ژئوفیزیکدان فرانسوی به نام ژان مورله [۳] متوجه شد که پایه های فوریه بهترین ابزار ممکن در اکتشافات زیر زمین نیستند، این موضوع در

[۱] Joseph Fourier
[۲] Haar
[۳] Jean Morlet

آزمایشگاهی متعلق به الف آکیلن [۴] منجر به یکی از اکتشافات تبدیل موجکی گردید.

در سال ۱۹۷۶ میر[5] و مالات [۶] با الهام از خواص پایه های موجکی متعامد توانستند آنالیز چند ریزه ساز را بسازند و مالات تجزیه موجک ها و الگوریتم های بازسازی را با به کار بردن آنالیز چند ریزه ساز به دست آورد.

در سال ۱۹۸۰ ایومیر [۷] ریاضیدان فرانسوی، نخستین پایه های موجکی متعامد را کشف کرد (تعامد نوعی از ویژگی ها را بیان می کند که موجب تسهیلات فراوانی در استدلال و محاسبه می شود، پایه های فوریه نیز متعامدند.) در همین سال ها مورله مفهوم موجک و تبدیل موجک را به عنوان یک ابزار برای آنالیز سیگنال زمین لزره به کار برد و گراسمن [۸] فیزیکدان نظری فرانسوی نیز فرمول وارون را برای تبدیل موجک به دست آورد.

در سال ۱۹۹۰ مورنزی [۹] همراه با آنتوان موجک ها را به دو بعد و سپس به فضاهای با ابعاد دیگر گسترش دادند و به این ترتیب بود که آنالیز موجکی پایه گذاری گردید.

آشنایی با آنالیز موجک ها: یکی از دستاوردهای نسبتاً جدید و هیجان انگیز ریاضیات محض می باشد که مبتنی بر چندین دهه پژوهش در آنالیز هارمونیک است و امروزه در بسیاری از رشته های علوم و مهندسی کاربردهای مهمی یافته و امکانات جدیدی برای درک جنبه های ریاضی آن و نیز افزایش کاربردهایش فراهم شده است.

در آنالیز موجک هم مانند آنالیز فوریه با بسط توابع سروکار داریم ولی این بسط برحسب پایه های موجکی انجام می شود.

موجک تابع مشخص مفروضی با میانگین صفر است و بسط برحسب انتقال ها و اتساع های این

[۴] Elf Aquitaine
[5] Meyer
[۶] Mallat
[۷] Yves Meyer
[۸] Grossman
[۹] Murenzi

تابع انجام می گیرد. بر خلاف چند جمله ای های مثلثاتی، موجک ها در فضا به صورت موضعی بررسی می شوند و به این ترتیب ارتباط نزدیکتری بین بعضی توابع و ضرایب آن ها امکان پذیر می شود و پایداری عددی بیشتری در بازسازی و محاسبات فراهم می گردد. هر کاربردی را که مبتنی بر تبدیل سریع فوریه است می توان با استفاده از موجک ها فرمول بندی کرد و اطلاعات بیشتری بدست آورد. به طور کلی، این موضوع بر پردازش سیگنال و تصویر و الگوریتم های عددی سریع برای محاسبه عملگرهای انتگرالی اثر می گذارد.

آنالیز موجک که پیشرفت تازه ای در ریاضی کاربردی است و در ده سال اخیر گرایش به آن به طور قابل ملاحظه ای زیاد شده است، حاصل ۵۰ سال کار ریاضی (نظریه لیتلوود [۱۰] — پیلی[۱۱] و کالدرون[۱۲] — زیگموند[۱۳]) است. در واقع آن ها مشکلاتی در پاسخ دادن به ساده ترین پرسش های مربوط به تبدیل فوریه داشتند و توانستند جانشین انعطاف پذیر ساده تری از طریق آنالیز هارمونیک ارائه دهند. مستقل از این نظریه که درون ریاضیات محض جای دارد، صورت های مختلفی از این رهیافت چند مقیاسی ($multi\ scale$) را طی دهه گذشته در پردازش تصویر، آکوستیک، کدگذاری (به شکل فیلترهای آیینه ای متعامد و الگوریتم های هرمی) و استخراج نفت دیده ایم.

آنالیز موجک همراه با تبدیل سریع فوریه در تحلیل سیگنال های گذرایی که سریعاً تغییر می کنند، صدا و سیگنال های صوتی، جریان های الکتریکی در مغز، صداهای زیر آبی ضربه ای و در کنترل نیروگاه های برق از طریق صفحه نمایش کامپیوتر به کار رفته است. و نیز به عنوان ابزاری علمی، برای روشن ساختن ساختارهای پیچیده ای که در تلاطم ظاهر می شوند، جریان های جوی، و در بررسی ساختارهای ستاره ای از آن استفاده شده است. این آنالیز به عنوان یک ابزار عددی می تواند مانند تبدیل سریع فوریه تا حد زیادی از پیچیدگی محاسبات بزرگ مقیاس بکاهد، بدین ترتیب که با

[۱۰] Littlewood
[۱۱] Paley
[۱۲] Calderón
[۱۳] Zygmund

تغییر هموار ضریب، ماتریس های متراکم را به شکلی که به سرعت قابل محاسبه باشد در آورد.
راحتی و سادگی این آنالیز باعث ساختن تراشه هایی شده است که قادر به کدگذاری به نحوی بسیار کارا، و فشرده سازی سیگنال ها و تصاویرند. آنالیز موجک امروزه کاربردهای فراوانی پیدا کرده است که از آن جمله می توان به کاربرد آن در تصویر برداری پزشکی (MRI) و سی تی اسکن، جداسازی بافت های مغزی از تصاویر تشدید مغناطیس، تحلیل تصاویر طیفی تشدید مغناطیسی و عملکردهای تشدید مغناطیسی اشاره نمود.

اعداد p ای نخست در سال ۱۸۹۷ توسط هنسل[۱۴] معرفی شدند. هنسل با استفاده از آن ها روش های سری توانی را به نظریه اعداد آورد. اکنون آنالیز اعداد p ای به خودی خود یک موضوع است.

این پایان نامه شامل سه فصل است که در آن سعی بر یافتن یک موجک روی $L^۲(\mathbb{Q}_۲^۲)$، نموده ایم. بدین منظور، در فصل اول پیش نیازهای موجکی را که در فصل های دیگر کاربرد دارند، بیان کرده ایم. سپس به بیان تعاریف و قضایایی از آنالیز هارمونیک که در فصل سوم مورد استفاده قرار می گیرند پرداخته ایم. فصل دوم شامل نه بخش است که در بخش اول روش کامل سازی را در حالت آشناتر اعداد حقیقی یادآوری می کنیم (از $\mathbb{Q}$ به $\mathbb{R}$). در بخش دوم به معرفی میدان های نرمدار می پردازیم و سپس در بخش سوم، کامل سازی را به میدان های نرمدار دلخواه تعمیم می دهیم. در بخش چهارم نرم p ای را روی میدان اعداد گویا معرفی و متناظر با آن میدان اعداد p ای $\mathbb{Q}_p$ را برای هر عدد اول p تعریف کرده ایم. باقیمانده فصل (به جز بخش آخر) به خواص ساختاری و جبری اعداد p ای اختصاص داده شده است. در بخش آخر این فصل $|.|_g$ را که g عددی غیر اول است، تعریف کرده و کامل سازی نسبت به آن را $\mathbb{Q}_g$ نامیده ایم. در فصل سوم ابتدا مقدمات و نمادهای مورد نیاز برای تولید MRA روی $L^۲(\mathbb{Q}_۲^۲)$، را آورده ایم. در نهایت در بخش چهارم و پنجم با معرفی یک MRA (کوینکوکس) روی $L^۲(\mathbb{Q}_۲^۲)$، موجک متناظر با آن را ساخته ایم.

[۱۴] Hensel

فهرست مطالب

فصل ۱

پیش نیازها

در این پایان نامه مقدماتی مورد نیاز است که آن ها را در این فصل به طور گذرا بیان کرده و از اثبات قضایا صرف نظر می کنیم و آن ها را ارجاع می دهیم. در این فصل ابتدا نمادها، مفاهیم و قضایای مقدماتی لازم برای بیان دو فصل دیگر را آورده ایم و در نهایت به قضایای هارمونیکی مورد نیاز برای فصل سوم پرداخته ایم.

فرض کنید $\mathbb{Z}$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ به ترتیب مجموعه های اعداد صحیح، اعداد حقیقی و اعداد مختلط باشند.

فرض کنید $L^{2}(\mathbb{R})$ **فضای توابع مربع انتگرال پذیر** با ضرب داخلی

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \tag{1.1}$$

و نرم

$$||f||_{2} = \langle f, f\rangle = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2}dx \tag{2.1}$$

باشد.

دو تابع f و g (از $L^{2}(\mathbb{R})$) را **متعامد** می نامیم و می نویسیم $f \perp g$، هرگاه $\langle f, g\rangle = 0$. دنباله $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از توابع را **متعامد یکه** نامیم اگر $\langle f_m, f_n\rangle = \delta_{m,n}$ که

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1 & m = n \text{ اگر} \\ 0 & m \neq n \text{ اگر} \end{cases}$$

محمل تابع f را که آن را با $\operatorname{supp} f$ نشان می دهیم برابر است با $\overline{\{x \ : \ f(x) \neq 0\}}$.

برای $p \geq 1$، فرض کنیم $L^{p}(\mathbb{R})$ فضای همه توابع اندازه پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد که

$$||f||_{p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{p}dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

$||f||_p$ را نرم L^pی f می نامیم.

تبدیل فوریه تابع $f \in L^1(\mathbb{R})$ را با $\mathcal{F}(f)$ یا $\widehat{f}$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\omega x} dx, \qquad \omega \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

چون اندازه لبگ $\mathbb{R}$ نامتناهی است، $L^2(\mathbb{R})$ زیرمجموعه $L^1(\mathbb{R})$ نیست. از این رو تعریف تبدیل فوریه به وسیله (۳.۱) را به طور مستقیم برای هر $f \in L^2(\mathbb{R})$ نمی توان به کار برد. اما اگر $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ می توان آن را به کار برد و معلوم می شود که $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. در حقیقت $||f||_2 = ||\widehat{f}||_2$. این یکریختی از $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ به روی $L^2(\mathbb{R})$ به یک یکریختی از $L^2(\mathbb{R})$ به روی $L^2(\mathbb{R})$ توسیع می یابد. این توسیع بیان کننده تبدیل فوریه هر تابع $f \in L^2(\mathbb{R})$ است.

قضیه ۱.۰.۱. (**پلانشرل**[1]) *تبدیل فوریه را می توان به طور یکتا به یک عملگر*

$$\tilde{\mathcal{F}}(f) \ : \ L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$$

تعمیم داد. به طور دقیق تر برای $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\lim_{N\to\infty} ||\tilde{\mathcal{F}} f - f\chi_{[-N,N]}||_2 = 0$$

یا $\widehat{f} = \lim_{N\to\infty} f\widehat{\chi}_{[-N,N]}$ *که حدگیری نسبت به نرم* L^2 *است.*

در قضیه فوق χ_A تابع مشخصه روی مجموعه A است که چنین تعریف می شود:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \in A \\ 0 & \text{اگر } x \notin A \end{cases}$$

[1] Plancherel

یک نتیجه قضیه فوق این است که برای هر $f \in L^{2}(\mathbb{R})$، $||f||_{2} = ||\widehat{f}||_{2}$ و همچنین نگاشت $\widehat{f} \longmapsto f$ یکریختی ای از $L^{2}(\mathbb{R})$ به روی $L^{2}(\mathbb{R})$ است.

اگر A یک ماتریس (a_{ij})، $1 \leq i, j \leq n$ باشد ماتریس الحاقی A که همان ترانهاده مزدوج A است را با A^* نشان می دهیم. به عبارت دیگر $A^* = \overline{(a_{ji})}$. همچنین ماتریس همانی را با I نشان می دهیم.

قضیه ۲.۰.۱. [۱۵] *اگر $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ یک نگاشت خطی وارون پذیر باشد آنگاه*

$$\mathcal{F}(foA)(\xi) = |\det A|^{-1} \widehat{f}((A^{-1})^* \xi).$$

قضیه ۳.۰.۱. [۱۵] *اگر $A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ یک نگاشت خطی وارون پذیر و $a \in \mathbb{R} \neq 0$ باشد آنگاه*

$$\mathcal{F}(f(Ax+b))(\xi) = |\det A|^{-1} e^{i\langle \xi, A^{-1} b\rangle} \widehat{f}((A^{-1})^* \xi).$$

تعریف ۴.۰.۱. *فرض کنید $G \subset \mathbb{R}^d$ یک زیرگروه جمعی باشد. تابع $f(x)$ تعریف شده روی $\mathbb{R}^d$ را G - متناوب گوییم اگر برای هر $a \in G$ و تقریباً برای هر $x \in \mathbb{R}^d$، $f(x+a) = f(x)$.*

تعریف ۵.۰.۱. *یک **موجک** (یا موجک مادر) تابعی مانند $\psi \in L^{2}(\mathbb{R})$ است به طوری که،*

$$\{\sqrt{2^m}\psi(2^m \cdot -n) \ : \ m, n \in \mathbb{Z}\} \tag{۴.۱}$$

یک پایه متعامد یکه برای $L^{2}(\mathbb{R})$ است.

همان طور که در تعریف بالا مشاهده می کنید متناظر با هر موجک یک دستگاه متعامد یکه $\{\sqrt{2^m}\psi(2^m \cdot -n) \ : \ m, n \in \mathbb{Z}\}$ وجود دارد که پایه موجکی نامیده می شود. ضریب $\sqrt{2^m}$ در (۴.۱) به این دلیل است که L^2-نرم توابع $\psi_{m,n} := \sqrt{2^m}\psi(2^m \cdot -n)$ برای هر m و n مساوی باشد. به این صورت که برای هر m و n بدست می آوریم $||\psi_{m,n}||_{2} = ||\psi||_{2}$. زیرا

$$||\psi_{m,n}||_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |\sqrt{2^m}\psi(2^m x - n)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = ||\psi||_2^2.$$

بهترین موجک ها آن هایی هستند که با شروع از یک آنالیز چند ریزه ساز ساخته می شوند. اکنون این مفهوم را تعریف می کنیم.

تعریف ۶.۰.۱. *یک آنالیز چند ریزه ساز (MRA) دنباله $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ از زیر فضاهای $L^2(\mathbb{R})$ با ویژگی های زیر است.*

$MRA1$. *برای هر* $j \in \mathbb{Z}$، $V_j \subset V_{j+1}$،

$MRA2$. $\overline{\bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ ،

$MRA3$. $\bigcap_{j\in\mathbb{Z}} V_j = \{0\}$،

$MRA4$. $f(\cdot) \in V_j$ *اگر و تنها اگر به ازای هر* $j \in \mathbb{Z}$، $f(2\cdot) \in V_{j+1}$ ،

$MRA5$. $f(\cdot) \in V_0$ *اگر و تنها اگر به ازای هر* $k \in \mathbb{Z}$، $f(\cdot - k) \in V_0$ ،

$MRA6$. *تابع* $\varphi \in V_0$ ***وجود دارد به طوری که خانواده*** $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ ***یک پایه متعامد یکه برای*** V_0 *است.*

برای هر $j \in \mathbb{Z}$ فضای V_j **فضای تقریب** و تابع φ **تابع مقیاس** (موجک پدر) نامیده می شود. در برخی کتاب ها به آنالیز چند ریزه ساز، تقریب چند ریزه ساز و به تابع مقیاس، تابع تقریب نیز می گویند. متناظر با هر خانواده از فضاهای تقریب V_j انتخاب های متفاوت برای تابع مقیاس وجود دارد. هر تابع مقیاس ممکن است آنالیز چند ریزه ساز متفاوتی به وجود آورد. هر چند لازم است انتقال های $\varphi(x)$ متعامد یکه باشند ولی ممکن است چنین نباشد. آنچه مهم است این که φ باید طوری باشد که $\{\varphi_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ یک پایه برای V_0 باشد. که در این صورت به کمک این φ، تابع مقیاس جدید $\tilde{\varphi}$ را بدست می آوریم طوری که $\{\tilde{\varphi}_{0,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ خانواده ای متعامد یکه است. اکنون دو مفهوم اساسی انتقال و اتساع را تعریف می کنیم.

تعریف ۷.۰.۱. *اگر a و $b > 0$ اعداد حقیقی باشند عملگرهای **انتقال** و **اتساع** را که به ترتیب با T_a و D_b نمایش داده می شوند روی $L^2(\mathbb{R})$ چنین تعریف می کنیم:*

$$T_a \;:\; L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),\ (T_a f)(x) = f(x-a),$$
$$D_b \;:\; L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}),\ (D_b f)(x) = \sqrt{b} f(bx).$$

تعریف ۸.۰.۱. *یک عملگر $U : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ **یکانی** است اگر یک به یک و پوشا باشد و برای هر $f, g \in L^2(\mathbb{R})$، $\langle Uf, Ug\rangle = \langle f, g\rangle$.*

به سادگی می توان ثابت کرد که عملگرهای T_a و D_b یکانی هستند. همچنین مشاهده می کنید که نماد $\psi_{m,n}$ معرفی شده بعد از تعریف (۵.۰.۱) شامل عملگرهای نرمال سازی، انتقال و اتساع است.

نکته: ۱. بنابر تعریف آنالیز چند ریزه ساز از ویژگی های $MRA1$، $MRA2$ و $MRA3$ نتیجه می شود که هر تابع در $L^2(\mathbb{R})$ توسط اعضای زیرفضاهای V_j تقریب زده می شود و دقت این تقریب با افزایش j بیشتر می شود. یعنی برای هر $f \in L^2(\mathbb{R})$ دنباله $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ وجود دارد طوری که $f_n \in \bigcup_{j\in\mathbb{Z}} V_j$ برای هر n و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ در $L^2(\mathbb{R})$ به f همگراست به عبارت دیگر هرگاه n به سمت بی نهایت میل کند $||f_n - f||_2$ به سمت صفر میل می کند. ویژگی های $MRA4$ و $MRA5$ نشان می دهند که زیرفضاهای V_j تحت انتقال و اتساع پایا هستند. به کمک نمادهای تعریف (۷.۰.۱) ویژگی های $MRA4$، $MRA5$ و $MRA6$ را به صورت زیر می توان تغییر داد.

$MRA4'$. برای هر $j \in \mathbb{Z}$، $f \in V_0$ اگر و تنها اگر $D_2^j(f) \in V_j$.

$MRA5'$. برای هر $k \in \mathbb{Z}$، $V_0 = T_k(V_0)$.

$MRA6'$. برای هر $j \in \mathbb{Z}$ خانواده $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ پایه ای متعامد یکه برای V_j است.

۲. ویژگی های $MRA1 - MRA6$ در تعریف یک آنالیز چند ریزه ساز مستقل نیستند. برای مثال $MRA5$ از $MRA6$ به دست می آید و $MRA3$ از بقیه نتیجه می شود.

۳. از $MRA1$، $MRA4$ و $MRA6$ نتیجه می شود که تابع مقیاس φ در معادله تظریف (رابطه دو مقیاسی) زیر صدق می کند.

$$\varphi(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \varphi(2x-n),\ \{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z}) \qquad (5.1)$$

دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را **نقاب** یا **صافی پایین گذر** و تابع $m_\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{-in\xi}$ را **تابع نقاب** یا **فیلتر** می نامند.

۴. یک آنالیز چند ریزه ساز را به دو روش می توان به دست آورد.

الف. با تابع φ شروع می کنیم. V_0 را به عنوان $span\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ تعریف می کنیم و بقیه زیرفضاهای V_j از $MRA4$ یا $MRA4'$ به دست می آیند. $MRA5$ خود به خود برقرار است و ویژگی های دیگر را بررسی می کنیم.

همچنین به طور معادل با توجه به یک به یک بودن تبدیل فوریه، تابع $\widehat{\varphi}$ مناسبی را پیدا می کنیم طوری که تبدیل فوریه ی ویژگی های $MRA1 - MRA6$ برقرار باشد. آنگاه آنالیز چند ریزه ساز را تشکیل می دهیم.

ب. یک دنباله $\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ انتخاب می کنیم و معادله (۵.۱) را حل می کنیم و جواب φ را می یابیم. (ر.ک. [۱۹])

۵. ممکن است به نظر رسد اجتماع خانواده های $\{\varphi_{j,k}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ یک پایه متعامد یکه برای $L^2(\mathbb{R})$ تولید می کند. اما این درست نمی باشد، زیرا توابع $\varphi_{j,k}$ در ترازهای مختلف j متعامد نیستند. برای مثال چون $\varphi \in V_0 \subseteq V_1$، برای یک دنباله ضرایب $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$ داریم