[chapter]
[chapter] [chapter] [chapter] [chapter] [chapter] [chapter]

--→

دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان

پایان‌نامه
جهت اخذ مدرک کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

عدد پوچساز در گراف‌ها

استاد راهنما
دکتر سید محمود شیخ‌الاسلامی

استاد مشاور
دکتر بهروز خیرفام

پژوهشگر
مهدیه جباریلر خسروشاهی

شهریور ۱۳۹۲
تبریز- ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدر و مادر بزرگوار

و همسر عزیزم

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که سخنوران در ستودن او بمانند و شمارندگان شمردن نعمت‌های او ندانند و کوشندگان حق او را گزاردن نتوانند. خداوندی که به من آموخت در لحظه‌های شادی شکرگزار باشم و فراموش نکنم تمام داشته‌ها و دانسته‌هایم از لطف بی‌منت اوست.

اینک به پاس لطف الهی که این پایان‌نامه آماده شده است بر خود واجب می‌دانم از حمایت‌های بی‌دریغ، بذل توجه و مساعدت‌های استاد راهنمای بزرگوارم جناب آقای دکتر سید محمود شیخ الاسلامی سپاسگزاری نمایم.

از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر بهروز خیرفام که مشاوره و مطالعه این پایان‌نامه را برعهده گرفتند کمال تشکر را دارم.

و بوسه می‌زنم بر دستان پدر و مادر عزیزم که توانستم زیر سایه مهربانی و حمایت‌هایشان در راه علم و دانش قدم بردارم.

همچنین از همسر عزیزم که در سایه صبوری‌ها و تشویق های ایشان توانستم ادامه تحصیل دهم سپاسگزارم.

چکیده

فرض کنید $G=(V,E)$ گرافی با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است، هرگاه هر عضو $V-D$ با رأسی از D، مجاور باشد.می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر را عدد احاطه‌ای G گویند و بانماد $\gamma(T)$ نمایش می‌دهند. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر تام است، هرگاه هر عضو $V(G)$ با رأسی از D، مجاور باشد.می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام را عدد احاطه‌ای تام G گویند و با نماد $\gamma_t(T)$نشان می‌دهند. مجموعه D از رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر مضاعف است، هرگاه D هر عضو $V(G)$ را، حداقل دوبار احاطه کند.می‌نیمم اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مضاعف را عدد احاطه‌ای مضاعف G گویند وبانماد $\gamma_{\times 2}(T)$ نشان می‌دهند. عدد پوچساز $a(G)$، بزرگترین عدد صحیح k است به‌طوری‌که مجموع k جمله اول دنباله درجات غیرکاهشی G، حداکثر برابر تعداد یال‌های G باشد.

در این پایان‌نامه، ابتدا یک کران بالا برای عدد احاطه‌ای (تام ، مضاعف) برحسب عدد پوچساز ارائه کرده و نشان می‌دهیم برای هر درخت از مرتبه $n \geq 2$ ، $\gamma_t(T) \leq a(T)+1$ و برای هر درخت از مرتبه $n \geq 2$، غیر از P_4، داریم، $\gamma_{\times 2}(T) \leq \frac{3a(T)+1}{2}$،و سپس درخت‌هایی که این کران‌ها برایشان قابل وصول است را، دسته بندی می‌کنیم.

کلمات کلیدی: عدد احاطه‌ای، عدد احاطه‌ای تام، عدد احاطه‌ای مضاعف، عدد پوچساز.

پیشگفتار

در سال‌های اخیر، همزمان با رشد علوم کامپیوتر، الکترونیک و سایر علوم، نظریه گراف نیز رشد چشمگیری داشته است. مفهوم احاطه‌گری به دلیل کاربردهای فراوان آن در زمینه‌های مختلف همچون علوم کامپیوتر و شبکه‌های الکترونیکی از اهمیت خاصی برخورداراست. عدد پوچساز گراف نخستین بار در سال ۲۰۰۴ توسط پپر [۱] در [۱۳] معرفی گردید و بعد از او چندین نفر در این زمینه مطالعاتی داشته‌اند. در [۱۳] و [۱۴]، پپر ثابت کرد که عدد پوچساز، یک کران بالا برای عدد استقلال گراف است و در [۱۲] لارسن [۲] و پپر حالت تساوی این کران بالا را دسته‌بندی کردند که در فصل دوم این پایان‌نامه آورده شده است.

مفهوم عدد احاطه‌ای تام نخستین بار در سال ۱۹۸۰ توسط کوکاین و همکارانش [۳] در [۶] معرفی گردید. در فصل سوم، برای عدد احاطه‌ای تام، کران بالایی برحسب عدد پوچسازش که توسط دسورماکس [۴] در [۱۶] به دست آمده است، ارائه می‌کنیم.

هراری [۵] و هاینس [۶] در [۹] عدد احاطه‌ای مضاعف را معرفی کردند و امجدی و شیخ الاسلامی در [۱] کران بالایی برای آن ارائه کردند که در فصل چهارم آورده شده است.

---
[۱] Pepper
[۲] Larson
[۳] Cockayn
[۴] Desormeaux
[۵] Harary
[۶] Haynes

فهرست مطالب

لیست تصاویر

فصل ۱

تعاریف

۱.۱ مفاهیم مقدماتی

در این بخش برخی تعاریف مقدماتی نظریه گراف را که در فصل‌های بعد مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنیم. فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف با مجموعه رئوس V و مجموعه یال‌های E باشد.

تعریف ۱.۱.۱. *دو رأس u و v **مجاورند** هرگاه $e = uv$ یالی از G باشد. هرگاه دوسر یک یال برهم منطبق باشند آن را **طوقه** و دو یال متمایز با رئوس ابتدا و انتهای یکسان را **یال‌های موازی** گویند. **گراف ساده** گرافی است که یال موازی و طوقه نداشته باشد.*

تعریف ۲.۱.۱. ***گراف کامل** K_n گرافی ساده از مرتبه n است که در آن هر دو رأس دلخواه باهم مجاورند. گراف فاقد یال را **گراف تهی** می‌نامند.*

تعریف ۳.۱.۱. ***فاصله** بین دو رأس $u, v \in V(G)$، $d_G(u, v)$ برابر طول کوتاهترین (u, v) - مسیر در G است. در صورتی‌که G شامل هیچ (u, v)- مسیری نباشد تعریف می‌کنیم $d_G(u, v) = \infty$. بزرگترین فاصله موجود بین رئوس گراف G را **قطر** G نامیده و با $\mathrm{diam}(G)$ نشان می‌دهند.*

تعریف ۴.۱.۱. *هرگاه بین هر دو رأس متمایز گراف G مسیری موجود باشد، گراف G را **همبند** می‌نامند. گرافی که همبند نباشد، **ناهمبند** نامیده می‌شود. اگر با حذف هر $k - ۱$ رأس دلخواه از G، گراف حاصل همبند باشد، در این صورت G، **k- همبند** نامیده می‌شود.*

تعریف ۵.۱.۱. گراف همبند بدون دور را **درخت** می‌نامند.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید H و G دو گراف باشند. دراین‌صورت H را **زیر گراف** G گویند هرگاه $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. اگر $V(H) = V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$، آن‌گاه H را **زیرگراف فراگیر** G می‌نامند. فرض کنید $S \subseteq V(G)$. **زیرگراف القاشده توسط** S ، زیرگرافی از G است که مجموعه رأس‌های آن S بوده و مجموعه یال‌هایش متشکل از یال‌های G است که هر دو انتهای آن‌ها در S باشد. زیرگراف القایی توسط مجموعه‌ای از یال‌ها به‌صورت مشابه تعریف می‌شود.

تعریف ۷.۱.۱. زیرگراف همبند ماکسیمال یک گراف را **مؤلفه همبندی** آن می‌نامند.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنید G یک گراف باشد. زیرمجموعه S از $V(G)$، که در آن هیچ دو رأسی مجاور نباشند، **مجموعه مستقل** نامیده می‌شود. مجموعه مستقل S در G **ماکسیمال** است هرگاه هیچ مجموعه مستقلی از G شامل S موجود نباشد. مجموعه مستقل S **ماکسیمم** نامیده می‌شود هرگاه هیچ مجموعه مستقل S' با شرط $|S'| > |S|$ موجود نباشد. تعداد رئوس یک مجموعه مستقل ماکسیمم در گراف G را **عدد استقلال** G نامیده و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۹.۱.۱. یک مجموعه مستقل از یال‌ها در گراف G را **جورسازی** نامیده و اندازه جورسازی ماکسیمم را **عدد جورسازی** گویند و با $\mu(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۰.۱.۱. مجموعه تمام رئوس مجاور با رأس v در G را **همسایگی باز** v نامیده و با $N_G(v)$ نشان می‌دهند. همسایگی بسته v عبارتست از

$$N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}.$$

تعریف ۱۱.۱.۱. $|N_G(v)|$ را **درجه رأس** v در G نامیده و با $\deg_G(v)$ نشان می‌دهند. رأس از درجه صفر، **رأس تنها** و رأس از درجه یک، **برگ** نامیده می‌شود. تنها همسایه یک برگ را **رأس اتکاء** می‌نامند. **ماکسیمم و مینیمم** درجه G را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید $S \subseteq V(G)$. ***همسایگی باز S*** عبارتست از

$$N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v).$$

و برای هر زیرمجموعه $S \subseteq V(G)$ ، فرض کنید

$$\sum(S, G) = \sum_{v \in S} \deg(v).$$

تعریف ۱۳.۱.۱. گراف $G = (V, E)$ را ***دوبخشی*** گویند؛ هرگاه $V = V_1 \cup V_2$ که در آن $V_1 \neq \emptyset$ و $V_2 \neq \emptyset$ و $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ و هر یال G دارای یک انتها در V_1 و یک انتها در V_2 باشد. گراف دو بخشی با بخش‌های V_1 و V_2 را که در آن $|V_1| = m$ ، $|V_2| = n$ و هر عضو V_1 با هر عضو از V_2 مجاور است را ***گراف دوبخشی کامل*** نامیده و با $K_{m,n}$ نشان می‌دهند. گراف دوبخشی $K_{1,n}$ را ***ستاره*** می‌نامند. گراف‌های چندبخشی و چندبخشی کامل به‌طور مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف ۱۴.۱.۱. ***زیرتقسیم کردن*** یال $e = uv$ در گراف G عبارت است از حذف یال e و افزودن رأس جدید w ، همراه با دو یال uw و wv . (هر یال حداکثر یک‌بار زیرتقسیم می‌شود) . ***عنکبوت سالم*** $S(K_{1,t})$ گرافی است که از زیرتقسیم همه یال‌های ستاره $K_{1,t}$ ، برای $t \geq 2$ ، حاصل می‌شود و ***عنکبوت زخمی*** S_t گرافی است که از زیرتقسیم حداکثر $t - 1$ یال از ستاره $K_{1,t}$ ، برای $t \geq 2$ ، حاصل می‌شود.

تعریف ۱۵.۱.۱. یک ***خوشه*** از G ، زیرمجموعه‌ای مانند S از $V(G)$ است به‌طوری‌که زیرگراف القایی $G[S]$ گراف کامل باشد. ماکسیمم تعداد رأس‌های یک خوشه در G را ***عدد خوشه‌ای*** G نامیده و با $\omega(G)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۱۶.۱.۱. ***کرونای*** $G = H \circ K_1$ گرافی است که از H با افزودن یک یال آویز به هر رأس آن بدست می‌آید.

تعریف ۱۷.۱.۱. ***اجتماع*** دو گراف مجزای G_1 و G_2 ، $G_1 \cup G_2$ ، گرافی است با مجموعه رئوس $V(G_1) \cup V(G_2)$ و مجموعه یال‌های $E(G_1) \cup E(G_2)$.

تعریف ۱۸.۱.۱. ***الحاق*** *دو گراف G_1 و G_2، $G_1 \vee G_2$، گرافی است با مجموعه رئوس*

$$V(G_1) \cup V(G_2)$$

و مجموعه یال‌های $E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv | u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$.

تعریف ۱۹.۱.۱. *فرض کنید $d_1, d_2, ..., d_n$ دنباله درجات گراف G باشد که به طور غیرکاهشی مرتب شده‌اند، یعنی ، $d_1 \leq d_2 \leq ... \leq d_n$.* ***عدد پوچساز*** *گراف G، $a(G)$، بزرگترین عدد صحیح k است به طوری که مجموع k جمله اول دنباله درجات، حداکثر نصف مجموع درجات در این دنباله باشد. یا به عبارتی، عدد پوچساز بزرگترین عدد صحیح k است به طوری که*

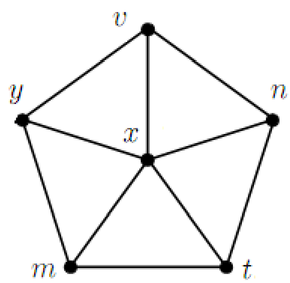
$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq \sum_{i=k+1}^{n} d_i.$$

براحتی دیده می‌شود که اگر G، m یال داشته باشد و عدد پوچسازش k باشد، در این صورت k دقیقاً بزرگترین عدد صحیحی است که $\sum_{i=1}^{k} d_i \leq m$.

۲.۱ مجموعه‌های احاطه‌گر

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه $D \subseteq V$ *در گراف G، یک مجموعه* ***احاطه‌گر*** *نامیده می‌شود هرگاه هر عضو $V(G) - D$ با رأسی از D ، مجاور باشد.* ***عدد احاطه‌ای*** *گراف G، $\gamma(G)$، کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر G است. یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه $\gamma(G)$ را یک $\gamma(G)$* ***-مجموعه*** *می‌نامند.*

تعریف ۲.۲.۱. مجموعه $D \subseteq V$ در گراف G، یک **مجموعه احاطه‌گر تام** ، مختصراً TD-مجموعه، نامیده می‌شود؛ هرگاه هر عضو $V(G)$ با رأسی از D ، مجاور باشد. **عدد احاطه‌ای تام** G، $\gamma_t(G)$ ، کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام G می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌گر تام از اندازه $\gamma_t(G)$ را یک $\gamma_t(G)$ **-مجموعه** می‌نامند.



شکل ۱.۱: یک گراف با عدد احاطه‌ای ۱ و عدد احاطه‌ای تام ۲

در شکل ۱.۱ ، $\{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر مینیمم و $\{x, y\}$ یک مجموعه احاطه‌گر تام مینیمم می‌باشد. لذا $\gamma(G) = ۱$ و $\gamma_t(G) = ۲$.

تعریف ۳.۲.۱. مجموعه $D \subseteq V$ در گراف G را یک ***مجموعه احاطه‌گر مضاعف،*** مختصراً DDS-مجموعه، می‌نامند؛ هرگاه D هر عضو $V(G)$ را، حداقل دوبار احاطه کند. ***عدد احاطه‌ای مضاعف*** G، $\gamma_{\times ۲}(G)$ ، کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر مضاعف G می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌گر مضاعف از اندازه $\gamma_{\times ۲}(G)$ را یک $\gamma_{\times ۲}(G)$ -***مجموعه*** می‌نامند.

تعریف ۴.۲.۱. TD-مجموعه $S \subseteq V$ در گراف G، یک ***مجموعه احاطه‌گر تام موضعی،*** مختصراً LTD-مجموعه، نامیده می‌شود؛ هرگاه برای هر جفت رأس مانند u و v در $V(G)/S$،

$$N_G(u) \cap S \neq N_G(v) \cap S.$$

عدد احاطه‌ای تام موضعی G، $\gamma_t^L(G)$ ، کوچکترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر تام موضعی G می‌باشد. یک مجموعه احاطه‌گر تام موضعی از اندازه $\gamma_t^L(G)$ را یک $\gamma_t^L(G)$ -***مجموعه*** می‌نامند.

فصل ۲

گرافهایی با عدد استقلال و عدد پوچساز برابر

۱.۲ مقدمه

گزاره ۱.۱.۲. *برای هر گراف G از مرتبه n داریم* $\alpha(G) \leq a(G)$.

برهان. فرض کنید $\alpha(G) = t$ و $a(G) = a$ باشد، در این‌صورت مجموعه‌ای از رئوس مانند $S \subseteq V(G)$ در G از اندازه t وجود دارد که هیچکدام از آنها باهم مجاور نیستند و این t تا رأس فقط می‌توانند با رئوس مجموعه $G - S$ مجاور باشند. فرض کنید دنباله درجات رئوسی که در مجموعه S قرار دارند به صورت $d_{i_1} \leq d_{i_2} \leq \ldots \leq d_{i_t}$ باشد. بوضوح $\sum_{j=1}^{t} d_{i_j} \leq E(G)$ و از طرفی داریم $\sum_{i=1}^{t} d_i \leq \sum_{j=1}^{t} d_{i_j}$، در نتیجه با توجه با تعریف عدد پوچساز خواهیم داشت $t \leq a$.

□

لم ۲.۱.۲. *برای هر گراف G از مرتبه n داریم* $a(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

برهان. با توجه به اینکه دنباله درجات نزولی است، داریم $\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i \leq \sum_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} d_i$. بنابراین

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i + \sum_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}^{n} d_i \geq \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i = 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i$$

در نتیجه

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} d_i \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} d_i = e$$

از اینرو $a(G) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. □

لم ۳.۱.۲. *برای هر گراف G و هر رأس v در G ، داریم $a(G-v) \leq a(G)$.*

فرض کنید G یک گراف و $v \in V(G)$ باشد و فرض کنید $a = a(G)$ و $a' = a(G-v)$ باشد. نشان می‌دهیم $a' \leq a$. فرض کنید $d_G(w)$ درجه رأس w در G باشد. برای یک مجموعه از رأس‌های G مانند $A \subseteq V$ ، فرض کنید $d_G(A)$ ، مجموع درجات رئوس مجموعه A در G باشد،یعنی، $d_G(A) = \sum_{w\in A} d_G(w)$. فرض کنید $m = |E(G)|$ و $m' = |E(G-v)|$ باشد. فرض کنید $a' > a$ یعنی عدد پوچساز $G-v$ حداقل $a+1$ باشد. در این‌صورت مجموعه‌ای مانند $A \subseteq V(G-v)$ وجود دارد که $|A| = a+1$ و $d_{G-v}(A) \leq m'$. در این صورت داریم

$$d_G(A) \leq d_{G-v}(A) + d_G(v) \leq m' + d_G(v) = m.$$

یعنی مجموعه‌ای از رئوس G با $a+1$ عضو وجود دارد که مجموع درجاتش حداکثر تعداد یالهای G است و این یعنی عدد پوچساز گراف G حداقل $a+1$ خواهد بود که این یک تناقض است. در نتیجه فرض خلف باطل و حکم برقرار است. □

۲.۲ عدد استقلال بحرانی و تشخیص برابری

مجموعه مستقل I از رئوس G، مجموعه مستقل بحرانی است اگر $|N(I)| - |I|$ بیشینه باشد. این مجموعه‌ها توسط ژانگ [1] [۱۷] ، که نشان داد در زمان چندجمله‌ای قابل محاسبه هستند، معرفی شده‌اند.مجموعه مستقل بحرانی ماکزیمم، یک مجموعه مستقل بحرانی با بزرگترین اندازه است. عدد استقلال بحرانی یک گراف که با نماد $\alpha' = \alpha'(G)$ نمایش داده می‌شود، اندازه بزرگترین مجموعه مستقل بحرانی گراف G است. عدد استقلال بحرانی یک گراف، کران پایینی برای عدد استقلال یک گراف است.

یک گراف ساده نشدنی مستقل است اگر $\alpha' = ۰$ باشد. برای این دسته از گراف‌ها، تعداد همسایه‌های هر مجموعه مستقل، بزرگتر از تعداد رئوس خود مجموعه است. یک گراف ساده شدنی مستقل است

[1] Zhang

اگر $\alpha' > 0$. یک گراف کاستنی تام است اگر $\alpha = \alpha'$.

مجموعه‌های مستقل بحرانی می‌توانند به مجموعه‌های مستقل ماکزیمم، گسترش یابند. باتنکو [۲] و تراخانو [۳] از این حقیقت استفاده کردند و جستجو برای یافتن مجموعه مستقل ماکزیمم را تسریع بخشیدند. که این حقیقت در اثبات قضیه ۲.۲.۲ نیز مورد نیاز خواهد بود.

قضیه ۲.۲.۱. [۳]

اگر I_c مجموعه‌ای مستقل بحرانی برای گراف G باشد آنگاه مجموعه مستقل ماکزیمم I در گراف G وجود دارد به طوری که $I_c \subseteq I$.

برهان. فرض کنید J یک مجموعه مستقل ماکزیمم و I_c یک مجموعه مستقل بحرانی در G باشد. فرض کنید $I = (J \cup I_c) - N(I_c)$. در این صورت I مجموعه مستقل است و $I_c \subseteq I$. برای این که نشان دهیم I مجموعه مستقل ماکزیمم است، کافی است نشان دهیم $|J| \geq |I|$. فرض کنیم $|J| > |I|$، در این صورت $|I - J| > |J - I|$. چون $I - J = I_c - J$ و $J - I = N(I_c) \cap J$ ، داریم

$$|N(I_c) \cap J| \quad > \quad |I_c - J|$$

و

$$|N(I_c)| \quad \geq \quad |N(I_c) \cap J| + |N(I_c \cap J)|.$$

از دو رابطه اخیر نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned}
|I_c| - |N(I_c)| \quad &= \quad |I_c - J| + |I_c \cap J| - |N(I_c)| \\
&< \quad |N(I_c) \cap J| + |I_c \cap J| - |N(I_c) \cap J| - |N(I_c \cap J)| \\
&= \quad |I_c \cap J| - |N(I_c \cap J)|.
\end{aligned}$$

---

[۲] Butenko
[۳] Trukhanov

در نتیجه

$$|I_c| - |N(I_c)| \quad < \quad |I_c \cap J| - |N(I_c \cap J)|$$

که با این واقعیت که I_c یک مجموعه مستقل بحرانی است، در تناقض است در نتیجه حکم برقرار است. □

قضیه ۲.۲.۲. *برای گرافی مانند G، عدد استقلال α با عدد پوچساز a برابر است اگر و تنها اگر حداقل یکی از دو حالت زیر برقرار باشد.*

۱) $a \geq \frac{n}{2}$ و $\alpha' = a$.

۲) $a < \frac{n}{2}$ *و رأسی مانند* $v \in V(G)$ *وجود داشته باشد به طوری که* $\alpha'(G - v) = a(G)$.

برهان. فرض کنید G گرافی از مرتبه n باشد. فرض کنید $a \geq \frac{n}{2}$ و $\alpha'(G) = a(G)$.

چون برای هر گراف $a \leq \alpha \leq \alpha'$ ، نتیجه می‌شود $\alpha(G) = a(G)$.

حال فرض کنید $a < \frac{n}{2}$ و رأسی مانند $v \in V(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha'(G - v) = a(G)$.

چون $\alpha'(G - v) \leq \alpha(G - v) \leq \alpha(G) \leq a(G)$ ، نتیجه می‌شود $\alpha(G) = a(G)$.

حال فرض کنید $\alpha(G) = a(G)$. به استقراء روی n، نشان می‌دهیم حداقل یکی از دو حالت زیر برقرار است.

۱) $a \geq \frac{n}{2}$ و $\alpha' = a$.

۲) $a < \frac{n}{2}$ و رأسی مانند $v \in V(G)$ وجود داشته باشد به طوری که $\alpha'(G - v) = a(G)$.

بوضوح حکم برای همه گراف‌های از مرتبه حداکثر ۳ برقرار می‌باشد. فرض کنید حکم برای همه گراف‌های از مرتبه کمتر از n برقرار باشد و G گرافی از مرتبه n باشد. اگر G گراف تهی باشد آنگاه

$$\alpha' = \alpha = a = n$$

و حالت (۱) برقرار است. فرض کنید G گرافی ناتهی باشد، در این‌صورت G رأسی مانند v دارد که متعلق به هیچ مجموعه مستقل ماکزیممی، نیست. بنابراین $\alpha(G - v) = \alpha(G) = a(G)$. فرض