دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

پایان نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

نظریه نوسانات مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع

استاد راهنما:

دکتر عین‌ا... پاشا

نگارش:

محمد علی فرهنگ خواه

پاییز ۷۹

آگهی دفاع از پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار

عنوان:

نظریهٔ نوسانات مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع

استاد راهنما : آقای دکتر عین‌اله پاشا

داور خارجی : آقای دکتر محمدقاسم وحیدی اصل

داور داخلی : آقای دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده

دانشجو : آقای محمدعلی فرهنگ خواه

زمان : ساعت ۴ بعدازظهر روز دوشنبه مورخ ۷۹/۸/۹

آدرس : دانشکدهٔ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر دانشگاه تربیت معلم.

خلاصه:

نظریهٔ نوسانات مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با فرآیند قدم زدن تصادفی بیش از هر فرآیند دیگر پیوند دارد، اما این نظریه به فرآیند قدم زدن تصادفی محدود نمانده و در فرآیند تجدید، ورشکستگی قمارباز، حرکت براونی، زنجیرهای مارکوف و هر فرآیندی که بتوان از دیدگاه مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع به آن وارد شد دارای کاربرد است. در این پایان‌نامه با معرفی توابعی از مجموعهای جزئی، به اثبات اصل هم‌ارزی می‌پردازیم. متغیرهای تصادفی نردبانی معرفی شده و ثابت می‌شود که تعداد نقاط نردبانی در دنبالهٔ مجموعهای جزئی دارای توزیع هندسی است. همچنین توابع مولد دوگانه که اتحادهای نظریهٔ نوسانات بر پایهٔ آنها شکل می‌گیرد معرفی می‌شوند و سپس اتحادهای فوق اثبات می‌گردند. آنگاه به کمک این اتحادها در مورد قانون آرک سینوس، معادله والد، میانگین تجدیدها در بازهٔ $[x, x+h]$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$ بحث می‌کنیم. بعلاوه با توجه به علامت امید ریاضی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع، نتایجی را در مورد دنباله مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی فوق بدست می‌آوریم.

بسمه تعالی

دانشکدۀ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

تاریخ ....
شماره ....
پیوست ....
واحد ....

دانشگاه تربیت معلم

صورتجلسۀ دفاع از پایان نامۀ کارشناسی ارشد

جلسۀ دفاع از پایان نامه آقای محمدعلی فرهنگ خواه دانشجوی دورۀ کارشناسی ارشد رشتۀ آمار تحت عنوان:

نظریۀ نوسانات مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع

در روز دوشنبه مورخه ۷۹/۸/۹ در دانشکدۀ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر تشکیل گردید و نتیجه آزمون به شرح زیر تعیین می‌گردد. نمرۀ این آزمون ۱۸/۲۵ می‌باشد.

۱- عالی ☑
۲- بسیار خوب ☐
۳- خوب ☐
۴- قابل قبول ☐
۵- غیر قابل قبول ☐

استاد راهنما	داور خارجی	داور داخلی
دکتر عین‌اله پاشا	دکتر محمدقاسم وحیدی‌اصل	دکتر علی‌اکبر رحیم‌زاده

اسماعیل بابلیان
رئیس دانشکدۀ علوم ریاضی و مهندسی کامپیوتر

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

مقدمه

دنباله مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع دارای نقشی عمده در ساختار بسیاری از فرآیندهای تصادفی می‌باشد. بعنوان مثال قدم زدن تصادفی فرآیندی است که از مجموع متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع بدست می‌آید و با مجموع متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع یک زنجیر مارکف را تشکیل می دهند، لذا همگام با مطالعه فرآیندهای مختلف، بررسی دنباله مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع همواره مدنظر بود و به پیش رفته است. اما تفاوت عمده‌ای که بین مطالعه یک فرآیند خاص با مجموعهای جزئی فوق‌الذکر وجود دارد این است که منظور ما از بررسی مجموعهای جزئی بدست آوردن ابزاری برای مطالعه و تحلیل سایر فرآیندهاست، در نتیجه شکل قضایا بگونه‌ای تنظیم می‌شوند که این هدف را تأمین نمایند. در این پایان نامه به هیچ‌وجه به دنبال کاربرد این نظریه در یک فرایند خاص نمی‌باشیم، بلکه اثبات قضایایی در این زمینه و مثالهایی کلی در مورد کاربرد آن قضایا مورد نظر می‌باشد. به دلیل کاربرد وسیع این نظریه در فرآیندهای مختلف و محدودیت سطح علمی نگارنده بدیهی است که تنها بخش کوچکی از آن قابل طرح و بحث بوده است. قسمت عمده مطالب حاضر به فصل هفدهم کتاب دومین درس در فرآیندهای تصادفی نوشته ساموئل کارلین و هاوارد تیلور متکی است. ترتیب مطالب در فصول مختلف به قرار زیر است:

در فصل یک، مفاهیم، نمادها، تعاریف و توابعی که مطالعه ما بر روی دنباله مجموعهای جزئی از طریق آنها صورت می‌گیرد معرفی شده و با ارائه مثالهای مناسب تلاش شده است تا توضیحات کاملی در هر مورد داده شود.

در فصل دو، اصل همارزی اثبات می‌شود، ابتدا این اصل برای یک فضای نمونه خاص و سپس به صورت تعمیم یافته اثبات می‌گردد.

در فصل سه، مفهوم متغیرهای تصادفی نردبانی و ارتفاعهای نردبانی ارائه گردیده و قضایایی در مورد این متغیرها اثبات می‌شود.

در فصل چهار، اثبات چند اتحاد مدنظر قرار داده شده که در هر مورد مقدمتاً لم‌های مورد نیاز اثبات می‌گردند.

در فصل پنج، کاربردهایی از اتحادها و قضایای اثبات شده در فصول قبل ارائه شده است.

در انتهای فصول سه و چهار و در انتهای هریک از بخشهای فصل پنج قسمتی تحت عنوان تذکر وجود دارد که در این قسمت مطلب آن فصل یا بخش، تحت شرایطی جدید مورد بحث قرار می‌گیرد. در قسمت تذکر تنها تعاریف و نتایج آورده شده و از اثبات مطالب به دلیل مشابهت خودداری گردیده است.

چکیده

در این پایان نامه دنباله مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع بوسیله توابع خاصی بررسی می‌شود. ابتدا این توابع معرفی می‌شوند، سپس قضیه‌ای به کمک این توابع اثبات می‌گردد، آنگاه متغیرهای تصادفی نردبانی مورد بحث قرار گرفته و چند رابطه در مورد این متغیرها نیز اثبات می‌شوند. در مرحله بعد با استفاده از مطالب فوق به اثبات چند اتحاد می‌پردازیم. در انتها با بکارگیری اتحادها و مطالب مذکور، نوسانات مجموعهای جزئی را بررسی می‌کنیم.

فصل اول

توابعی از فرآیند تصادفی مجموعهای جزئی

در این فصل که یک فصل مقدماتی است با توابع جدیدی آشنا می‌شویم. نمادها و تعاریف مربوط به این توابع همراه با مثالهایی برای روشن شدن مفاهیم آنان ارائه گردیده است. این توابع نقش مهمی در نظریه نوسانات بازی می‌کنند و قسمت عمده مطالب فصول بعدی به آنها متکی است.

دنباله متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع $X_۱$، $X_۲$، .... و مجموعهای جزئی

$$S_n = X_۱ + X_۲ + \ldots + X_n \qquad n = ۱, ۲, \ldots$$

و (۱-۱)

$$S_۰ = ۰$$

را درنظر بگیرید. این دنباله، دنباله‌ای جدید از متغیرهای تصادفی را پدید می‌آورد، به عبارت دیگر (۱-۱) یک فرآیند تصادفی است. در نظریه نوسانات مجموعهای جزئی متغیرهای تصادفی مستقل همتوزیع ما به مطالعه توابعی خاص از فرآیند فوق می‌پردازیم. این توابع به شکل $f(S_۰, S_۱, \ldots, S_n)$ می‌باشند. چند نوع از این توابع ذیلاً معرفی شده‌اند.

$$M_n = max(S_۰, S_۱, \ldots, S_n)$$
(۲-۱)
$$m_n = min(S_۰, S_۱, \ldots, S_n)$$

$P_n^+ =$ تعداد S_iهایی که $S_i > ۰$ $\quad i = ۱, ۲, \ldots, n$

$P_n =$ تعداد S_iهایی که $S_i \geq ۰$ $\quad i = ۱, ۲, \ldots, n$

$Q_n^- =$ تعداد S_iهایی که $S_i < ۰$ $\quad i = ۱, ۲, \ldots, n$ (۳-۱)

$Q_n =$ تعداد S_iهایی که $S_i \leq ۰$ $\quad i = ۱, ۲, \ldots, n$

مثلاً اگر

$$s_۱ = ۲ \quad s_۲ = ۵ \quad s_۳ = -۰/۵ \quad s_۴ = ۰ \quad s_۵ = -۲ \quad s_۶ = ۵ \quad s_۷ = ۳ \quad s_۸ = -۱$$

آنگاه باتوجه به اینکه $n = ۸$

$M_1=5 \qquad m_1=-2$

و

چون ۴ عدد از مجموعهای جزئی فوق اکیداً بزرگتر از صفر هستند $\qquad P_1^+=4$

چون ۵ عدد از مجموعهای جزئی فوق بزرگتر یا مساوی صفر هستند $\qquad P_1=5$

چون ۳ عدد از مجموعهای جزئی فوق اکیداً کوچکتر از صفر هستند $\qquad Q_1^-=3$

چون ۴ عدد از مجموعهای جزئی فوق کوچکتر یا مساوی صفر هستند $\qquad Q_1=4$

در نمودار صفحه بعد S_nها در مقابل nرسم شده‌اند و مقادیر P_n و Q_n و P_n^+ و Q_n^- که قبلاً به صورت عددی محاسبه شدند در نمودار صفحه بعد بصورت شهودی قابل محاسبه می‌باشند. P_n تعداد نقاطی را نشان می‌دهد که بالای محور یا روی محور n ها هستند و P_n^+ تعداد نقاطی را نشان می‌دهد که بالای محور هستند. بطور مشابه Q_n و Q_n^- در مورد نقاط زیر محور کاربرد دارند. البته طبق تعریف S_0 در این محاسبات نادیده گرفته می‌شود.

در ادامه معرفی توابع لازم است ابتدا تعاریف زیر ارائه گردد.

تعریف:

الف: گوییم آخرین ماکزیمم مجموعهای جزئی S_0 و S_1، ...، S_n در موقعیت (اندیس) k $(0\le k\le n)$ قرار دارد اگر

برای تمام jهایی که $\qquad j=0,1,\dots,k-1 \qquad S_k\ge S_j$

و

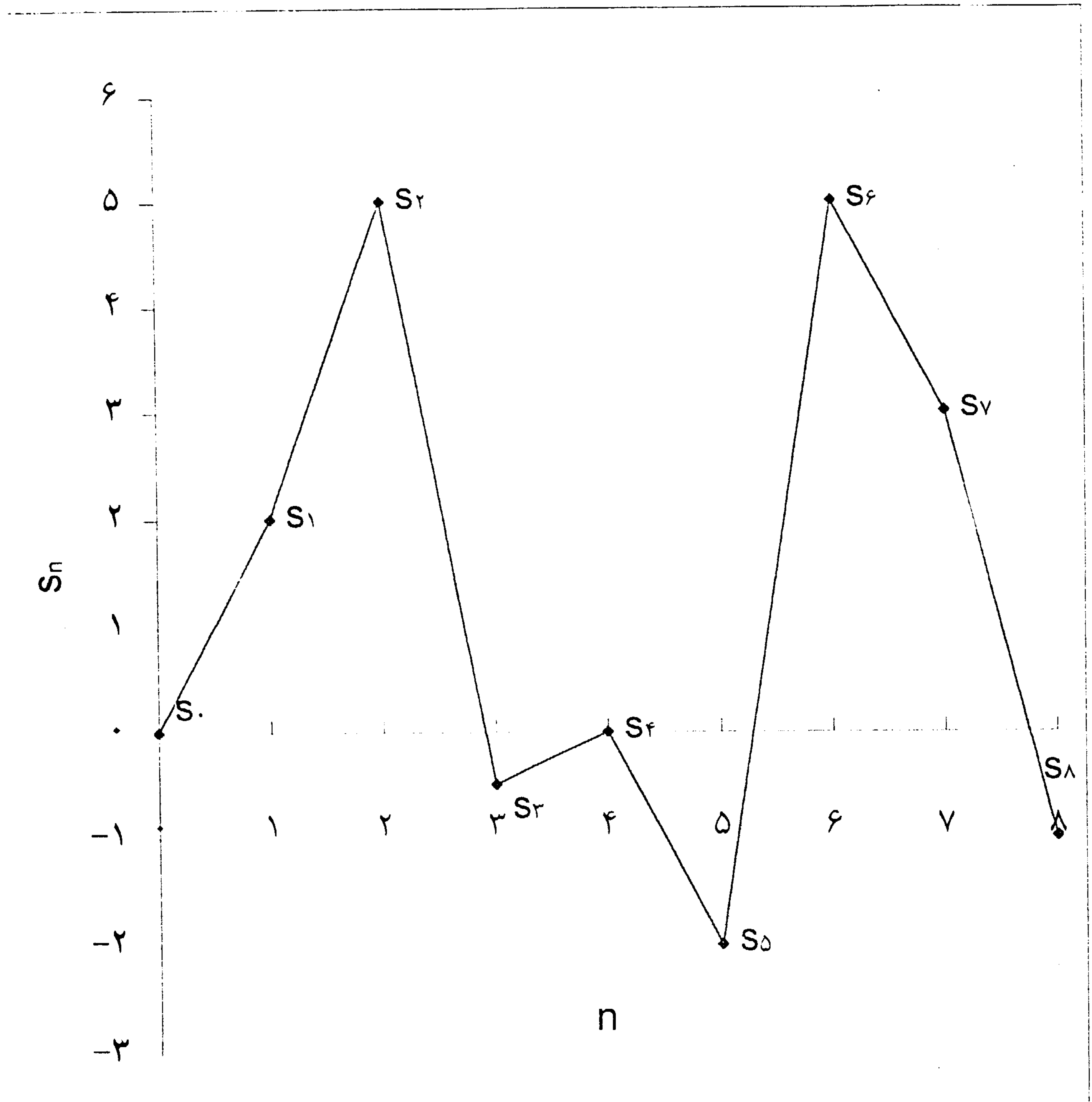
برای تمام jهایی که $\qquad j=k+1,k+2,\dots,n \qquad S_k>S_j$

ب: بطور مشابه می‌گوییم اولین ماکزیمم مجموعهای جزئی S_0 و S_1، ...، S_n در موقعیت k $(0\le k\le n)$ قرار دارد اگر

برای تمام jهایی که $\qquad j=0,1,\dots,k-1 \qquad S_k>S_j$

و

برای تمام jهایی که $\qquad j=k+1,k+2,\dots,n \qquad S_k\ge S_j$



۶
۵
۴
۳
۲
۱
۰
-۱
-۲
-۳
Sn
n
۱
۲
۳
۴
۵
۶
۷
۸
S۰
S۱
S۲
S۳
S۴
S۵
S۶
S۷
S۸

حال تعاریف فوق را برای اولین و آخرین و می‌نیمم ارائه می‌کنیم.

ج: گوییم آخرین می‌نیمم مجموعهای جزئی S_0، S_1، ...، S_n در موقعیت (اندیس) k $(0 \leq k \leq n)$ قرار دارد اگر

برای تمام jهایی که $j=0,1,2,...,k-1$ $\quad S_k \leq S_j$

و

برای تمام jهایی که $j=k+1,k+2,...,n$ $\quad S_k < S_j$

د: گوییم اولین می‌نیمم مجموعهای جزئی S_0، S_1، ...، S_n در موقعیت k $(0 \leq k \leq n)$ قرار دارد اگر

برای تمام jهایی که $j=0,1,2,...,k-1$ $\quad S_k < S_j$

و

برای تمام jهایی که $j=k+1,k+2,...,n$ $\quad S_k \leq S_j$

حال متناظر با تعاریف فوق متغیرهای تصادفی زیر را معرفی می‌کنیم.

$L_{nn} =$ موقعیت (اندیس) آخرین ماکزیمم در دنباله S_0، S_1، ...، S_n

$L_{n0} =$ موقعیت (اندیس) اولین ماکزیمم در دنباله S_0، S_1، ...، S_n $\quad$ (۱-۴)

$K_{nn} =$ موقعیت (اندیس) آخرین می‌نیمم در دنباله S_0، S_1، ...، S_n

$K_{n0} =$ موقعیت (اندیس) اولین می‌نیمم در دنباله S_0، S_1، ...، S_n

اکنون چنانچه به مثال قبل بازگردیم می‌بینیم که s_6 از تمام مجموعهای جزئی قبل از خود بزرگتر یا مساوی است و از تمام مجموعهای جزئی بعد از خود اکیداً بزرگتر است، لذا طبق تعریف، موقعیت آخرین ماکزیمم ۶ می‌باشد، پس $L_{88}=6$ به همین ترتیب $s_2=5$ اولین ماکزیمم می‌باشد و در نتیجه $L_{80}=2$. همچنین باتوجه به تعریف آخرین و اولین می‌نیمم می‌بینیم که $S_5=-2$ در شرایط هر دو تعریف صدق می‌کند، پس $s_5=-2$ اولین و آخرین می‌نیمم می‌باشد. در نتیجه $K_{88}=5$ و $K_{80}=5$ نموداری که در مورد این مثال رسم شده نیز ازنظر شهودی به درک بهتر مفاهیم فوق کمک می‌کند.

لازم به ذکر است که توابعی که تاکنون معرفی شده‌اند ممکن است بعنوان مثال بـه شکـل $P_n(X)$ یا $L_{nn}(X)$ و $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ نمایش داده شوند. در این صورت منظور از $P_n(X)$ یا $L_{nn}(X)$ همان P_n یا L_{nn} در مورد مجموعهای جـزئی X_1، X_1+X_2، ...، $X_1+X_2+...+X_n$ می‌باشد.

فصل دوم

اصل هم‌ارزی

در این فصل به دنبال اثبات تساویهای بین متغیرهای تصادفی (۱-۳) و (۱-۴) می‌باشیم. این تساویها بعنوان مثال به شکل $Pr(P_n=k) = Pr(L_{nn}=k)$ می‌باشند و باکمک آنها اتحادهایی را در فصول بعد اثبات خواهیم نمود. این تساویها را ابتدا در حالت خاص در لم (۲-۱) و سپس در حالت کلی تحت عنوان قضیه (۲-۱) اثبات می‌نماییم.

قبل از پرداختن به لم (۲-۱) لازم است مطالبی مقدماتی ارائه گردد. فرض کنید $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ یک n تایی باشد که در آن y_iها متمایز و حقیقی هستند. مجموعه تمام جایگشتهای $(y_1,y_2,...,y_n)$ را β می‌نامیم. دقت شود که y_iها اعداد ثابت هستند. بنابراین تعداد اعضای مجموعه β، $n!$ خواهد بود. هریک از اعضای β را با σy نمایش می‌دهیم. چنانچه به هریک از اعضای β احتمال $\frac{1}{n!}$ را منتسب کنیم، β به یک فضای نمونه‌ای تبدیل می‌گردد. بردار تصادفی $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ را روی β درنظر بگیرید که هریک از اعضای β را با احتمال $\frac{1}{n!}$ اختیار می‌کند در این صورت $Pr(X_k = y_i)=\frac{(n-1)!}{n!}=\frac{1}{n}$ ، $i,k=1,2,...,n$ واضح است که X_1، X_2، ...، X_n مستقل نیستند، زیرا اگر X_1 مقداری را اختیار کند X_2 نمی‌تواند آن مقدار را اختیار نماید اما X_1، X_2، ...، X_n تبادلپذیر هستند، یعنی توزیع توأم X_1، X_2، ...، X_n با توزیع توأم X_{k_1}، X_{k_2}، ...، X_{k_n} یکی است.

$n!\ Pr(P_n(X)=k)$، برابر با تعداد جایگشتهای $(y_1,...,y_n)$ است که در آنها دقیقاً k تا از مجموعهای جزئی $S_1(\sigma y)=y_{k_1}$، $S_2(\sigma y)=y_{k_1}+y_{k_2}$، ...، $S_n(\sigma y)=y_{k_1}+y_{k_2}+...+y_{k_n}$ نامنفی باشند این مطلب را به شکل زیر نیز می‌توان نوشت:

$$n!\ Pr(P_n=k)=\sum_{\sigma} I_{\{P_n=k\}}\ (\sigma y) \qquad (۱-۲)$$

در سمت راست تساوی فوق مجموعیابی روی تمام جایگشتهای $y=(y_1,...,y_n)$ انجام می‌گیرد و