بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه تهران

دانشکده فیزیک

نظریه های نسبیت عام تعمیم یافته

نگارش : فائزه امامی تلارمی

استاد راهنما : دکتر فاطمه شجاعی

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

در رشته : فیزیک

گرایش: گرانش و فیزیک نجومی

بهمن ۱۳۸۶

جمهوری اسلامی ایران
دانشگاه تهران

اداره کل تحصیلات تکمیلی

شماره ....
تاریخ..........
پیوست..........

باسمه تعالی

تعهد نامه اصالت اثر

اینجانب فائزه امامی متعهد می شوم که مطالب مندرج در این پایان نامه / رساله حاصل کار پژوهشی اینجانب است وبه دستاوردهایپژوهشی دیگران که در این پژوهش از آنها استفاده شده است ، مطابق مقررات ارجاع ودر فهرست منابع ومآخذ ذکر گردیده است. این پایان نامه / رساله قبلاً برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است .
در صورت اثبات تخلف (در هرزمان) مدرک تحصیلی صادر شده توسط دانشگاه از اعتبار ساقط خواهد شد .
کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به پردیس / دانشکده / مرکز دانشگاه تهران می باشد .

نام ونام خانوادگی دانشجو فائزه امامی تلارمی
امضاء

آدرس : خیابان انقلاب اول خیابان فخر رازی ـ پلاک ۵ کد پستی : ۱۳۰۴۵/۶۸
فاکس : ۶۴۹۷۳۱۴

چکیده

نظریه نسبیت عام اینشتین گرانش نیوتونی را با چالش های جدی روبرو نمود. این نظریه بعنوان یکی از قدرتمندترین نظریه ها در توصیف بسیاری از مشاهدات و داده های تجربی و همچنین پیش بینی پدیده های کیهانی شناخته شده است. با این وجود نا کارآمد بودن این نظریه در توجیه برخی مشاهدات کیهانشناسی از جمله انبساط شتابدار کیهان، انگیزه ی مطالعات به منظور بیان یک نظریه ی کامل تر را قوت بخشیده است. در همین راستا نظریات گرانش تعمیم یافته مطرح شده است که در آنها کنش بصورت تابعی از اسکالر انحنا در نظر گرفته می شود. همچنین در نسبیت عام تنها متغیر مستقل بر روی منیفلد متریک است که در یک حالت کلی تر می توانیم همبسته ی آفین را نیز بعنوان یک کمیت مستقل علاوه بر متریک در نظر بگیریم. چنین نظریاتی را نظریه های متریک- آفینی می نامیم. در این پایان نامه به بررسی معادلات میدان در گرانش تعمیم یافته در دو رهیافت متریکی و متریک- آفینی و مقایسه ی این دو رهیافت پرداخته ایم. همچنین به برخی از کاربرد های این نظریات در کیهانشناسی نیز اشاره خواهیم نمود.

واژگان کلیدی : کنش اینشتین- هیلبرت , گرانش تعمیم یافته $f(R)$,معادلات میدان اینشتین, رهیافت متریکی , رهیافت متریک-آفینی , رهیافت پالاتینی , کنش مادی , نظریه اسکالر تانسوری.

سپاسگزاری :

"من علمنی حرفاً فقد صیرنی عبداً"

با سپاس فراوان از استاد راهنمای ارجمندم خانم دکتر شجاعی که نه تنها علم، که صبر و بزرگواری را از او آموختم و همواره راهنمایی های دلسوزانه اش روشنای راهم بود.

با تشکر از خانواده ی مهربانم که همیشه به محبت های بی دریغشان تکیه کرده ام.

و قدر دانی از تمام دوستانی که مرا در نگارش این پایان نامه یاری داده اند.

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۰۵ اینشتین[۱] نظریه ی نسبیت خاص[۲] خود را کامل کرد که این نظریه گرانش نیوتونی را با چالش جدی روبرو می نمود. به نظر می رسید نسبیت خاص باید به گونه ای تعمیم داده شود تا بتواند چارچوب های غیر اینرسی را نیز شامل شود. در سال ۱۹۰۷ اینشتین هم ارزی بین گرانش و اینرسی را مطرح کرد و توانست با استفاده از آن پدیده ی انتقال به سرخ[۳] [٦]را پیش بینی کند. بالاخره در ۱۹۱۵ نظریه نسبیت عام[٤] را ارائه کرد که تعمیمی از نسبیت خاص بود و گرانش را نیز در بر داشت.

نظریه نسبیت عام استاندارد اینشتین بدون شک یکی از معتبرترین و با اهمیت ترین نظریه هایی است که تا کنون مطرح شده است. این نظریه برای توصیف بسیاری از مشاهدات کیهانشناسی کارآمد بوده و می باشد.البته محدودیت هایی نیز داشته که دانشمندان را به فکر واداشته تا پیشنهاداتی برای اصلاح و تکامل این نظریه ارائه کنند.

در نسبیت عام استاندارد دانشمندان برای توجیه برخی مسائل از جمله انبساط شتابدار کیهان در عصر حاضر – که از مشاهدات اخیر در کیهان شناسی مستقیماً اثبات می شود – و همچنین تورم[٥] در

[۱] Einstein
[۲] Special Relativity (SR)
[۳] Red shift
[٤] General Relativity (GR)
[٥] inflation

جهان اولیه ، مفاهیمی مانند انرژی تاریک[1] و ماده تاریک[2] را تعریف می کنند که بنابراین نظریه این اجزاء حدود ٩٦٪ از جهان را اشغال نموده اند, اگرچه تاکنون دلیل قطعی مبتنی بر مشاهدات مستقیم برای اثبات وجود این اجزاء در کیهان بدست نیامده است. حتی اگر بتوان در آینده بنابر بعضی فرضیات, ماده تاریک را برپایه ی وجود برخی ذرات ابرمتقارن پایدار مشاهده نمود, هنوز ٧٠٪ کیهان که توسط انرژی تاریک اشغال شده است همچنان مبهم و مورد سوال است[١].گروهی بر این اعتقادند که با اعمال تغییراتی در کنش گرانشی استاندارد می توان بسیاری از مسائل موجود را که نسبیت عام قادر به توجیه آن نیست به راحتی حل نمود. همچنین اخیراً محاسبات بسیاری انجام شده است که نشان می دهد وقتی تصحیحات کوانتومی و یا نظریه ی ریسمان[3] در نظر گرفته شود، آنگاه کنش گرانشی کلاسیک نیز باید شامل مرتبه های بالاتری از اسکالر انحنا (**R**) باشد.

تمام این موارد انگیزه ای است برای آنکه افراد در جستجوی یک نظریه ی معادل گرانشی باشند که بتواند بدون نیاز به وارد کردن مفاهیم خارجی مانند انرژی تاریک و ماده ی تاریک، جهان کنونی را توصیف کند و حتی در مورد پدیده هایی مانند پیدایش جهان اولیه و یا تورم توجیهات بهتری ارائه کند[٢] . تا کنون نظریات متعددی در همین راستا مطرح شده است که از آن جمله می توان به *نظریات اسکالر- تانسوری*[٣] ، *فرمولبندی انیشتین-کارتان*[٤]، در نظر گرفتن برخی *ابعاد اضافه* و *فرمالیسم پالاتینی* اشاره کرد.

در نسبیت عام فرض مي شود که می توان فضا – زمان را بوسیله تنها یک میدان بنیادی بر روی منیفلد یعنی صرفا با متریک ، بطور کامل توصیف نمود. بنابراین در این نظریه، متریک تنها متغیر مستقل

[1] Dark energy
[2] Dark matter
[3] String theory

در کنش گرانشی است. لزوم این فرض اولیه، خیلی زود توسط بسیاری از جمله خود انیشتین مورد سوال واقع شد. یک پیشنهاد جایگزین که برای بدست آوردن معادلات میدان مطرح شد روش متریک - *آفینی* بود.در این فرمالیسم *متریک* و *همبسته آفین* را بعنوان دو کمیت مستقل در نظر می گیرند و به جای یک میدان متغیر ، در این نظریه دو میدان متغیر بر روی منیفلد داریم. در نتیجه با توجه به اصل کمترین کنش، برای بدست آوردن معادلات میدان از کنش نسبت به هر دو میدان متغیر وردش گرفته می شود.

از این گذشته شکل کنش گرانشی به کار گرفته شده در به دست آوردن معادلات میدان که همان کنش انیشتین – هیلبرت است همواره مورد سؤال واقع شده است، زیرا این شکل کنش بیش از اینکه مبتنی بر اصول خاصی باشد به دلیل سادگی این طور بیان شده است. اخیراً نظریات گرانشی که در آنها لاگرانژی شامل جملاتی با توان های مختلف R می باشد مورد توجه واقع شده است.در این نظریه ها کنش گرانشی شامل تابع غیرخطی از اسکالر انحنای ریچی به صورت $f(R)$ است[۵].

هدف ما در اینجا بررسی و مطالعه نظریه های متریک – آفینی است که در آنها لاگرانژی گرانشی بصورت یک تابع عمومی از اسکالر انحنا (R) بیان می شود همچنین اجازه می دهیم کنش ماده نیز بتواند به همبسته آفین وابسته باشد. برای اینکه کلی ترین حالت را در نظر بگیریم همبسته آفین را از ابتدا متقارن فرض نخواهیم کرد یعنی وجود واپیچش را در فضا زمان ممکن می دانیم .

فصل اول این پایان نامه مربوط به یاد آوری مفاهیم هندسی اولیه است که در نظریات گرانشی مورد استفاده قرار می گیرد.

در فصل دو مروری بر نظریه ی نسبیت عام خواهیم داشت و معادلات میدان را در گرانش اینشتین و همچنین در نظریات تعمیم یافته گرانش ، در خلاء و در حضور ماده بدست می آوریم.نشان می دهیم که در گرانش تعمیم یافته $f(R)$ در رهیافت متریکی محض نمی توان مستقیماً از کنش اینشتین هیلبرت به معادلات میدان اینشتین رسید .

در فصل سوم گرانش را در رهیافت متریک – آفینی بررسی خواهیم کرد و در این رهیافت نیز بدست آوردن معادلات میدان را برای خلاء و در حضور ماده مرور می کنیم. در حالت کلی اجازه می دهیم کنش ماده وابسته به هردو متغیر گرانشی یعنی متریک و همبسته باشد و همبسته را نیز در حالت کلی نامتقارن در نظر می گیریم تا نظریه گرانشی واپیچش را نیز دربر داشته باشد. همچنین به بررسی منشاء پیدایش و پیامد های حضور واپیچش در معادلات اشاره خواهیم نمود. در ادامه مسأله ی ناسازگاری معادلات بدست آمده در رهیافت متریک – آفینی را تحت تبدیلات تصویری مورد بررسی قرار می دهیم و برخی از راه حل های پیشنهاد شده برای حل این مشکل را بیان خواهیم نمود.

در فصل چهارم به پیامدهای بستگی و عدم بستگی کنش ماده به همبسته ی مستقل در نظریه ی متریک– آفینی می پردازیم و هردو حالت را بطور جداگانه مورد مطالعه قرار می دهیم. سپس به مطالعه ی یک میدان مادی خاص (میدان الکترومغناطیسی) در این رهیافت می پردازیم و اعتبار اصل جفت شدگی کمین را در نظریه ی متریک – آفینی بررسی می کنیم. همچنین به حالت های دیگری از میدان های مادی که اغلب در فیزیک بکار می روند بطور خلاصه اشاره خواهیم کرد.

در فصل پنجم ابتدا به نظریه ی اسکالر- تانسوری بعنوان یک نظریه ی گرانشی موفق و کار آمد در توصیف پدیده های کیهانشناسی اشاره ی کوتاهی خواهیم داشت و سپس به بررسی وجود هم ارزی

بین نظریات گرانش تعمیم یافته $f(R)$ در سه رهیافت متریکی، متریک-آفینی و پالاتینی با نظریه ی اسکالر- تانسوری می پردازیم .

در فصل ششم نیز برقراری قوانین بقای انرژی- مومنتوم را در نظریه های گرانش $f(R)$ برای هردو رهیافت متریکی و متریک – آفینی مورد مطالعه قرار می دهیم.

فصل هفتم شامل نتایج کیهانشناسی در نظریات گرانش تعمیم یافته می باشد. در این فصل معادلات تعمیم یافته ی کیهانشناسی را بدست می آوریم و به بررسی یک مدل مثالی در رهیافت پالاتینی نیز می پردازیم. در ادامه مروری خواهیم داشت بر برخی از $f(R)$ های بکار گرفته شده در لاگرانژی گرانشی که برای توصیف پدیده های مورد سوال در کیهانشناسی مورد استفاده قرار گرفته اند. ما در اینجا تنها به مواردی پرداخته ایم که کیهانشناسی تعمیم یافته را در رهیافت متریک- آفینی مورد بررسی قرار داده اند.

فصل ۱

مفاهیم هندسی در گرانش

۱-۱ همبسته ی آفین ، مشتقات هموردا و انتقال موازی

بر خلاف مختصات کارتزین[۱] ، در یک فضای خمیده تحت تبدیلات عام مختصات ، دیفرانسیل یک بردار(dA^{μ}) دیگر یک بردار نیست چراکه از محاسبه ی تغییرات بین دو بردار در دو نقطه ی متفاوت بدست می آید همچنین مشتق جزیی یعنی نیز دیگر یک تانسور نخواهد بود. یعنی dA^{μ} تحت تبدیل مختصات مانند بردارهای هموردا رفتار نمی کند.

$$A^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} A'^{\nu}$$

$$dA^{\mu} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dA'^{\nu} + A'^{\nu} d\left(\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}}\right)$$

$$= \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\nu}} dA'^{\nu} + A'^{\nu} \frac{\partial^2 x^{\mu}}{\partial x'^{\alpha} \partial x'^{\nu}} dx'^{\alpha} \qquad (۱-۱)$$

[۱] Cartesian coordinates

بنابراین اگر بخواهیم dA^{μ} مانند یک بردار هموردا رفتار کند باید جمله ی دوم در عبارت بالا صفر شود. یعنی تبدیل $x^{\mu} = f^{\mu}(x')$ باید بصورت توابع خطی از x^{μ} باشد.

برای تعریف یک تعمیم مناسب برای عملگر دیفرانسیل در یک فضای خمیده باید اختلاف دو بردار از یک نقطه در فضا- زمان محاسبه شود. یعنی باید یکی از بردارها را به محل بردار دیگر انتقال دهیم .

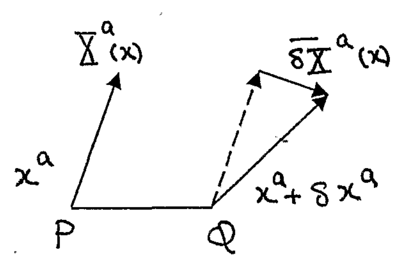
اگر $X^{a}(x)$ یک میدان برداری پادوردا در نقطه ی Q با مختصات $x^{a} + \delta x^{a}$ باشد که در نزدیکی نقطه ی P با مختصات x^{a} قرار دارد آنگاه با بسط تیلور تا مرتبه ی اول داریم:

$$X^{a}(x+\delta x) = X^{a}(x) + \delta x^{b}\partial_{b}X^{a} \tag{۱-۲}$$

اگر جمله ی دوم را با δX^{a} نشان دهیم،

$$\delta X^{a}(x) = X^{a}(x+\delta x) - X^{a}(x) \tag{۱-۳}$$

که همانگونه که در بالا نشان دادیم این رابطه یک رابطه ی تانسوری نیست. برای تعریف یک مشتق تانسوری، برداری را موازی با بردار X^{a} در نقطه ی Q در نظر می گیریم ،



از آنجا که $x^{a} + \delta x^{a}$ خیلی نزدیک به x^{a} است، می توانیم فرض کنیم که این بردار موازی فقط مقدار کمی با $X^{a}(x)$ تفاوت دارد که آن را با $\bar{\delta}X^{a}(x)$ نشان می دهیم. $\bar{\delta}X^{a}(x)$ نیز تانسور نیست ولی می خواهیم آن را طوری تعریف کنیم که اختلاف دو بردار به شکل زیر ، یک تانسور باشد:

$$\left(X^a(x)+\delta X^a(x)\right)-\left(X^a(x)+\bar{\delta}X^a(x)\right)=\delta X^a(x)-\bar{\delta}X^a(x) \tag{۱-٤}$$

واضح است که چنانچه $X^a(x)$ و یا δx^a صفر باشند $\bar{\delta}X^a(x)$ نیز باید صفر شود. بنابراین ساده ترین تعریف این است که فرض کنیم $\bar{\delta}X^a(x)$ بر حسب $X^a(x)$ و δx^a خطی است که ضریب این تناسب را با Γ^a_{bc} نشان می دهیم :

$$\bar{\delta}X^a(x)=-\Gamma^a_{bc}(x)X^b(x)\,\delta x^c \tag{۱-٥}$$

بنابراین یک مجموعه تابع در فضای n^3 بر روی منیفلدمان تعریف کرده ایم که می توانیم با استفاده از آن مشتق همورداً[1] را بصورت فرآیند حدگیری زیر تعریف کنیم :

$$\nabla_c X^a \equiv \lim_{\delta x^c\to 0}\frac{1}{\delta x^c}\left\{X^a(x+\delta x)-\left[X^a(x)+\bar{\delta}X^a(x)\right]\right\} \tag{۱-٦}$$

در واقع این عبارت نشان دهنده ی اختلاف بین دو بردار $X^a(Q)$ و بردار موازی با $X^a(P)$ در Q است تقسیم بر اختلاف مختصات دو نقطه در حدی که این اختلاف به صفر میل می کند. با استفاده از (۲-۱) و (۵-۱) داریم:

$$\nabla_c X^a=\partial_c X^a+\Gamma^a_{bc}X^b \tag{۱-٧}$$

از آنجا که انتظار داریم $\nabla_c X^a$ یک تانسور مرتبه ی (۱و۱) باشد می توانیم قاعده ی تبدیل Γ^a_{bc} را تحت تبدیل مختصات بصورت زیر بدست آوریم،

$$\Gamma'^a_{bc}=\frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\frac{\partial x^e}{\partial x'^b}\frac{\partial x^f}{\partial x'^c}\Gamma^d_{ef}+\frac{\partial x'^a}{\partial x^d}\frac{\partial^2 x^d}{\partial x'^b\partial x'^c} \tag{۱-٨}$$

[1] Covariant derivative

همانگونه که می بینیم Γ مانند یک تانسور تبدیل نمی شود. به کمیتی که تحت تبدیل مختصات مانند (۱-۸) تبدیل شود همبسته ی آفین[۱] گفته می شود. منیفلدی که بر روی آن یک میدان پیوستار همبسته تعریف شده است را یک منیفلد آفینی[۲] می نامیم.

۱-۲ ژئودزیک آفین

با معرفی نوتاسیون زیر ،

$$\nabla_X T^{a\cdots}_{b\cdots} = X^c \nabla_c T^{a\cdots}_{b\cdots} = \frac{D}{Du}\left(T^{a\cdots}_{b\cdots}\right) \tag{۱-۹}$$

چنانچه تانسور $T^{a\cdots}_{b\cdots}$ را روی منحنی C انتقال موازی دهیم داریم :

$$\frac{D}{Du}\left(T^{a\cdots}_{b\cdots}\right) = 0 \tag{۱-۱۰}$$

اگر منحنی C چنان باشد که بردار مماس انتقال موازی یافته در هر نقطه از منحنی متناسب با بردار مماس در آن نقطه از منحنی باشد به چنین منحنی یک *ژئودزیک آفین*[۳] گفته می شود.

$$\nabla_X X^a = \lambda X^a \tag{۱-۱۱}$$

$$\frac{d^2 x^a}{du^2} + \Gamma^a_{bc} \frac{dx^b}{du}\frac{dx^c}{du} = \lambda \frac{dx^a}{du} \tag{۱-۱۲}$$

۱-۳ مختصات ژئودزیک

در هر نقطه ی P از منیفلد می توان دستگاه مختصات خاصی معرفی نمود که در آن نقطه ، همبسته ی آفین برابر صفر باشد. چنین دستگاه مختصاتی را مختصات ژئودزی[۴] می نامند.

---
[۱] Affine connection
[۲] Affine manifold
[۳] Affine geodesic
[۴] Geodesic Coordinates

۱-٤ متریک

هر تانسور هموردای مرتبه ی (۲و۰) $g_{ab}(x)$ یک متریک[1] تعریف می کند. منیفلدی که روی آن متریک مشخص شده است را منیفلد ریمانی می نامند. متریک در تعریف طول بردارها و فواصل هندسی بکار می رود. فاصله ی بی نهایت اندک بین دو نقطه ی همسایه با مختصات $x^a, x^a + dx^a$ را به صورت :

$$ds^2 = g_{ab}(x)dx^a dx^b \qquad (1-13)$$

بر حسب متریک نمایش می دهند. همچنین متریک برای بالا و پایین بردن اندیس ها و تنجش کمیت های تانسوری نیز بکار می رود.

۱-٥ ژئودزیک متریکی

اگر منحنی زمان گونه ی C را که با پارامتر u پارامتر بندی شده است در نظر بگیریم از تقسیم رابطه ی (۱۳-۱) بر $(du)^2$ داریم :

$$\left(\frac{ds}{du}\right)^2 = g_{ab}\frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du} \qquad (1-14)$$

آنگاه فاصله ی بین دو نقطه P_1 و P_2 روی منحنی C را به شکل زیر می نویسم:

$$s = \int_{P_1}^{P_2} \frac{ds}{du} du = \int_{P_1}^{P_2} \left(g_{ab}\frac{dx^a}{du}\frac{dx^b}{du} \right)^{1/2} du \qquad (1-15)$$

که این فاصله با تغییرات بسیار کوچک بدون تغییر می ماند. اگر $u = s$ باشد ، معادله ی ژئودزیک متریکی را به صورت زیر داریم :

[1] Metric

$$\frac{d^2x^a}{ds^2}+\left\{{a \atop bc}\right\}\frac{dx^b}{ds}\frac{dx^a}{ds}=0 \qquad (۱-۱۶)$$

است که ، $g_{ab}\frac{dx^a}{ds}\frac{dx^b}{ds}=1$ و $\left\{{a \atop bc}\right\}$نماد کریستوفل نوع دوم[۱] است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\left\{{a \atop bc}\right\}=\frac{1}{2}g^{ad}\left(\partial_b g_{dc}+\partial_c g_{db}-\partial_d g_{bc}\right) \qquad (۱-۱۷)$$

اگر $\Gamma^a_{bc}=\left\{{a \atop bc}\right\}$ باشد ژئودزیک متریکی وآفینی بر یکدیگر منطبق هستند. در این حالت Γ لزوماً متقارن است و همبسته ی سازگار با متریک[۲] و یا همبسته ی لوی- چیویتای متریک[۳] نامیده می شود.

می توان نشان داد با چنین همبسته ای مشتق هموردای متریک برابر صفر است $\nabla_c g_{ab}=0$.

---

[۱] Christoffel symbol of second kind
[۲] Metric connection
[۳] Levi-civita

فصل ۲

مروری بر رهیافت متریکی (نسبیت عام)

قبل از اینکه به مطالعه روش متریک – آفینی بپردازیم مروری کوتاه بر روند بدست آوردن معادلات میدان با روش متریکی محض بطور جداگانه برای کنش خطی و کنش های غیر خطی بر حسب اسکالر انحنا (گرانش تعمیم یافته$f(R)$) خواهیم داشت تا تفاوت این دو روش وردشی و مزیت های روش متریک – آفینی را نشان دهیم .

۲-۱ نظریه ی متریکی محض

در نظریه ی گرانشی متریکی محض یا همان نسبیت عام فرض بر این است که تنها یک میدان مستقل روی منیفلد وجود دارد که همان متریک $g_{\mu\nu}$ است . بنابراین همبسته ی آفین، $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}$، نیز همبسته ی *لوی- چیویتای* متریک $g_{\mu\nu}$ خواهد بود. البته لازمه این فرض این است که مشتق هموردای متریک صفر باشد و همبسته را نیز از ابتدا متقارن فرض کنیم.

$$\left.\begin{aligned}\nabla_\lambda g_{\mu\nu} = 0\\ \\ \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \left\{{}^\lambda{}_{\mu\nu}\right\} \tag{۲-۱}$$

بنابراین می توان نشان داد همبسته آفین تابعی از مشتقات جزئی مرتبه اول متریک می باشد:

$$\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda}\left(\partial_\nu g_{\alpha\mu} + \partial_\mu g_{\alpha\nu} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}\right) \tag{۲-۲}$$

همچنین تانسور ریمان و تانسور ریچی بر حسب متریک بصورت زیر تعریف می شوند:

$$R^\alpha{}_{\mu\beta\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma}\left(\partial_\mu \partial_\beta g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma \partial_\beta g_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu g_{\sigma\beta} + \partial_\sigma \partial_\nu g_{\mu\beta}\right) \tag{۲-۳}$$

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \tag{۲-۴}$$

و اسکالر ریچی که با تنجش $R_{\mu\nu}$ در معکوس متریک بدست می آید:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{۲-۵}$$

۱-۱-۲ کنش اینشتین- هیلبرت

واضح است که تانسور ریمان، تانسور ریچی و اسکالر ریچی شامل متریک و مشتقات مرتبه دوم متریک هستند. برای ساختن کنشی که وردش گرفتن از آن به معادلات میدان مرتبه دو بیانجامد به اسکالری نیازمندیم که حداکثر به *متریک* $g_{\mu\nu}$ و *مشتقات مرتبه اول آن*، $g_{\mu\nu,\alpha}$ وابسته باشد. در واقع چنین اسکالری وجود ندارد و ساده ترین کمیت اسکالری که می توان ساخت همان اسکالر ریچی است که مشتقات مرتبه دو متریک را نیز در بر دارد. خواهیم دید که جملاتی که که شامل مشتقات مرتبه دو