بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه پیام نور مرکز مشهد
گروه آمار

پایان‌نامه

جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد آمار ریاضی

مفاهیمی از ترتیب‌های تصادفی در حالت گسسته

نگارش:
نرجس عاملی

استاد راهنما:
دکتر غلامرضا محتشمی برزادران

استاد مشاور:
دکتر باقر مقدس زاده

آبان ماه ۱۳۹۰

چکیده

در این پایان نامه پس از بیان مقدمات اولیه و معرفی ترتیب‌های تصادفی معمولی، ترتیب نرخ خطر، ترتیب نرخ خطر معکوس و ترتیب نسبت درستنمایی در فصل اول؛ در فصل دوم به بیان ویژگی‌ها و ارتباط هر یک از ترتیب‌ها با سایر ترتیب‌های تصادفی می‌پردازیم. در ادامه توزیع های وزنی را معرفی کرده و ترتیب‌های فوق را در این حالت مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در فصل سوم ترتیب‌های تصادفی را به حالت متناسب تعمیم داده و خواص و ویژگی‌های آن‌ها را بررسی می‌کنیم. در فصل آخر ترتیب نسبت درستنمایی را برای مقایسه توزیع‌های سری توانی و سری توانی تعمیم‌یافته به کار خواهیم برد.

پیشگفتار

یک ساده‌ترین و معمول‌ترین روش برای مقایسه‌ی دو متغیر تصادفی استفاده از میانگین‌ها و واریانس‌هاست. در بسیاری از حالت‌ها ممکن است میانه‌ی متغیر تصادفی X بزرگ‌تر از میانه‌ی متغیر تصادفی Y باشد در صورتی که میانگین X کوچک‌تر از میانگین Y است. مسئله مشابه زمانی اتفاق میافتد که هدف، مقایسه پراکندگی جامعه باشد. اگر متغیرهای X و Y برطبق یک ترتیب تصادفی مناسب مرتب شده باشند ناهماهنگی بالا به وجود نمی‌آید زیرا مقایسه بر اساس ترتیب‌های تصادفی بسیار مفیدتر از چند معیار عددی می‌باشد.
ترتیب‌های تصادفی و نامساویها در طول چهل سال اخیر رشد فزاینده‌ای در زمینه‌های گوناگون آمار و احتمال از قبیل قابلیت اعتماد، نظریه صف، اقتصاد، بیمه، آنالیز بقا و ... داشته است. ترتیب های تصادفی نسبت درستنمایی، نرخ خطر، نرخ خطر معکوس و معمولی از جمله مهمترین ترتیب‌های تصادفی معرفی شده است. در عمل گاهی امکان ثبت تمام داده‌های یک نمونه تصادفی از جامعه تحت بررسی مقدور نیست و نمونه تصادفی از یک توزیع وزنی می‌باشد. مفهوم توزیع‌های وزنی در بسیاری از پدیده‌های طبیعی کاربرد دارد. برخی از خواص ترتیب‌های ذکر شده را برای حالت‌های وزنی بدست خواهیم آورد.
ترتیب‌های تصادفی متناسب که اخیرا مورد توجه قرار گرفته‌اند به عنوان تعمیمی از ترتیب‌های تصادفی هستند که در این رساله ویژگی‌ها و ارتباط آنها با یکدیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
این پایان نامه، مشتمل بر چهار فصل می‌باشد.

- در فصل اول، تاریخچه، مقدمات و مفاهیم اولیه برای متغیرهای پیوسته و گسسته در مورد توابع قابلیت اعتماد، ترتیب‌های تصادفی قوی و توزیع‌های وزنی بیان می‌گردد.

- فصل دوم، ترتیب‌های معرفی شده در فصل قبل را مورد تجزیه تحلیل قرار داده و به شرح ویژگی‌های آنها پرداخته و در ادامه نیز خواص ترتیب‌های تصادفی را برای متغیرهای وزنی بیان خواهیم کرد.

- در فصل سوم، ترتیب‌های تصادفی متناسب را که توسط راموس—رومرو و سوردو—دیاز(۲۰۰۱) برای متغیرهای پیوسته ارائه شد، برای متغیرهای گسسته معرفی کرده و به بررسی خواص و ارتباط آنها با یکدیگر خواهیم پرداخت.

- در فصل چهارم، ترتیب‌های تصادفی نسبت درستنمایی و نسبت درستنمایی متناسب را برای خانواده توزیع‌های سری توانی معرفی کرده و سپس به مقایسه‌ی توزیع‌های سری توانی از نظر این دو ترتیب خواهیم پرداخت.

در ضمن قسمت‌هایی که با علامت ** نشان داده‌شده، کار جدید نگارنده می‌باشد.

نرجس عاملی

آبان ۱۳۹۰

نمادها و اصطلاحات

$\leq_{lr}$ *Likelihood Ratio order* ترتیب نسبت درستنمایی

$\leq_{lr\uparrow}$ *Up Shifted Likelihood Ratio order* ترتیب نسبت درستنمایی انتقال یافته‌ی بالا

$\leq_{lr\downarrow}$ *Down Shifted Likelihood Ratio order* ترتیب نسبت درستنمایی انتقال یافته‌ی پایین

$\leq_{lr-r}$ *(Unrestricted) Likelihood Ratio Order of degree*

ترتیب نسبت درستنمایی (بدون محدودیت) از درجه r

$\leq_{lr-r\uparrow}$ *Up Shifted Likelihood Ratio order of degree*

ترتیب نسبت درستنمایی انتقال یافته‌ی بالایی از درجه r

$\leq_{hr}$ *Hazard Rate order* ترتیب نرخ خطر

$\leq_{rh}$ *Reversed Hazard Rate order* ترتیب نرخ خطر معکوس

$\leq_{L}$ *Lorenz order* ترتیب لورنس

$\leq_{phr}$ *Proportional Hazard Rate order* ترتیب نرخ خطر متناسب

$\leq_{prh}$ *Proportional Reversed Hazard Rate order* ترتیب نرخ خطر معکوس متناسب

$\leq_{plr}$ *Proportional Likelihood Ratio order* ترتیب نسبت درستنمایی متناسب

$\leq_{st}$ *Stochastic order* ترتیب تصادفی

$\leq_{sp}$	*Stochastic Preceded order*	ترتیب تصادفی تقدم
$\leq_{\bar{F}(۱)}$		ترتیب تصادفی $\bar{F}(۱)$
Partial order		ترتیب جزئی
ILR	*Increasing Likelihood Ratio*	نسبت درستنمایی صعودی
DLR	*Decreasing Likelihood Ratio*	نسبت درستنمایی نزولی
$\sim_{hmlr}$	*Half Monotone Likelihood Ratio*	نسبت درستنمایی نیم یکنوا
IFR	*Increasing Failure Rate*	نرخ خطر صعودی
DFR	*Decreasing Failure Rate*	نرخ خطر نزولی
IRFR	*Increasing Reversed Failure Rate*	نرخ خطر معکوس صعودی
DRFR	*Decreasing Reversed Failure Rate*	نرخ خطر معکوس نزولی
IPLR	*Increasing Proportional Likelihood Ratio*	نسبت درستنمایی متناسب صعودی
DPLR	*Decreasing Proportional Likelihood Ratio*	نسبت درستنمایی متناسب نزولی
IPHR	*Increasing Proportional Hazard Rate*	نرخ خطر متناسب صعودی
DPHR	*Decreasing Proportional Hazard Rate*	نرخ خطر متناسب نزولی
IPRHR	*Increasing Proportional Reversed Hazard Rate*	نرخ خطر معکوس متناسب صعودی

$DPRHR$	$Decreasing\ Proportional\ Reversed\ Hazard\ Rate$	نرخ خطر معکوس متناسب نزولی
$H(x)$	$Cumulative\ hazard\ function$	تابع نرخ شکست تجمعی
X^w	$Weighted\ version\ of\ X$	متغیر تصادفی وزنی متناظر با X
PSD	$Power\ Series\ Distribution$	توزیع سری توانی
$GPSD$	$Generalized\ Power\ Series\ Distribution$	توزیع سری توانی تعمیم یافته
F^w	$Distribution\ function\ of\ X^w$	تابع توزیع X^w
p^w	$Density\ function\ of\ X^w$	تابع جرم احتمال X^w
$\bar{F}(.) = ۱ - F(.)$		تابع بقا
$a \wedge b$		مینیمم a و b
$\uparrow$		صعودی بودن
$X \stackrel{\mathrm{d}}{=} Y$		هم‌توزیعی X و Y
$b(n,p)$		تابع توزیع دوجمله‌ای
$b^-(n,p)$		تابع توزیع دوجمله‌ای منفی
$Poi(\theta)$		تابع توزیع پواسون
$LS(\theta)$		تابع توزیع سری لگاریتمی
$Ge(\theta)$		تابع توزیع هندسی

فهرست مندرجات

۱ مقدمات و مفاهیم اولیه ۱

۱—۱ مقدمه ۲

۱—۲ تابع قابلیت اعتماد ۳

۱—۲—۱ تابع نرخ خطر ۵

۱—۲—۲ تابع نرخ خطر معکوس ۷

۱—۳ خاصیت لگ—مقعر (محدب)بودن ۸

۱—۴ خاصیت نرخ خطر و نرخ خطرمعکوس صعودی (نزولی) ۱۲

۱—۵ ترتیب های تصادفی ۱۸

۱—۶ توزیع‌های وزنی ۲۳

۲ ترتیب‌های تصادفی و مشخصه‌هایی بر اساس آن در حالت گسسته ۲۷

۲—۱ مقدمه ۲۸

۲—۲ مقایسه توزیع‌های گسسته از نظر ترتیب تصادفی معمولی ۲۹

۲—۳ ویژگی‌هایی از ترتیب تصادفی نرخ خطر ۳۸

۲—۴ ویژگی‌هایی از ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس ۴۱

۲—۵ مشخصه‌هایی بر اساس ترتیب تصادفی نسبت درستنمایی ۴۳

۲—٦ کاربرد ترتیب‌های تصادفی در قابلیت اعتماد ۵۳

۲—۷ ترتیب‌های تصادفی در حالت وزنی ٦۵

۳ ترتیب‌های تصادفی در حالت متناسب ۷۰

۳—۱ مقدمه ۷۱

۳—۲ ** ترتیب نسبت درستنمایی متناسب ۷۲

۳—۲—۱ ترتیب نسبت درستنمایی متناسب در حالت پیوسته ۷٦

۳ــ۳ ** ترتیب نرخ خطر متناسب ۷۷

۳ــ۴ ** ترتیب نرخ خطر معکوس متناسب ۸۰

۴ ترتیب lr و plr در خانواده توزیع‌های سری توانی ۸۴

۴ــ۱ مقدمه ۸۵

۴ــ۲ خانواده توزیع‌های سری توانی ۸۶

۴ــ۳ ** ترتیب نسبت درستنمایی در خانواده توزیع‌های سری توانی ۸۸

۴ــ۳ــ۱ ** مثالها ۸۸

۴ــ۴ ** ترتیب نسبت درستنمایی متناسب در خانواده توزیع‌های سری توانی ۹۲

نتیجه گیری ۹۹

آینده تحقیق ۱۰۰

کتاب نامه ۱۰۱

فهرست جداول

۱–۱ ارتباط بین توابع $R(k), F(k), p(k), r(k)$ در توزیع های طول عمر گسسته ۸

۱–۲ **ارتباط بین توابع $R(t), F(t), f(t), h(t)$ در توزیع های طول عمرپیوسته ۸**

۱–۳ **برخی از توزیع های گسسته‌ی دارای خاصیت لگ–مقعر و لگ–محدب ۱۱**

۲–۱ **مقادیر θ_{sp} برای مثال (۲.۲) ۶۱**

۲–۲ **مقادیر θ_{sp} برای $(n_۱, n_۲.n_۳, n_۴)$ در مثال (۲.۲) ۶۱**

۴–۱ ** **مقایسه خانواده توزیع‌های سری توانی از نظر ترتیب نسبت درستنمایی ۹۱**

۴–۲ ** **مقایسه خانواده توزیع‌های سری توانی از نظر ترتیب نسبت درستنمایی متناسب ۹۸**

فهرست اشکال

۲–۱ نمودار میانگین‌ها برای احتمالات $(۰.۱, ۰.۴)$ ۶۳

۲–۲ مقایسه ترتیب تصادفی معمولی برای متغیرهای X و $Y = Bin(۲, ۰.۲۵)$ ۶۴

۲–۳ مقایسه ترتیب‌های تصادفی گوناگون برای متغیرهای X و $Y = Bin(۲, ۰.۲۵)$ ۶۵

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه

۱—۲ توابع قابلیت اعتماد

۱—۳ خاصیت لگ مقعر و لگ محدب

۱—۴ معرفی ترتیب های تصادفی

۱—۵ توزیع های وزنی

۱—۱ مقدمه

روشهای ممکن بسیاری برای مقایسه متغیرهای تصادفی و یا توزیع آنها با یکدیگر وجود دارد. ساده‌ترین شیوه برای مقایسه دو توزیع، از طریق مقایسه کردن میانگین آنها حاصل می‌شود. اما این مقایسه تنها بر پایه دو عدد می‌باشد که اغلب نمی‌تواند حاوی اطلاعات زیادی باشد. حتی ممکن است که میانگین‌ها وجود نداشته باشند یا دو توزیع دارای میانگین یکسان باشند که در این صورت به مقایسه‌ی انحراف استاندارد آنها می‌پردازیم. اما این قیاس نیز بر پایه دو عدد است و لذا چندان جامع نیست، حتی ممکن است انحراف استاندارد نیز وجود نداشته باشد. بنابراین به دنبال معیاری هستیم که حاوی اطلاعات بیشتری باشند.

در بسیاری از حالت‌ها مقایسه‌ی مشخصات تابعی از توزیع‌های احتمال تحت مطالعه مانند توابع توزیع، توابع نرخ خطر، توابع نرخ خطر معکوس و توابع مناسب دیگر بسیار مفیدتر از مقایسه بر اساس چند معیار عددی از توزیع‌هاست. مقایسه‌ی متغیرهای تصادفی با استفاده از توابع یاد شده در بالا معمولا ترتیبی جزئی میان توزیع‌های احتمال به وجود می‌آورد که این مقایسه‌ها را ترتیب تصادفی می‌نامیم.

ترتیب‌های تصادفی و نامساوی‌ها، در طی چهل سال اخیر بسیار مورد توجه و استفاده قرار گرفته‌اند و در برخی از زمینه‌های آمار و احتمال از قبیل نظریه قابلیت اعتماد، اقتصاد، بیمه، فرایندهای تصادفی به ویژه فرایند پواسون کاربرد دارند. محققین بسیاری در این زمینه کار کرده‌اند که از جمله می‌توان به ایسها و سودهیش[۱] (۲۰۰۹) شیکد و شانتیکومار[۲](۲۰۰۷)، دنوت[۳](۲۰۰۱)، ناندا[۴] و شیکد(۲۰۰۰) اشاره کرد.

در این فصل، سعی بر آن داریم تا مفاهیم و نمادهایی را که در این پایان‌نامه با آن‌ها روبرو می‌شویم، به طور مختصر برای متغیرهای تصادفی گسسته توضیح دهیم. بنابراین به معرفی توابع

---

[۱] Isha and Sudheesh

[۲] Shaked and Shanthikumar

[۳] Denuit

[۴] Nanda

قابلیت اعتماد، خاصیت لگ—مقعر (محدب) بودن، برخی از رده‌های طول عمر، توزیع‌های وزنی و ترتیب‌های تصادفی می‌پردازیم.

۱—۲ تابع قابلیت اعتماد

قابلیت اعتماد[۵] به مفهوم توانایی انجام یک عمل در سیستم تحت شرایط محیطی مشخص و در دوره زمانی معین می باشد. تحلیل بقا (قابلیت اعتماد) از نظر علم آمار، استفاده از فنون مختلف آماری در تحلیل متغیرهای تصادفی نامنفی می‌باشد. نظریه‌ی قابلیت اعتماداساساً در مورد متغیرهای تصادفی طول عمر مطلقاً پیوسته (مشتق پذیر و پیوسته) بحث می‌کند اما گاهی اوقات به موقعیت‌هایی بر می‌خوریم که طول عمر حاصل را می توان بر اساس متغیرهای تصادفی نامنفی صحیح بیان کرد.
برای مثال:

۱) تعداد تصادفات جاده‌ای در یک شهر در یک ماه معین.

۲) قطعه‌ای از یک سیستم که به طور چرخشی کار می‌کند و تعداد چرخش‌های کامل آن قطعه تا پیش از شکست سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهیم. مانند؛ تعداد فتوکپی گرفته شده تا قبل از خرابی دستگاه.

۳) هنگامی که داده‌های طول عمر پیوسته گروه‌بندی می‌شوند.

در حالت کلی توزیع‌های طول عمر گسسته هنگامی که زمان، یک مقیاس مناسب برای توصیف طول عمر قطعه مورد نظر نباشد، در نظریه‌ی قابلیت اعتماد وارد می‌شوند. مثلاً برای قابلیت یک اسلحه تعداد شلیک‌های انجام شده تا خراب شدن آن مهمتر از سن اسلحه در زمان خراب شدن آن می‌باشد. بنابراین مشابه حالت پیوسته، به ابزاری جهت توسعه و مطالعه‌ی داده های شکست نیاز داریم. در این

[۵] Reliability

راستا می‌توان به رُی و گوپتا [۶] (۱۹۹۲)، شیکد[۷] و همکاران (۱۹۹۵)، گوپتا[۸] و همکاران (۱۹۹۷)، سلویا و بولینگر [۹] (۱۹۸۲)، براکموند [۱۰] و همکاران(۲۰۰۱)، کمپ [۱۱] (۲۰۰۴) و لای و ایکسای [۱۲] (۲۰۰۶) اشاره کرد.

فرض کنید X یک متغیر تصادفی طول عمر گسسته با تکیه گاه $N = ۱, ۲, ...$ یا زیر مجموعه‌ای از آن تعریف شده باشد، تابع جرم احتمال $p(x) = P(X = x)$، احتمال خرابی سیستم در زمان x می‌باشد و تابع توزیع احتمال X عبارت است از احتمال اینکه مولفه مورد نظر حداکثر تا زمان مشخصی عمر کند. تابع قابلیت اعتماد در متغیرهای طول عمر گسسته، احتمال این پیشامد را که مولفه مورد نظر حداقل تا زمان x عمر کند، نشان می‌دهد. تابع قابلیت اعتماد و تابع توزیع X را به ترتیب به صورت زیر نمایش می دهیم:

$$R(x) = P(X \geq x) = \sum_{j=x}^{\infty} p(j) \quad , \quad F(x) = P(X \leq x) = ۱ - R(x).$$

فرض کنید متغیر تصادفی پیوسته X طول عمر یک سیستم باشد در این صورت توابع توزیع و قابلیت اعتماد را تعریف می‌کنیم:

$$R(x) = ۱ - F(x) = \int_{x}^{\infty} f(t)d(t) \quad , \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{۰}^{x} f(t)d(t).$$

در واقع $R(x)$ بیانگر احتمال این است که قطعه‌ای در بازه زمانی $[۰, x)$ خراب نشود.

---

[۶] Roy and Gupta

[۷] Shaked

[۸] Gupta

[۹] Salvia and Bollinger

[۱۰] Bracquemond

[۱۱] Kemp

[۱۲] Lai and Xie

۱–۲–۱ تابع نرخ خطر

تابع نرخ خطر[۱۳] در متغیرهای طول عمر گسسته، احتمال شرطی وقوع خرابی یک مولفه در زمان x به شرط آن که مولفه در زمان $x - ۱$ در حال کار کردن باشد را نشان می‌دهد.
تابع نرخ خطر در حالت گسسته، کمیتی نامنفی و همواره کمتر از یک می‌باشد و برای اولین بار توسط بارلو[۱۴] و همکاران (۱۹۶۳) به صورت زیر معرفی شد.

$$\forall x \in N; \quad r(x) = P(X = x / X \geq x) = \frac{P(X = x)}{P(X \geq x)} = \frac{p(x)}{R(x)}, \qquad (۱–۱)$$

بنابراین؛

$$r(x) = \frac{R(x) - R(x + ۱)}{R(x)} = ۱ - \frac{R(x + ۱)}{R(x)}.$$

تعریف ۱.۱ فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع احتمال F و تابع چگالی احتمال f باشد، تابع نرخ شکست متغیر تصادفی X را با $r(x)$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{aligned} r(t) &= lim_{\Delta t \longrightarrow ۰} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t | X > t)}{\Delta t} \\ &= lim_{\Delta t \longrightarrow ۰} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t)}{\Delta t P(X > t)} \\ &= \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, \end{aligned}$$

که در آن $\bar{F}(t) = ۱ - F(t)$ به تابع بقا متغیرتصادفی X معروف است.

[۱۳] Hazard rate function
[۱۴] Barlow

حال این سؤال مطرح می‌شود که **آیا نرخ خطر در حالت گسسته با نرخ خطر در حالت طول عمر پیوسته یکسان است؟**

چند مورد از این تفاوت‌هاکه در براکموند و همکاران(۲۰۰۱) آمده‌است، به صورت زیر می‌باشد:

۱) نرخ خطر در حالت گسسته بنا به رابطه (۱−۱)، یک احتمال شرطی است اما در حالت پیوسته این چنین نیست.

۲) نرخ خطر در حالت گسسته کراندار است $(۰ \leq r(x) \leq ۱)$ در حالی که در حالت پیوسته ممکن است کراندار نباشد و حتی اکثر توزیع های طول عمر پیوسته دارای نرخ خطر بی‌کران می‌باشند.

۳) نرخ خطر طول عمر گسسته بر خلاف نرخ خطر در طول عمر پیوسته، دارای خاصیت جمع‌پذیری در سیستم‌های سری نمی‌باشد. فرض کنید یک سیستم شامل n مولفه که به صورت سری هستند تشکیل شده باشد و r_i و R_i به ترتیب نرخ خطر و تابع قابلیت اعتماد مولفه‌ی iام باشد. بنابراین قابلیت اعتماد سیستم به صورت، $R(k) = \prod_{i=۱}^{n} R_i(k)$ می‌باشد.
تابع نرخ خطر سیستم (گسسته) بر اساس تعریف اولیه نرخ خطر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
r(x) &= \frac{R(x-۱)-R(x)}{R(x-۱)} \\
&= ۱ - \frac{R(x)}{R(x-۱)} \\
&= ۱ - \frac{\prod_{i=۱}^{n} R_i(x)}{\prod_{i=۱}^{n} R_i(x-۱)} \\
&= ۱ - \prod_{i=۱}^{n} \frac{R_i(x)}{R_i(x-۱)} \\
&= ۱ - \prod_{i=۱}^{n} [۱ - r_i(x)] \\
&\neq \sum_{i=۱}^{n} r_i(x).
\end{aligned}
$$

بنابراین نرخ خطر یک سیستم در حالت گسسته برابر مجموع نرخ خطر مولفه‌های آن نیست.

۴) مهمترین تفاوت بین توابع نرخ خطر متغیرهای طول عمر گسسته و پیوسته، تابع نرخ شکست تجمعی[۱۵] است که با نماد $H(x)$ نشان می‌دهیم. در حالت پیوسته داریم:

$$H(x) = \int_{\circ}^{x} r(t)dt = \int_{\circ}^{x} \frac{f(t)}{R(t)}dt = -\ln R(x).$$

در حالی که برای متغیر طول عمر گسسته، عبارت $-\ln R(x)$ برابر $H(x) = \sum_{i=1}^{x} r(i)$ نیست.

۱–۲–۲ تابع نرخ خطر معکوس

تابع نرخ خطر معکوس[۱۶] در متغیرهای طول عمر گسسته، احتمال شرطی وقوع خرابی یک مولفه در دفعه‌ی xام وقتی بدانیم که قبل از دفعه‌ی $(x+1)$ام خراب شده‌است. در بیمه و علوم قضایی به منظور پیدا کردن زمان حقیقی شکست از نرخ خطر معکوس استفاده می‌شود و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q(x) = P(X = x / X \leq x) = \frac{F(x) - F(x-1)}{F(x)}.$$

تعریف ۲.۱ فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع احتمال F و تابع چگالی احتمال f باشد، در اینصورت تابع نرخ شکست معکوس متغیر تصادفی X را با $q(x)$ نشان داده می‌شود. بنابراین،

$$\begin{aligned} q(t) &= lim_{\Delta t \longrightarrow \circ} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t | X < t)}{\Delta t} \\ &= lim_{\Delta t \longrightarrow \circ} \frac{P(t \leq X < t + \Delta t)}{\Delta t P(X < t)} \\ &= \frac{f(t)}{F(t)} \end{aligned}$$

[۱۵] Cumulative hazard function

[۱۶] Reversed hazard rate function