دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

دانشکده علوم پایه

حل عددی معادلات انتگرال دیفرانسیل ولترای غیرخطی و از مرتبه کسری با استفاده از موجک چبیشف نوع دوم

نگارش

نادر هداوند

استاد راهنما :دکتر حمید مسگرانی

استاد مشاور :دکتر محسن شاهرضایی

پایان نامه برای دریافت کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی کاربردی

مهر ماه ۹۳

چکیده

حساب کسری، تعمیم مشتق وانتگرال از مرتبه غیر صحیح است که بطور گسترده در مسائل مهندسی و مدل های علمی مورد استفاده قرار گرفته است. در این پژوهش ما به توصیف مشتق از مرتبه کسری در حالت کاپوتو ، به منظور ارائه ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه کسری موجک های چبیشف نوع دوم(SCW) پرداخته ایم و سپس با استفاده از روشی که بر اساس ماتریس عملیاتی موجک چبیشف نوع دوم است به حل عددی معادلات انتگرال – دیفرانسیل غیر خطی و از مرتبه کسری ولترا پرداخته ایم .

هدف اصلی این پژوهش این بوده که معادله انتگرال – دیفرانسیل را به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل کند تا به سادگی حل گردند و نتایج عددی بدست آمده نشان می دهد که روش عددی انتخاب شده دقت لازم برای این منظور را داراست.

کلمات کلیدی

حساب کسری ، (SCW) ، معادلات انتگرال – دیفرانسیل ولترا ، ماتریس های عملیاتی ، توابع بلاک– پالس

فهرست مطالب

چکیده .... الف

فهرست مطالب .... ب

لیست جداول .... ج

لیست تصاویر .... ح

۱ تعاریف ومقدمات

۱,۱ معادلات انتگرال – دیفرانسیل ۲

۱,۱,۱ مقدمه وتاریخچه ۲

۱,۱,۲ تعریف معادله انتگرال ۵

۱,۱,۳ انواع معادلات انتگرال ۵

۲,۱ مروری بر آنالیز تابعی و تاریف مقدماتی ۷

۱,۲,۱ نرم ها ۷

۱,۲,۲ فضای برداری ۸

۱,۲,۳ فضای L_p ۸

۱,۲,٤ ضرب داخلی ۹

۱,۲,٥ فضای هیلبرت ۱۰

۱,۲,٦ تعامد ۱۰

۱,۲,۷ پایه فضای برداری ۱۱

۱,۲,۸ فضای C_μ^m ۱۲

۱,۲,۹ محمل تابع ۱۲

۱,۲,۱۰ عملگر های انتقال و اتساع یک تابع ۱۲

۲ معرفی موجک ها و توابع بلاک – پالس($BPFs$)

۱,۲ موجک ۱٤

۱,۱,۲ مقدمه وتاریخچه ۱٤

۲,۱,۲ معرفی پایه های موجک ۱۵

۳,۱,۲ آنالیز تجزیه چند گانه (MRA) ۱٦

٤,۱,۲ موجک ها ۲۰

۵,۱,۲ رابطه دو مقیاسی ۲۲

٦,۱,۵ تقریب وپایداری پایه موجکی متعامد یکه ۲۸

۷,۱,۲ خواص مطلوب موجک ها ۲۸

۲,۲ موجک چبیشف نوع دوم (SCW) ۳۰

۱,۲,۲ چند جمله ای های چبیشف نوع اول ۳۰

۲,۲,۲ چند جمله ای های چبیشف نوع دوم ۳۱

۳,۲,۲ موجک چبیشف نوع دوم ۳۲

٤,۲,۲ همگرایی در پایه های موجک چبیشف نوع دوم ۳٦

۳,۲ توابع بلاک – پالس(BPFs) ۳۸

۱,۳,۲ مقدمه ۳۸

۲,۳,۲ تعریف توابع بلاک – پالس ۳۸

۳,۳,۲ ویژگی های توابع بلاک – پالس ٤۰

۳ دیفرانسیل وانتگرال از مرتبه کسری

۱,۳ مقدمه ٤٤

۲,۳ تابع گاما ۴۵

۱,۲,۳ تعریف تابع گاما ۴۵

۲,۲,۳ فاکتوریل مقادیر کسری ۴۶

۳,۳ انتگرال گیری از مرتبه کسری ۴۶

۱,۳,۳ تعریف عملگر انتگرال ۴۶

۲,۳,۳ انتگرال از مرتبه طبیعی ۴۷

۳,۳,۳ انتگرال از مرتبه کسری ۴۷

۴,۳ مشتق از مرتبه کسری ۴۸

۱,۴,۳ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل ۴۸

۲,۴,۳ عملگر مشتق ۴۹

۳,۴,۳ مشتق مرتبه کسری ۴۹

۴,۴,۳ مشتق در حالت کاپتو ۵۰

۴ حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل ولتری غیر خطی واز مرتبه کسری با استفاده ازموجک چبیشف نوع دوم

۱,۴ بیان مسئله ۵۳

۲,۴ ماتریس عملیاتی توابع بلاک- پالس برای محاسبه انتگرال ۵۴

۳,۴ ماتریس عملیاتی موجک چبیشف نوع دوم ۵۷

۴,۴ ماتریس عملیاتی انتگرال از مرتبه کسری موجک چبیشف نوع دوم ۵۹

۵,۴ تشکیل دستگاه معادلات غیر خطی بوسیله ماتریس های عملیاتی ۶۱

۶,۴ تجزیه وتحلیل خطا ۶۷

۱,۶,۴ تابع خطای روش ۶۷

۲٫٦٫٤ تقریبی از خطای مطلق ٦٨

۵ مثال ها و نتایج عددی

۱٫۵ مثال های عددی ٧٠

۲٫۵ نتیجه گیری ٧٦

کتاب نامه ٧٧

لیست جداول

۱٫۵ مقایسه بین جواب واقعی و جواب در نقاط مختلف ٧٤

۲٫۵ محاسبه نرم –۲ خطای مطلق ٧٤

لیست تصاویر

۱,۲ زیر فضا های $L_2(\mathbb{R})$ ۲۱

۲,۲ تابع مقیاس موجک هار ۲٤

۳,۲ تابع تظزیف موجک مادر ۲٤

٤,۲ اولین نسل از دختران ۲٤

٥,۲ تابع مقیاس موجک کلاه ۲٥

٦,۲ موجک کلاه ۲٥

۷,۲ نمودار تقریب تابع $f(x) = x^2$ ۲۷

۸,۲ تقریب تابع $f(x) = x^2$ ۲۷

۹,۲ موجک چبیشف $\psi_{10}(x)$ ۳۳

۱۰,۲ موجک چبیشف $\psi_{11}(x)$ ۳٤

۱۱,۲ موجک چبیشف $\psi_{12}(x)$ ۳٤

۱۲,۲ توابع بلاک- پالس به ازای $m = 5$ ۳۹

۱۳,۲ تقریب تابع $f(x) = x^2$ به کمک توابع بلاک-پالس ٤۲

۱,٥ جواب واقعی $y(x) = x^2 - x$ و تقریب آن ۷٥

فصل اول

تعاریف و **مقدمات**

۱-۱ معادلات انتگرال- دیفرانسیل

۱-۱-۱ مقدمه و تاریخچه

نظریه معادلات انتگرال یکی از مهمترین شاخه های علم ریاضی است . اصولاً اهمیت آن از لحاظ مسائل مقدارمرزی در تئوری معادلات با مشتقات جزیی است . معادلات انتگرال درعلوم فیزیک ،شیمی ،ریاضیات ،علوم فنی و....کاربردهای فراوانی دارد . به طور مثال می توان به معادلات پیچیده گرماوموج اشاره کرد که ازجمله معادلات انتگرال در علم فیزیک می باشند . معادلات انتگرال برای سالهای زیادی است که درریاضی ظاهرشده اند زیرا مبدا آن به تئوری انتگرال فوریه برمی گردد .

اولین بار اصطلاح معادله ی انتگرال به وسیله ریموند[۱] پیشنهاد شد .لاپلاس[۲] در سال ۱۷۸۲ یک معادله انتگرال برای تابع f به صورت زیر ارائه داد:

$$F(x) = \int_{0}^{\infty} e^{-xt} f(t)dt$$

فوریه[۳] در سال ۱۸۱۱ روی نظریه حرارت کار کرد و مقالاتی از خود بر جای گذاشت. آبل[٤] نیز در سال ۱۸۲۳در مسئله ی خود که به مسئله ی مکانیکی آبل معروف است کاربرد معادلات انتگرال را مطرح کرد .در سال ۱۸۲٦ پواسن[٥] در نظریه مغناطیس خود،نوعی معادله انتگرال را مطرح کرد .لیوویل به طور مستقل معادلات انتگرال خاصی را از سال ۱۸۳۲ به بعد حل کرد .پوانکاره در سال ۱۸۹٦ معادله انتگرالی را بدست آورد که متناظر با یک معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی و مربوط به حرکت موج بودوبه صورت زیر بود:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t)u(t)dt$$

که البته فردهلم جهت بدست آوردن جواب های این معادله تحقیقات زیادی انجام داد .به هر حال ولترا اولین کسی بود که در اواخر قرن ۱۹ نظریه عمومی معادلات انتگرال را ارائه داد . ارائه یک سمینار توسط هولمگر در سال ۱۹۰۱ بر روی کارهای فردهلم علاقه هیلبرت[٦] را برانگیخت و او

[۱]- Raymond
[۲]- Laplace
[۳]- February
[٤]- Abel
[٥]- Poisson
[٦]- Hilbert

در بسیاری از مسایل ریاضی فیزیک از معادلات انتگرال کمک گرفت وفرموله کردن مساله ی معادلات دیفرانسیل مقدار مرزی به صورت معادله انتگرال از کارهای مهم وی بوده است.

واز آن زمان به بعد تاعصرحاضرمعادلات انتگرال موضوع تحقیقات ریاضیدانان زیادی بوده است ،زیرا آنها به طور پیوسته به مسایل جدید وجالبی برخورد می کنند . قضایای فردهلم[۱] ازقضایای بنیادی معادلات انتگرال هستند . از آنجا که این قضایاابتدا توسط فردهلم برای هسته های پیوسته ارائه شدندلیکن بعداً توسط افراد دیگری برای هسته های کلی تری تعمیم یافتند . لذا لازم است از کار کارلمن که در این راه نقش عمده ای داشته است یادنمود .

کاربرد معادلات انتگرال- دیفرانیسل به طور دایم در حال افزایش است مانند معادله فیشر در زیست شناسی یا معادلات انتگرال دیفرانسیلی که برای درونیابی معادلات گرما وموج کاربرد دارند.

برای حل معادلات انتگرال دیفرانسیل نیز روش های مختلفی وجود داردکه ازجمله می توان به روش های عددی ذکر نمود که در این پژوهش از روش عددی مبتنی بر توابع موجک وماتریس های عملیاتی آنها استفاده شده است.

روشهای طیفی خانواده ای بزرگ از روشهای حل معادلات عملگری می باشند که در دو دهه اخیر به طور وسیعی گسترش یافته اند . این روشها در حل مسائلی از علوم و مهندسی بسیار کارا و موثرند و قدمتی به اندازه درونیابی و بسط توابع دارند اولین الگوریتم روشهای طیفی درسال ۱۹۸۳ ارائه شد.

در روشهای طیفی عملگرهای توصیف کننده سیستم را با استفاده از پایه های سیستم نظیرسری فوریه وانواع چندجمله ایهای متعامد و غیر متعامد و توابع قطعه ای پیوسته و همچنین ماتریسهای عملیاتی مناسب مربوط به پایه ها ، تبدیل به یک دستگاه معادله جبری خطی یا غیر خطی می کنند سپس با روشهای مناسب به حل دستگاه معادلات مربوطه می پردازند .

پایه هایی که برای روشهای طیفی به کار می روند را می توان به دو گروه پایه ای متعامد و غیر متعامد تقسیم کرد .

گروه پایه های متعامد رانیزمی توان به سه دسته : چند جمله ایهای متعامد ، توابع مثلثی و توابع قطعه ای پیوسته (بلاک – پالس ، هار ، والش و پایه های ترکیبی و ...) تقسیم بندی کرد .

[۱]- fredholm

دراین تحقیق از توابع پایه ای مختلفی استفاده شده است که از جمله آنها پایه های متعامد وموجکها می باشند. استفاده ازتوابع پایه ای قطعه ای بامعرفی توابع هار در سال ۱۹۱۰ شروع شد . ازجمله توابع پایه ای قطعه ای می توانیم توابع والش نام برد . وازمیان تمام توابع پایه ای قطعه ای توابع بلاک – پالس به عنوان اساسی ترین و کارا ترین این نوع توابع است که برای تجزیه و تحلیل سیستم های کنترلی و کاربرد آنها به کاررفته است .

۱-۱-۲ تعریف معادله انتگرال

معادله انتگرال معادله ای است که درآن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شود.

مثال : معادله زیر یک نمونه از معادله انتگرال است که که در آن $u(x)$ تابع مجهولی است که باید معلوم گردد:

$$u(x) - \lambda \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} k(x,t)u(t)dt = f(x)$$

λ پارامتر مخالف صفرودر حالت کلی $\lambda \in C$ و $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال و $\alpha(x), \beta(x)$ حدود انتگرال گیری هسند و تابع $f(x)$ را تابع سمت راست می نامند.

۱-۱-۳ انواع معادلات انتگرال

الف) معادلات انتگرال خطی

یک معادله انتگرال را خطی گویند در صورتی که تابع مجهول $u(x)$ زیر علامت انتگرال خطی باشد . یعنی تابع مجهول در زیر علامت انتگرال به صورت توان یک ظاهرمی شود .

ب) معادله انتگرال غیر خطی

اگر تابع $u(x)$ در زیر علامت انتگرال با توابع غیر خطی نظیر $e^{u(x)}$, $\cos(u(x))$ وغیره تعویض شود آنگاه معادله انتگرال را غیر خطی می گوییم .

مثال : در زیر نمونه ای از معادلات انتگرال غیر خطی آورده شده است :

$$u(x) - \lambda \int_{\beta(x)}^{\alpha(x)} k(x,t)[u(x)]^{۴} dt = f(x)$$

ج) معادله انتگرال–دیفرانسیل

معادله ای است که در آن تابع مجهول زیر علامت انتگرال ظاهر شده و شامل مشتقات تابع مجهول نیز باشد.

مثال : در زیر یک نمونه از معادله انتگرال–دیفرانسیل غیر خطی آورده شده است:

$$D^{۲}[u(x)] - \lambda \int_a^b k(x,t)[u(x)]^{۴} dt = f(x)$$

د) معادلات انتگرال فردهلم

معادلات انتگرالی هستند که در آن حدود انتگرال ثابت هستند.

ه) معادلات انتگرال ولترا[1]

معادلات انتگرالی هستند که در آن حدود انتگرال متغیر هستند.

مثال: در زیر نمونه ای از معادلات انتگرال-دیفرانسیل غیر خطی ولترا آورده شده است.

$$D^{2}[u(x)] - \lambda \int_{0}^{x} k(x,t)[u(x)]^{4} dt = f(x)$$

و) معادلات انتگرال نوع اول

اگر در یک معادله انتگرال تابع مجهول فقط زیر علامت انتگرال ظاهر شود آنرا معادله انتگرال نوع اول می گویند.

ی) معادله انتگرال نوع دوم

در این نوع از معادلات انتگرال تابع مجهول هم زیر علامت انتگرال وهم خارج آن ظاهر می شود.

مثال :معادله زیر یک معادله انتگرال غیر خطی فردهلم واز نوع اول است:

$$u(x) - \lambda \int_{0}^{1} k(x,t)[u(x)]^{4} dt = f(x)$$

ع) معادلات انتگرال منفرد[2]

یک معادله انتگرال را منفردگویند اگر انتگرال گیری ناسره باشد.این معمولاً زمانی رخ می دهد که فاصله انتگرالگیری نامتناهی باشد یا اینکه هسته معادله در یک یا تعدادبیشتری نقطه از حوزه انتگرالگیری موردنظر بی کران باشد .

---

[1] - voltra
[2] - single

۱-۲ مروری بر آنالیز تابعی وتعاریف مقدماتی

۱-۲-۱ نرمها

هنگامی که روشهای تقریبی را تحلیل می کنیم نیازمندیم که جوابهای مختلف را با هم مقایسه کنیم یا اینکه اختلاف روشهای گوناگون را اندازه بگیریم . در یک فضای برداری باید بتوانیم فاصله بین دو نقطه را مشخص کنیم . بنابراین می خواهیم تصور فاصله وطول بردار را تعمیم بخشیم . لذانرم تعمیم فوق را مهیا می کند .

تعریف :

به هر عضو x از فضای برداری X یک عدد حقیقی نامنفی نسبت می دهیم وآنرا نرم x می نا میم وبا نماد $\|x\|$ نشان میدهیم به طوریکه :

الف) به ازای هر $x\in X$ داشته باشیم $\|x\| \geq ۰$

ب) $\|x\| = ۰$ است اگر وفقط اگر $x = ۰$ باشد .

ج) به ازای هر $x\in X$ و $a\in F$ داشته باشیم $\|ax\| = |a|.\|x\|$ که در آن F میدانی است که X روی آن تعریف می شود .

د) برای هر دو عضو x,y از X نامساوی زیر برقرارباشد :

$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ که به این نامساوی نامساوی مثلثی گویند .

بنابراین X رایک فضای برداری نرم دار می نامیم . عدد نامنفی $\|x - y\|$ را فاصله بین دونقطه x,y می نامیم .

مثال: در R^n نرم بردار $X = (x_۱, x_۲, \dots, x_n)^T$ را بصورت $\|x\| = (\sum_{i=۱}^{n} x_i{}^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ تعریف می کنیم . این نرم بخصوص را نرم اقلیدسی می نامیم .

۱-۲-۲ فضای برداری

یک فضای برداری روی میدانی مانند F مجموعه ای است غیر خالی مانند X بادو عمل جمع وضرب اسکالر ،همراه با یک میدان اسکالر F .اعضای x,y از این فضا را بردار می نامیم واعضای میدان F را اسکالر می نامند.بطوریکه $(X,+)$ تشکیل یک گروه آبلی دهد و همچنین به ازای هر اسکالر $\alpha \in F$ وβ وبه ازای هر بردار $x,y \in X$ داشته باشیم:

الف) $\alpha x \in X$

ب) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

ج) $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$

د) $\alpha(x+y) = \alpha x + \beta y$

ه) $1.x = x$

۱-۲-۳ فضای[۱] L_p

تعریف:

فرض کنیم $0 < p < \infty$ در این صورت تمام توابع انتگرال پذیر مانند f که $|f|^p$ انتگرال پذیر باشد یعنی $\int_X |f|^p d\mu < \infty$ باشد را فضای $L_P(X)$ می نامیم .فضای $L_P(X)$ یک فضای برداری است ونرم آنرا بصورت زیر تعریف می کنیم:

فرض کنیم $P \geq 1$ باشد در این صورت به ازای هر تابع مانند f داریم

$$\|f\|_P = \{\int |f|^p d\mu\}^{\frac{1}{p}} \qquad (1-1)$$

---

۱ - space

مثال : $f \in L^{۲}[a,b]$ اگر $\int_a^b |f(t)|^{۲} dt < \infty$ باشد .

تعریف :

اگر $K(s,t)$ هسته یک معادله انتگرال باشد در این صورت می گوییم $K \in L_{۲}[a,b]$ هر گاه:

الف) (۱ − ۲) $\forall s,t \in [a,b]\ ,\ \int_a^b\int_a^b |K(s,t)|^{۲}\, dt\, ds < \infty$

ب) (۱ − ۳) $\forall s \in [a,b]\ ,\ \int_a^b |K(s,t)|^{۲}\, dt < \infty$

ج) (۱ − ٤) $\forall t \in [a,b]\ ,\ \int_a^b |K(s,t)|^{۲}\, ds < \infty$

۱-۲-٤ ضرب داخلی

فرض کنیم X یک فضای برداری حقیقی باشد . به هردوعضو x,y از فضای X یک عدد حقیقی نسبت می دهیم که آنرا ضرب داخلی x,y می نامیم وبا نماد (x,y) نشان می دهیم . بطوریکه:

الف) برای هر $x \in X$ داریم : $(x,x) \geq ۰$ واگر $(x,x) = ۰$ آنگاه $x = ۰$

ب) $(x,y) = (y,x)$

ج) $(\alpha x,y) = \alpha(x,y)$

د) $(x,z) + (y,z) = (x+y,z)$

دریک فضای ضرب داخلی نرم فضا بصورت زیر تعریف می شود:

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱-۲-۵ فضای هیلبرت[1]

فضای هیلبرت فضای نرم دار کاملی است که نرم آن به وسیله یک ضرب داخلی[2] تعریف شده باشد.در ضمن فضای نرم دار کامل فضایی است که در آن هر دنباله کوشی همگرا باشد.

مثال :

$\mathbb{R}^n$ یک فضای هیلبرت با بعد متناهی است که ضرب داخلی آن چنین تعریف می شود:

$$(x,y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

در نتیجه:

$$\|x\| = (x,x)^{\frac{1}{2}} = (\sum_{i=1}^{n} {x^2}_i)^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۱-۲-٤

فضای $L_2[a,b]$ که پژوهش ما در این فضا می باشد یک فضای هیلبرت است که نرم آن چنین تعریف می شود:

$$\|f\| = \left\{\int_a^b (f(t))^2 dt\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad (۵-۲)$$

ضرب داخلی این فضای هیلبرت به صورت مقابل است:

$$(f,g) = \int_a^b f(t).g(t)dt \qquad (٦-۲)$$

۱-۲-٦ تعامد

تعریف:

اگر x,y دو عضو از فضای ضری داخلی X باشند این دو عضو را متعامد می گوییم هر گاه :
$(x,y) = 0$

به طور مثال در فضای $L_2[a,b]$ دو تابع f,g متعامدند هر گاه بتوانیم بنویسیم

$$(f,g) = 0 \quad \text{لذا} \quad \int_a^b f(t).g(t)dt = 0$$

---

[1] Hilbert space -

[2] Product inner -

تعریف:

مجموعه توابع $\{f_k(x)\}$ نسبت به تابع وزن $w(x)$ روی بازه $[a,b]$ متعامد هستند هرگاه داشته باشیم:

$$\int_a^b w(x) f_i(x)\, f_j(x) = \begin{cases} \cdot & i \neq j \\ a_i & i = j \end{cases}$$

واگر به ازای هر i داشته باشیم $a_i = ۱$ آنگاه مجموعه $\{f_k(x)\}$ را متعامد یکه می نامیم.

تعریف:

مکمل متعامد زیر مجموعه S از فضای ضرب داخلی X را را با نماد $S^\perp$ نمایش داده و عبارت است از اعضایی از X که بر S عمودند.

$$S^\perp = \{x \in X: x \perp S\}$$

۱-۲-۷ پایه فضای برداری

یک پایه از فضای برداری X مجموعه ای از بردار های مستقل خطی است بطوریکه بتوان هر برداری از فضای X را بر حسب یک ترکیب خطی از این پایه ها نوشت. در حالت کلی برای هر فضای برداری می توان بیش از یک پایه یافت، اما همگی آ نها دارای تعداد یکسانی بردار پایه خواهند بود که این تعداد را بعد آن فضای برداری می نامند .بدین سان، توصیف هر بردار دلخواه فضا چنین نشان داده می شود

$$\mathcal{V} = \sum_{i=۱}^{n} a_i b_i \qquad (۷-۲)$$

$\mathcal{V}$ یک بردار در فضای X و n بعد فضا و b_i ها بردار های پایه فضا هستندو a_i ضرایب ترکیب خطی هستند.

۱-۲-۸ فضای C_μ^m

تابع حقیقی $f(x)$ را متعلق به فضای $(\mu \in R)$ C_μ گویندهر گاه عددی حقیقی مانند $p > \mu$ موجود باشد بطوریکه :

$$f(x) = x^p . h(x) \qquad h(x) \in C(۰,+\infty)$$

و می گوییم $f(x) \in C_\mu^m$ هر گاه : $f^{(m)}(x) \in C_\mu$

۱-۲-۹ محمل تابع

تعریف: محمل یک تابع عبارت است از بستار مجموعه نقاطی از دامنه یک تابع که مقدار تابع در آن نقاط غیر صفر باشد یابه عبارت دیگر محمل تابع f که آنرا با نماد $supp(f)$ نمایش می دهیم به صورت زیر است:

$$supp(f) = \overline{\{x: f(x) \neq ۰\}} \qquad (۸-۲)$$

مثال:

اگر $f(x) = \begin{cases} x & ۰ \le x < ۱ \\ ۲ - x & ۱ \le x < ۲ \\ ۰ & o.w \end{cases}$ آنگاه $supp(f) = [۰,۲]$ که محملی فشرده است چرا که این بازه کراندار است.

۱-۲-۱۰ عملگر های انتقال[۱] واتساع[۲] یک تابع

اگر a,b دو عدد حقیقی باشند و $b > ۰$ باشد عملگر های انتقال واتساع روی فضای $L_۲(\mathbb{R})$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$T_a: L_۲(\mathbb{R}) \to L_۲(\mathbb{R}) \qquad (T_a f)(x) = f(x-a) \qquad (۹-۲)$$

$$D_b: L_۲(\mathbb{R}) \to L_۲(\mathbb{R}) \qquad (D_b f)(x) = \sqrt{b} f(bx) \qquad (۱۰-۲)$$

و برای هر تابع $f \in L_۲(\mathbb{R})$ داریم:

$$f_{m,n}(x) = (T_n D_m f)(x) = \sqrt{۲^m} f(۲^m x - n) \quad m,n \in Z$$

۱ - Translation
۲ - Dilation

فصل دوم

معرفی موجک ها

و

توابع بلاک- پالس $(BPFs)$