دانشگاه کردستان
دانشکده علوم پایه
گروه فیزیک

عنوان:

بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی سامانه‌ی دوکیوبیتی در میدان اتلافی

پژوهشگر:

هادی ایوبی اسپورزی

اساتید راهنما:

دکتر آرش سروری
دکتر شهریار سلیمی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته فیزیک گرایش حالت جامد

اسفند ماه ۱۳۹۱

کلیه حقوق مادی و معنوی مترتب بر نتایـج مطالعات،

ابتکارات و نوآوریهای ناشی از تحقیق موضوع

این پایان‌نامه (رسـاله) متعلق به دانشـگاه کردستان است.

تعهد نامه

اینجانب هادی ایوبی اسپورزی دانشجوی کارشناسی ارشدرشته فیزیک گرایش حالت جامد دانشگاه کردستان، دانشکده علوم پایه گروه فیزیک تعهد می نمایم که محتوای این پایان نامه نتیجه تلاش و تحقیقات خود بوده و از جایی کپی برداری نشده و به پایان رسانیدن آن نتیجه تلاش و مطالعات مستمر اینجانب و راهنمایی و مشاوره اساتید بوده است.

با تقدیم احترام

هادی ایوبی اسپورزی

۱۳۹۱/۱۲/۲۰

چکیده

در این پایان نامه، درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی سامانه‌ی دو اتم دوترازی که توسط میدان کلاسیک خارجی رانده می‌شوند و با میدان تک مد درون یک کاواک اتلافی به صورت تشدیدی برهم کنش می‌کنند، مورد بررسی قرار می‌گیرند. در ابتدا به معرفی مفهوم درهم‌تنیدگی و سنجه‌هایی که جهت تعیین میزان درهم‌تنیدگی یک حالت معرفی شده‌اند، می‌پردازیم. سپس ناسازگاری کوانتومی که یکی از بهترین علائم غیرکلاسیکی بودن یک سامانه‌ی کوانتومی را نشان می‌دهد را معرفی می‌کنیم.همچنین به بررسی الگوی جینز- کامینگز که یکی از ساده‌ترین الگوهای غیربدیهی برهم‌کنش اتم- میدان است می پردازیم. با در نظرگرفتن اتم‌ها در یک حالت خالص و میدان در حالت خلاء، ماتریس چگالی کل سامانه را بدست می‌آوریم.خلوصی کل سامانه را با خلوصی زیر سامانه‌های اتم-اتم و میدان، هنگامی که اتم‌ها در حالت پایه باشند مورد مقایسه قرار می‌دهیم.در زیر سامانه‌ی اتم- اتم با استفاده از سنجه‌ی تلاقی نشان داده می‌شود که درهم‌تنیدگی دواتم نمی‌تواند افزایش یابد. این درهم‌تنیدگی به علت اتلاف کاواک پس از مدتی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش ثابت جفت‌شدگی اتم- میدان، درهم‌تنیدگی با سرعت بیشتری تنزل پیدا می‌کند. ناسازگاری کوانتومی زیرسامانه‌ی اتم- اتم را به صورت عددیبدست می‌آوریم و نشان می‌دهیم که برای حالتی از دواتم که درهم‌تنیدگی وجود ندارد، با افزایش ثابت جفت‌شدگی اتم میدان ناسازگاری کوانتومی قویتری بوجود می‌آید

فهرست مطالب

عنوان صفحه

فصل اول: مقدمه ۱

فصل دوم: درهم‌تنیدگی کوانتومی ۵

۲-۱ مقدمه ۵

۲-۲مفهوم درهم‌تنیدگی ۶

۲-۳سنجه‌های درهم‌تنیدگی ۸

۲-۳-۱ آنتروپی فون- نیومن ۹

۲-۳-۲ درهم‌تنیدگی تشکیل ۱۰

۲-۳-۳تلافی ۱۱

فصل سوم: ناسازگاری کوانتومی ۱۵

۳-۱ مقدمه ۱۵

۳-۲اطلاعات متقابل کلاسیکی ۱۶
۳-۳ناسازگاری کوانتومی ۱۷
۳-۴ویژگی‌های ناسازگاری کوانتومی ۱۸
فصل چهارم: توصیف الگوی جینز- کامینگز ۲۰
۴-۱ مقدمه ۲۰
۴-۲ الگوی جفت‌شدگی کمین ۲۱
۴-۳الگوی دوقطبی ۲۲
۴-۴برهم‌کنش اتم- میدان در الگوی نیمه‌کلاسیک ۲۴
۴-۵برهم‌کنش اتم- میدان در الگوی کوانتومی ۲۸
۴-۵-۱ هامیلتونی اتم ۲۸
۴-۵-۲ هامیلتونی میدان ۲۹
۴-۵-۳هامیلتونی برهم‌کنش اتم- میدان ۳۰
۴-۵-۴ تقریب موج چرخان ۳۱
فصل پنجم: دینامیک همبستگی‌های کوانتومی دو اتم جفت شده با میدان کاواک اتلافی ۳۴
۵-۱ مقدمه ۳۴
۵-۲معادله اصلی سامانه دو اتم جفت شده با میدان کاواک اتلافی ۳۵
۵-۳حل معادله اصلی ۳۹
۵-۴بررسی و حل دقیق عملگر چگالی سامانه برای اتم‌های حالت پایه ۴۴
۵-۵دینامیک زیرسامانه ۴۷
۵-۶ درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی زیرسامانه اتم- اتم ۴۹
۵-۶-۱ درهم‌تنیدگی کوانتومی اتم- اتم ۵۰
۵-۶-۱-۱درهم‌تنیدگی حالتی که برهم‌نهی از حالت $\left|\Phi^{\pm}\right\rangle$ ۵۱
۵-۶-۱-۲درهم‌تنیدگی حالتی که برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Psi^{\pm}\right\rangle$ ۵۴
۵-۶-۱-۳درهم‌تنیدگی حالتی که برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Phi^{-}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{-}\right\rangle$ ۵۴

۵-۶-۱-۴درهم‌تنیدگی حالتی که برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Phi^{+}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{+}\right\rangle$ ۵۵
۵-۶-۱-۵درهم‌تنیدگی حالتی که برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Phi^{-}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{+}\right\rangle$ ۵۵
۵-۶-۱-۶درهم‌تنیدگی حالتی که برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Phi^{+}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{-}\right\rangle$ ۵۷
۵-۶-۲ ناسازگاری کوانتومی اتم- اتم ۵۸
۵-۶-۲-۱ ناسازگاری کوانتومی حالت $\left|ee\right\rangle$ ۵۹
۵-۶-۲-۲ناسازگاری کوانتومی حالت $\left|\Phi^{+}\right\rangle$ ۶۲
۵-۶-۲-۳ناسازگاری کوانتومی حالت $\left|\Phi^{-}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{+}\right\rangle$ ۶۴
فصل ششم: نتیجه گیری ۶۶
پیوست الف: تجزیه‌ی اشمیت ۶۸
پیوست ب: اندازه‌گیری عام povm ۷۰
مراجع ۷۱

فهرست شکل‌ها

عنوان صفحه

شکل ۴-۱: مدل ساده‌یی از یک اتم هیدروژن شامل پروتون و الکترون که در موقعیت‌های $\vec{r}_p$ و $\vec{r}_e$ است ۲۲
شکل ۴-۲: مدل ساده‌ای از برهم‌کنش یک اتم دوترازی با بسامد گذار اتمی ω با تک مد میدان کاواک ۲۸
شکل ۵-۱:برهم‌کنش دو اتم رانشی با میدان کاواک اتلافی ۳۵
شکل ۵-۲: خلوصی کل سامانه برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۴۶
شکل ۵-۳: خلوصی زیر سامانه میدان برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۴۸
شکل ۵-۴: خلوصی زیر سامانه اتم- اتم برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۴۹
شکل ۵-۵: درهم‌تنیدگی اتم- اتم در حالت $\frac{\left|\Phi^{+}\right\rangle + e^{i\pi/4}\left|\Phi^{-}\right\rangle}{2}$ برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۵۲

شکل ۵-۶: درهم‌تنیدگی اتم- اتم در حالت $\left|\Phi^{+}\right\rangle$ برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۵۳

شکل ۵-۷: درهم‌تنیدگی اتم- اتم برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Phi^{-}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{+}\right\rangle$ برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۵۷

شکل ۵-۸: ناسازگاری اتم- اتم در حالت $|ee\rangle$ برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۶۲

شکل ۵-۹: ناسازگاری اتم- اتم در حالت $\left|\Phi^{+}\right\rangle$ برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۶۳

شکل ۵-۱۰: ناسازگاری اتم- اتم که برهم‌نهی از حالت‌های $\left|\Phi^{-}\right\rangle$ و $\left|\Psi^{+}\right\rangle$برحسب kt و به ازای مقادیر مختلف $\frac{g}{k}$ ۶۴

فصل اوّل

مقدمه

براساس گفته‌ی لندور[1] " از آنجا که اطلاعات بوسیله‌ی سامانه‌های فیزیکی ذخیره‌سازی و پردازش می‌شوند، ویژگی‌های اساسی آن‌ها نیز باید نتیجه‌ی قوانین فیزیکی باشد"، از این‌رو مفهوم اطلاعات، نمایش و کاربردهای آن را باید در دنیای فیزیک جستجو کرد [۱].

ریچارد فاینمن[2] در اوایل دهه ۱۹۸۰ مشاهده کرد که اثرات کوانتومی خاصی نمی‌توانند به طور مؤثری بر روی رایانه کلاسیکی شبیه‌سازی شوند [۲]. این مشاهده منجر به درک این نکته شد که شاید با استفاده از این اثرات کوانتومی بتوان محاسباتی با بازده‌ی بالاتر انجام داد. اما هیچ‌کس نمی‌دانست که چگونه می‌توان این اثرات کوانتومی را برای سرعت بخشیدن به محاسبات مورد استفاده قرار داد تا اینکه در سال ۱۹۹۴ پیتر شور[3] [۳] با ابداع الگوریتم کوانتومی که قادر بود اعداد صحیح را با سرعت نمایی به عامل‌های اول آن تجزیه نماید، انقلاب بزرگی در این زمینه ایجاد کرد.

علاوه بر نقش مکانیک کوانتومی در محاسبات کوانتومی، می‌توان به نقش آن در نظریه اطلاع رسانی کوانتومی اشاره کرد که اساس آن درهم‌تنیدگی کوانتومی[4] است. درهم‌تنیدگی کوانتومی که در سال ۱۹۳۵ به عنوان دلیلی بر نقض مکانیک کوانتومی مطرح شد، در سال‌های اخیر توجه زیادی را به خود جلب کرده است. این توجه به این دلیل بود که بدون وجود درهم‌تنیدگی امکان انجام فرآیندهایی همچون دوربری کوانتومی[5] [۴، ۵]، رمزگذاری کوانتومی[6] [۶]، ارتباطات کلاسیکی از طریق کانال‌های کوانتومی[7] [۷، ۸، ۹]، افزایش سرعت انجام الگوریتم‌های کوانتومی[8] [۱۰]، خطاگیری‌های کوانتومی[9] [۱۱] و محاسبات توزیع شده [۱۲، ۱۳] امکان پذیر نیست. همچنین سنجه‌های مختلفی برای اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی کوانتومی معرفی شده‌اند، که از مهمترین آن‌ها می‌توان به آنتروپی وان نیومن[10] [۱۴]، درهم‌تنیدگی تشکیل[11] [۱۵]، تلاقی[12] [۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۸] و نیمه تلاقی[13] [۱۹] اشاره کرد.

در سال ۱۹۹۸ نیل[14] و لافلامه[15] مدل جدیدی برای انجام محاسبات کوانتومی ارائه دادند که به مدل DQC1[16] معروف است. در این مدل پردازش اطلاعات بوسیله‌ی مجموعه‌ای از کیوبیت‌هایی[17] که در یک حالت آمیخته کامل

---

[1] Landauer
[2] Richard Feynman
[3] Peter Shor
[4] Quantum Entanglement
[5] Quantum teleportation
[6] Quantum cryptography
[7] Classical communication over quantum channels
[8] Quantum computational speed-up
[9] Quantum error correction
[10] Von Neumann entropy
[11] Entanglement of formation
[12] Concurrence
[13] D-concurrence
[14] Knill
[15] Laflamme

هستند انجام می‌گیرد [۲۰] ، از طرفی یک کیوبیت آمیخته نمی‌تواند درهم‌تنیده باشد و این باعث تغییر دیدگاه درباره‌ی اینکه اطلاعات کوانتومی محدود به درهم‌تنیدگی است گردید. تا اینکه در سال ۲۰۰۱، اندازه‌گیری تحلیلی اطلاعات مختلف در نظریه‌ی اطلاعات کوانتومی مطرح شد و هندرسن[۱۸] و ودرال[۱۹] و به طورمستقل اولیویر[۲۰] و زورک[۲۱] به این نتیجه رسیدند که وقتی درهم‌تنیدگی از کل همبستگی‌های کوانتومی[۲۲] کاسته شود، همبستگی دیگری باقی می‌ماند که اساساً ریشه‌ی کلاسیکی ندارد و این نوع همبستگی را ناسازگاری کوانتومی[۲۳] نامیدند [۲۱، ۲۲، ۲۳]. سپس داتا[۲۴] و همکارانش، ناسازگاری کوانتومی را در الگوریتم نیل- لافلامه محاسبه کردند و نشان دادند که برخلاف درهم‌تنیدگی، ناسازگاری کوانتومی برای حالت‌های جداپذیر صفر نمی‌شود و این نتیجه محققین را به این باور رساند که به مطالعات بیشتری در زمینه ویژگی‌های ناسازگاری کوانتومی و ارائه شیوه‌هایی برای محاسبه‌ی این کمیت بپردازند [۲۱، ۲۴، ۲۵].

اخیراً توجه زیادی به همبستگی‌های کوانتومی در سامانه‌های دوکیوبیتی یا چندکیوبیتی شده است. یکی از این سامانه‌ها که مطالعه زیادی بر روی آن صورت گرفته است برهم‌کنش یک اتم دوترازه با تک مد میدان تابشی درون کاواک[۲۵] است که درچارچوب الگوی جینز- کامینگز[۲۶] [۲۶] بررسی می‌شود. اگرچه این الگو از لحاظ نظری اهمیت فراوانی دارد، اما به لحاظ تجربی هم در بسیاری از مطالعات آزمایشگاهی که براساس حالت‌های درهم‌تنیده انجام می‌شوند نقش مهمی ایفا می‌کند [۲۷، ۲۸].

همانطور که می دانیم هیچ سامانه فیزیکی را نمی توان بطور کامل از محیط اطرافش منزوی کرد. در واقع برهم‌کنش بین یک سامانه کوانتومی و محیط اطرافش دو اثر برگشت‌ناپذیر در پی دارد که عبارتند از اتلاف که باعث انتقال انرژی سامانه کوانتومی به محیط می‌شود و واهمدوسی[۲۷] که به عنوان فرآیند گذار از دنیای کوانتومی به دنیای کلاسیک به حساب می آید. پدیده واهمدوسی جدی‌ترین مانع در تولید و بکارگیری حالت‌های درهم‌تنیده است و باعث بروز رفتار کلاسیک در سامانه‌های کوانتومی می شود [۲۹، ۳۰]. مطالعه اثر مخرب واهمدوسی روی حالت-های در هم‌تنیده اهمیت قابل توجهی در زمینه های نظری و تجربی دارد[۳۱، ۳۲].

---

[16] Deterministic quantum computation with one qubit
[17] Qubit
[18] Henderson
[19] Vedral
[20] Ollivier
[21] Zurek
[22] Quantum Correlation
[23] Quantum Discord
[24] Datta
[25] Cavity
[26] Jaynes-Cummings
[27] Decoherence

هدف اصلی ما در این پایان نامه بررسی دینامیک درهم‌تنیدگی و ناسازگاری کوانتومی در الگوی جینز- کامینگز است. به این منظور در فصل دوم در مورد درهم‌تنیدگی کوانتومی توضیح بیشتری می‌دهیم و به معیارها وسنجه‌های درهم‌تنیدگی اشاره می‌کنیم و در فصل سوم به توصیف ناسازگاری کوانتومی می‌پردازیم. فصل چهارم را به معرفی الگوی جینز- کامینگز اختصاص می‌دهیم و زمینه را آماده می‌کنیم تا در فصل پنجم درهم‌تنیدگی کوانتومی را با استفاده از سنجه‌ی تلاقی و ناسازگاری کوانتومی به صورت عددی در الگوی جینز- کامینگز بدست آوریم . در فصل ششم نتایج بدست آمده از این پژوهش را بیان می‌کنیم.

فصل دوم
درهم‌تنیدگی کوانتومی

۲-۱ مقدمه

درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از شگفت انگیزترین جنبه‌های مکانیک کوانتومی و جالب‌ترین جلوه‌های فیزیک غیرکلاسیک است. این پدیده نخستین بار در سال ۱۹۳۵ توسط اینشتین[۲۸]، پودولسکی[۲۹] و روزن[۳۰] [۳۳] در مقاله‌ای که بعدها به EPR شهرت یافت، به عنوان دلیلی بر نقص مکانیک کوانتومی مطرح شد. این نظریه‌پردازان معتقد بودند که می توان نظریه‌ی کاملتری را با استفاده از یک متغیر نهانی ساخت. امّا در سال ۱۹۶۴ بِل[۳۱] [۳۴] با ارائه‌ی نامساوی مشهور خود، بیان کرد که نظریه موجود در مقاله ی EPR با مبانی مکانیک کلاسیک در تضاد است. بِل نشان داد که وجود مدلی بر پایه ی متغیر نهانی مستلزم برقراری یک نامساوی است، در حالی برای سامانه طرح شده براساس مقاله EPR حالت‌هایی وجود دارند که به وضوح منجر به نقض این نامساوی می شوند. در نتیجه‌ی اثبات درستی نظریه‌ی کوانتومی، درهم‌تنیدگی کوانتومی توجه بسیاری را به خود جلب کرد.

یکی از دلایلی که اطلاع رسانی کوانتومی را از اطلاع رسانی کلاسیک متمایز می کند وجود درهم‌تنیدگی یا همبستگی کوانتومی در سامانه می‌باشد. این همبستگی کوانتومی که بین حالت‌های درهم‌تنیده اتفاق می افتد فاقد همتای کلاسیکی است. لذا با توجه به نقشی که حالت‌های درهم‌تنیده در نظریه اطلاع رسانی کوانتومی ایفا می کنند، شناسایی این حالت‌ها و تعیین میزان درهم‌تنیدگی آن‌ها اهمیت بسزایی دارد. در این فصل ابتدا مفهوم درهم-تنیدگی کوانتومی را توضیح می دهیم و سپس سنجه‌هایی را که برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های کوانتومی بکار می روند معرفی می‌کنیم.

---

[28] Einestein
[29] Podolsky
[30] Rosen
[31] Bell

۲-۲ مفهوم درهم تنیدگی

برای ارائه تعریف مناسبی از مفهوم درهم‌تنیدگی، سامانه کوانتومی A را که با بردار حالت $|\varphi\rangle$ در فضای هیلبرت $\mathscr{H}$ توصیف می شود در نظر می گیریم. فرض می کنیم این سامانه مرکب از دو زیر سامانه A_1 با بردار حالت $|\varphi\rangle_1$ در فضای هیلبرت $\mathscr{H}_1$ و A_2 با بردار حالت $|\varphi\rangle_2$ در فضای هیلبرت $\mathscr{H}_2$ است بطوریکه $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$. اگر حالت سامانه‌ی مرکب A را نتوان به صورت حاصل ضرب تانسوری به شکل $|\varphi\rangle=|\varphi\rangle_1\otimes|\varphi\rangle_2$ نوشت، آنگاه سامانه A را درهم تنیده می گویند [۳۵]. این یک حالت کوانتومی درهم تنیده خالص است. از طرفی بنا به تعریفی که ورنر[۳۲] برای جداپذیری حالت‌های آمیخته ارائه داد، عملگر چگالی $\hat{\rho}^{AB}$ که در فضای هیلبرت $\mathscr{H}_A\otimes\mathscr{H}_B$ یک سامانه دوتایی عمل می کند را جداپذیر گویند اگر بتوان آن را بصورت جمع محدبی از حاصلضرب تانسوری عملگرهای چگالی هریک از دو زیر سامانه به صورت زیر نوشت [۳۶]،

$$\hat{\rho}^{AB}=\sum_i P_i\hat{\rho}_i^A\otimes\hat{\rho}_i^B \quad , \quad P_i\geq 0 \quad , \quad \sum_i P_i=1 \qquad (۱-۲)$$

که در آن عملگر چگالی $\hat{\rho}_i^A$ در فضای $\mathscr{H}_A$ و عملگر چگالی $\hat{\rho}_i^B$ در فضای $\mathscr{H}_B$ عمل می کند. در غیر اینصورت حالت درهم‌تنیده است.

برای درک بهتری از مفهوم حالت‌های درهم تنیده، حالت دو ذره‌ای که اسپین هرکدام $\frac{۱}{۲}$ است و پایه متعامد آن‌ها در فضای هیلبرت دوبعدی با $|0\rangle$ و $|1\rangle$ نمایش داده می‌شوند را درنظر می‌گیریم. این حالت‌ها به ترتیب می‌توانند نمایش دهنده حالت‌های اسپینی بالا و پایین ذره‌ای مانند یک الکترون باشند که به صورت زیر تعریف می‌شوند،

$$|\varphi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle-|10\rangle\big) \qquad (۲-۲)$$

اگر هیچ اندازه‌گیری در روی اسپین ذره‌ی دوم صورت نگرفته باشد، احتمال اینکه ذره‌ی اول در حالت اسپینی بالا یا پایین باشد $\frac{۱}{۲}$ است. حال اگر حالت اسپینی ذره‌ی دوم را اندازه‌گیری کنیم و نتیجه اندازه‌گیری حالت $|0\rangle$ باشد، احتمال اینکه ذره‌ی اول در حالت $|0\rangle$ قرار گرفته باشد صفر و احتمال اینکه در حالت $|1\rangle$ قرار گرفته باشد برابر با یک خواهد بود. اما اگر نتیجه‌ی اندازه‌گیری روی ذره‌ی دوم $|1\rangle$ باشد، احتمال اینکه ذره‌ی اول در حالت $|0\rangle$ قرار گرفته باشد یک و احتمال اینکه در حالت $|1\rangle$ قرارگرفته باشد برابر با صفر خواهد بود. بنابراین نتیجه‌ی اندازه‌گیری اسپین ذره‌ی دوم بروی نتیجه‌ی اندازه‌گیری ذره‌ی اول تاثیر دارد که این موضوع وجود یک همبستگی بین دو ذره را بیان می کند و اگر دو ذره به لحاظ مکانی از هم دور باشند نیز این همبستگی همچنان وجود دارد. به عبارت دیگر می توان گفت حالت $|\varphi\rangle$ یک حالت درهم تنیده است.

اکنون حالت زیر را درنظر می گیریم،

---

[32] Werner

$$|\varphi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|00\rangle - |01\rangle\right) = |0\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - |1\rangle\right) \qquad (۳-۲)$$

با توجه به حالت ذکر شده، هر اندازه‌گیری در روی اسپین ذره‌ی اول، صرفنظر از اینکه اسپین ذره‌ی دوم اندازه-گیری شده باشد یا نه، همواره حالت $|0\rangle$ را بدست خواهد داد. بنابراین چون اندازه‌گیری روی یک ذره اثری روی حالت ذره‌ی دیگر ندارد، حالت فوق را یک حالت غیر درهم‌تنیده گویند.

بعد از تعریف مفهوم درهم‌تنیدگی و تشخیص درهم‌تنیدگی سامانه، این سوال مطرح است که میزان درهم تنیدگی سامانه‌های مختلف را به چه طریقی می‌توان تعیین کرد؟ تاکنون سنجه‌های زیادی برای اندازه‌گیری میزان درهم-تنیدگی حالت‌ها مطرح شده اند که در اینجا به معرفی برخی از آنها می‌پردازیم.

۳-۲ سنجه‌های درهم‌تنیدگی

مشخص کردن میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های درهم‌تنیده با استفاده از سنجه‌های قابل محاسبه اهمیت زیادی در اطلاع رسانی کوانتومی از جمله دوربری کوانتومی دارند. به طور مثال حالت‌هایی که دارای بیشترین میزان درهم-تنیدگی باشند، حالت‌های اساسی و مورد نیاز برای دوربری کوانتومی هستند. ابتدا ویژگی‌های یک سنجه‌ی خوب را معرفی می‌کنیم و سپس به معرفی سنجه‌های درهم‌تنیدگی برای حالت‌های خالص و آمیخته می‌پردازیم.

یک سنجه‌ی خوب، $E(\varrho)$، باید:[۳۷]،

۱- میزان درهم‌تنیدگی برای حالت جداپذیر ϱ را برابر با صفر بدست دهد یعنی $E(\varrho)=0$. این ویژگی نشان‌دهنده این نکته است که حالت‌های غیردرهم‌تنیده دارای مقدار درهم‌تنیدگی صفر هستند.

۲- میزان درهم‌تنیدگی برای حالت ϱ را تحت کنش عملگرهای یکانی موضعی به شکل $U_A \otimes U_B$، ناوردا باقی بگذارد. بنابراین $E(\varrho) = E\left(U_A \otimes U_B\ \varrho\ U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger\right)$. این به آن معناست که برای سنجه مربوطه تغییر موضعی پایه مربوط به هر زیر فضا بر روی میزان درهم‌تنیدگی حالت تاثیر نداشته باشد.

۳- یکنوا باشد. اگر حالت ϱ_{out} از حالت ϱ_{in} تحت تبدیلات موضعی[۳۳] (LO) و ارتباط کلاسیک[۳۴] (CC) بدست آید[۳۵] درهم‌تنیدگی ϱ_{out} نمی‌تواند از درهم‌تنیدگی ϱ_{in} بیشتر شود.

---

[33] Local operations

[34] Classical communication

[۳۵]- از حالت ϱ_{in} دو نسخه تهیه می‌کنیم و در اختیار آلیس و باب قرار می دهیم. آلیس و باب هرکدام یک سری عملیات کوانتومی را انتخاب و روی حالتی که در اختیارشان است انجام می دهند و با همدیگر تماس می گیرند و نتیجه را گزارش می دهند. چون نتیجه‌ی عملیات بوسیله‌ی ارتباط کلاسیکی صورت گرفته به این عملیات تبدیلات موضعی و ارتباط کلاسیکی می گویند.

بدین معنی که اگر آنسامبل $\{P_i, \varrho_{out}^i\}$ تحت تبدیل LOCC از حالت اولیه ϱ_{in} تولید شود باید شرط زیر برقرار باشد،

$$\sum_i P_i E\left(\varrho_{out}^i\right) \le E\left(\varrho_{in}\right) \quad . \qquad (۴-۲)$$

این شرط بیان می کند که مجموع درهم‌تنیدگی تک تک حالت‌هایی که بوسیله ی عملیات موضعی و ارتباط کلاسیکی ساخته شده‌اند نمی‌تواند از میزان درهم‌تنیدگی حالت اولیه بیشتر باشد. این ویژگی از آنجا ناشی می شود که تحت تبدیلات موضعی و ارتباط کلاسیکی تنها همبستگی کلاسیکی سامانه افزایش می یابد[۳۸]. بنابراین یک سنجه‌ی خوب نباید دربرگیرنده ی همبستگی کلاسیکی باشد و تحت اثر این تبدیلات میزان درهم‌تنیدگی سامانه نباید افزایش یابد.

۴- محدب باشد. این ویژگی بیان می‌کند که میزان درهم‌تنیدگی حالتی که آمیزه‌ای از حالت‌های درهم‌تنیده است نمی‌تواند بیشتر از مجموع درهم‌تنیدگی تک تک حالت‌ها باشد. معادل ریاضی آن به صورت زیر می‌باشد،

$$E\left(\sum_i P_i\ \varrho_i\right) \le \sum_i P_i E\left(\varrho_i\right) \quad . \qquad (۵-۲)$$

به طور مثال یک ترکیب مساوی از حالت‌های $|00\rangle - |11\rangle$ و $|00\rangle + |11\rangle$ که دارای بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی هستند، یک حالت جداپذیر است که هیچگونه درهم‌تنیدگی را نشان نمی‌دهد. البته این ویژگی مستقل از ویژگی سوم نیست.

اکنون به معرفی سنجه‌های درهم‌تنیدگی می‌پردازیم.

۲-۳-۱ آنتروپی وان- نیومن:

حالت خالص $|\phi\rangle \in \mathscr{H}_A \otimes \mathscr{H}_B$ را در نظر می گیریم. با استفاده از تجزیه اشمیت (پیوست الف) می‌توان آنرا بصورت زیر نوشت،

$$|\phi\rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i \left|\phi_i^A\right\rangle \otimes \left|\phi_i^B\right\rangle \qquad (۶-۲)$$

که در آن $\left|\phi_i^A\right\rangle$ و $\left|\phi_i^B\right\rangle$ به ترتیب عناصر پایه‌ی متعامد زیر فضاهای $\mathscr{H}_A$ و $\mathscr{H}_B$ و c_i مجموعه‌ی ضرایب حقیقی مثبت هستند. اگر روی هر زیرسامانه عملگرهای یکانی را بطور جداگانه اثر دهیم ضرایب c_i تغییر نمی‌کنند، بنابراین

منطقی است هر تابعی که به عنوان معیار درهم تنیدگی حالت $|\phi\rangle$ ارائه می‌شود تابعی از ضرایب c_i باشد. بنابراین برای محاسبه آنتروپی وان- نیومن ابتدا از ماتریس چگالی سامانه کل، ماتریس چگالی یک زیرسامانه را بدست می آوریم،

$$\hat{\rho}_A = Tr_B(\hat{\rho}) \quad , \quad \hat{\rho}_B = Tr_A(\hat{\rho}) \qquad (۷-۲)$$

که در آن $\hat{\rho} = |\phi\rangle\langle\phi|$. با استفاده از تعریف آنتروپی وان- نیومن عبارت زیر را برای میزان درهم‌تنیدگی بدست خواهیم آورد،

$$E(\phi) = -Tr(\hat{\rho}_A \log_2 \hat{\rho}_A) = -Tr(\hat{\rho}_B \log_2 \hat{\rho}_B) = -\sum_{i=1}^{n} c_i^2 \log_2 c_i^2 \qquad (۸-۲)$$

عبارت بالا آنتروپی وان- نیومن ماتریس چگالی وابسته به هریک از دو زیرسامانه A و B است و مقادیر c_i^2 مقادیر ویژه غیر صفر هریک از این دو ماتریس چگالی هستند که سنجه‌ی مناسب برای حالت‌های خالص است. حال به معرفی سنجه‌های حالت‌های آمیخته می‌پردازیم [۳۸].

۲-۳-۲ درهم تنیدگی تشکیل:

برای یک حالت آمیخته‌ی سامانه‌ی دو قسمتی، آنتروپی وان- نیومن یک زیر سامانه سنجه‌ی درهم‌تنیدگی مناسبی نیست، زیرا هر زیر سامانه‌ای می تواند دارای آنتروپی غیرصفر باشد حتی اگر هیچ درهم‌تنیدگی وجود نداشته باشد[۱۵]. بنابراین برای حالت‌های آمیخته، آنتروپی وان- نیومن نمی‌تواند سنجه‌ی مناسبی جهت تعیین مقدار درهم-تنیدگی باشد. از این رو بنت[۳۶] و همکارانش [۱۵] سنجه‌ی مناسبی را به نام درهم‌تنیدگی تشکیل معرفی کردند.

برای بدست آوردن میزان درهم‌تنیدگی حالت‌های آمیخته با استفاده از این سنجه، همان روش حالت‌های خالص را بسط و گسترش می دهیم. هر حالت آمیخته‌ی $\hat{\rho}$ را برحسب حالت‌های خالص می‌توان بصورت زیر بسط داد،

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \qquad (۱۰-۲)$$

که در آن $|\phi_i\rangle$ حالت خالص بهنجار شده‌ی سامانه دو قسمتی است و P_i یک عدد حقیقی مثبت بین صفر و یک است. درهم‌تنیدگی تشکیل یک ماتریس چگالی را بر حسب کمینه متوسط بر روی تمامی تجزیه‌های ممکن ماتریس چگالی به حالت های خالص تعریف می‌شود[۳۸]،

[36] Bennett

$$E_f(\hat{\rho}) = \min\left\{\sum_i P_i E(\phi_i)\right\} \qquad (۱۱-۲)$$

لازم به ذکر است که به دلیل پیچیدگی عمل محاسبه کمینه در رابطه‌ی بالا، محاسبه‌ی درهم‌تنیدگی تشکیل یک سامانه‌ی دوجزئی در حالت کلی امکان پذیر نیست و تنها برای ساده‌ترین سامانه‌ی دو جزئی $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ شکل تحلیلی برای آن ارائه شده است [۳۸].

۲-۳-۳ تلاقی:

تلاقی در سال ۲۰۰۱ توسط ووترز[۳۷] معرفی شد که یکی از بهترین سنجش‌ها برای تعیین میزان درهم‌تنیدگی حالت-های خالص و مرکب سامانه‌های دوکیوبیتی تعریف شده روی فضای $\mathcal{H}^2 \otimes \mathcal{H}^2$ است. حالت خالص $|\phi\rangle$ مربوط به یک جفت کیوبیت را در نظر می گیریم. تابع تلاقی $C(\phi)$ این حالت بصورت زیر تعریف می شود [۳۸]،

$$C(\phi) = \left|\langle\phi|\tilde{\phi}\rangle\right| \text{ ،} \qquad (۱۲-۲)$$

که در آن $|\tilde{\phi}\rangle$ عبارتست از

$$|\tilde{\phi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\phi^*\rangle \text{ .} \qquad (۱۳-۲)$$

در این عبارت منظور از $|\phi^*\rangle$ مزدوج مختلط $|\phi\rangle$ است و σ_y نمایش ماتریس پائولی است که نسبت به عناصر پایه موضعی $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ به صورت زیر بیان می‌گردد،

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad (۱۴-۲)$$

با توجه به تعریف، کمیت C مقادیر بین ۰ تا ۱ را به خود می گیرد. بعنوان مثال اگر $|\phi\rangle$ را یک حالت غیر درهم-تنیده یا حالت خالص جداپذیر انتخاب کنیم مقدار تلاقی صفر است ولی اگر $|\phi\rangle$ حالتی با بیشینه‌ی درهم‌تنیدگی انتخاب شود، مانند حالت‌های بل، در این صورت $|\phi\rangle = |\tilde{\phi}\rangle$ است و $C = 1$ خواهد شد. با استفاده از این تعاریف می‌توان عبارت زیر را برای درهم‌تنیدگی حالت خالص دو کیوبیتی بدست آورد،

$$E(\phi) = \varepsilon(C(\phi)) \text{ ،} \qquad (۱۵-۲)$$

[37] Wootters

که در آن تابع ε بصورت زیر تعریف می شود،

$$\varepsilon(C)=h\left(\frac{1+\sqrt{1-C^2}}{2}\right)، \qquad (۱۶-۲)$$

و

$$h(x)=-x\log_2(x)-(1-x)\log_2(1-x) \qquad (۱۷-۲)$$

تابع آنتروپی دودویی[۳۸] نامیده می‌شود. تابع $\varepsilon(C)$ برای $0\le C\le 1$ بطور یکنواخت افزایش می یابد. اگر حالت خالص سامانه را برحسب عناصر پایه استاندارد بنویسیم ارتباط بین تلاقی و درهم تنیدگی بصورت واضح دیده خواهد شد. یعنی اگر داشته باشیم،

$$|\phi\rangle=a|00\rangle+b|01\rangle+c|10\rangle+d|11\rangle ،$$

تلاقی بصورت زیر خواهد شد،

$$C(\phi)=\left|\langle\phi|\tilde{\phi}\rangle\right|=2|ad-bc| . \qquad (۱۸-۲)$$

اکنون برای حالت‌های آمیخته دو کیوبیتی فرمول بسته‌ی درهم‌تنیدگی تشکیل را معرفی می‌کنیم. برای این کار ابتدا ماتریس چگالی را برحسب حالت‌های خالص بسط می دهیم،

$$\hat{\rho}=\sum_i P_i|\phi_i\rangle\langle\phi_i| \qquad (۱۹-۲)$$

سپس میانگین آنسامبلی تابع تلاقی حالت‌های خالص که $\hat{\rho}$ بر حسب آنها بسط داده شده است را محاسبه می کنیم. تابع تلاقی حالت $\hat{\rho}$ بصورت کمینه این میانگین روی تمام تجزیه های $\hat{\rho}$ تعریف می‌شود،

$$C(\hat{\rho})=\min\sum_i P_i C(\phi_i) . \qquad (۲۰-۲)$$

بنابراین،

[38] Binary entropy function

$$\varepsilon\left(C\left(\hat{\rho}\right)\right)=\varepsilon\left(\min\sum_i P_i C\left(\phi_i\right)\right)=\min\ \varepsilon\left(\sum_i P_i C\left(\phi_i\right)\right) \qquad (۲۱-۲)$$

که در آن تابع $\varepsilon(C)$ در رابطه ی (۲-۱۶) تعریف شده است، بعلاوه این تابع بطور یکنواخت افزایشی است و همچنین محدب است. با توجه به نکات بیان شده می توان به نامساوی زیر رسید،

$$\varepsilon\left(C\left(\hat{\rho}\right)\right)=\min\ \varepsilon\left(\sum_i P_i C\left(\phi_i\right)\right)\le\min\left(\sum_i P_i\,\varepsilon\left(C\left(\phi_i\right)\right)\right)=E_f\left(\hat{\rho}\right) \qquad (۲۲-۲)$$

یعنی $\varepsilon\left(C\left(\hat{\rho}\right)\right)$ ، حد پایین $E_f\left(\hat{\rho}\right)$ است. پس نتیجه می شود که $\varepsilon\left(C\left(\hat{\rho}\right)\right)$ برابر با درهم‌تنیدگی تشکیل دو کیوبیت است.

برای حالت‌های آمیخته‌ی دو کیوبیتی، شکل بسته‌ای برای تلاقی $C\left(\hat{\rho}\right)$ توسط ووترز[۳۹] بصورت زیر تعریف شده است،

$$C\left(\hat{\rho}\right)=\max\left\{0,\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\right\} \qquad (۲۳-۲)$$

که در آن، λ_iها مقادیر ویژه غیر منفی ماتریس هرمیتی $R\equiv\sqrt{\sqrt{\hat{\rho}}\tilde{\hat{\rho}}\sqrt{\hat{\rho}}}$ هستند که به ترتیب نزولی مرتب شده اند . $\tilde{\hat{\rho}}$ بصورت زیر تعریف می شود،

$$\tilde{\hat{\rho}}=\left(\sigma_y\otimes\sigma_y\right)\hat{\rho}^*\left(\sigma_y\otimes\sigma_y\right) \qquad (۲۴-۲)$$

در این عبارت $\hat{\rho}^*$ مزدوج مختلط $\hat{\rho}$ و σ_y نمایش ماتریس پائولی برحسب عناصر پایه موضعی $\{|1\rangle,|0\rangle\}$ است.

از سنجه‌های قابل ذکر دیگر سنجه‌ی نگاتیویتی است که توسط ویدال[۴۰] و ورنر [۳۹] معرفی شده است و یک سنجه‌ی خوب برای درهم‌تنیدگی می‌باشد که در اینجا از بیان جزئیات آن صرفنظر می‌کنیم. در این فصل مفهوم درهم‌تنیدگی که جزئی از همبستگی کوانتومی می‌باشد را توضیح دادیم. همچنین سنجه‌هایی را برای مشخص کردن میزان درهم‌تنیدگی معرفی کردیم که در فصل پنجم از سنجه‌ی تلاقی جهت میزان درهم‌تنیدگی زیر سامانه‌ی

[39] Wootters
[40] Vidal

اتم- اتم استفاده می‌شود. در فصل بعدی کمیت دیگری از همبستگی کوانتومی به نام ناسازگاری کوانتومی را معرفی می‌کنیم.

فصل سوم
ناسازگاری کوانتومی

۳-۱ مقدمه

یکی از بارزترین علائم غیرکلاسیکی بودن یک سامانه‌ی کوانتومی وجود همبستگی‌هایی است که مشابه کلاسیکی ندارند. همانطور که در فصل قبلی اشاره کردیم درهم‌تنیدگی کوانتومی یکی از این نوع همبستگی‌ها است. در سال

۱۹۹۸ نیل و لافلامه مدل جدیدی برای انجام محاسبات کوانتومی ارائه دادند که به مدل DQC1[41] معروف است. در این مدل پردازش اطلاعات بوسیله‌ی مجموعه‌ای از کیوبیت‌هایی که در یک حالت آمیخته کامل هستند انجام می‌گیرد [۲۰] و قادر به حل بسیاری از کارهای محاسباتی می‌باشد که هیچ روش موثر با استفاده از پردازش اطلاعات کلاسیکی برای حل آن وجود ندارد. از طرفی رمزنگاری کوانتومی شامل بسیاری از حالت‌های کوانتومی غیردرهم‌تنیده است. همچنین در بسیاری از حالت‌های غیردرهم‌تنیده، رفتارهای غیرکلاسیک مشاهده گردیده است. این عوامل باعث شد که محققین به این باور برسند که علم اطلاعات کوانتومی به مطالعه درهم‌تنیدگی کوانتومی محدود نمی‌شود. تا اینکه در سال ۲۰۰۱ از یک سو هندرسون و ودرال و از سوی دیگر و به طور مستقل الیویر و زورک به این نتیجه رسیدند که وقتی درهم‌تنیدگی از کل همبستگی‌های کوانتومی کاسته شود، همبستگی دیگری باقی می‌ماند که اساساً ریشه‌کلاسیکی ندارد و برخلاف درهم‌تنیدگی برای حالت‌های آمیخته تفکیک‌پذیر صفر نیست، آنها این همبستگی‌ها را ناسازگاری کوانتومی نامیدند[۲۱، ۲۲]. ناسازگاری کوانتومی به اصل برهم‌نهی بستگی دارد و صفرشدن آن معیاری برای برگزیدن حالت‌های کلاسیکی مؤثر یک سامانه است که به آن‌ها حالت‌های اشاره‌گر[42] می‌گوییم. از طرف دیگر ناسازگاری کوانتومی شامل همه‌ی همبستگی‌های غیرکلاسیکی یک سامانه که می‌تواند درهم‌تنیدگی کوانتومی جزئی از آن باشد را دربردارد [۲۴]. در این فصل به تفسیر این کمیت می‌پردازیم.

۳-۲ اطلاعات متقابل کلاسیکی

اطلاعات متقابل کلاسیکی[43] دربردارنده‌ی همه همبستگی‌های یک سامانه‌ی کلاسیکی است. در نظریه اطلاعات کلاسیکی، اطلاعات بوسیله آنتروپی شانون $H(x)=-\sum_x P_{|_{X=x}} \log_2 P_{|_{X=x}}$ که $P_{|_{X=x}}$ توزیع احتمال می‌باشد، محاسبه می‌گردد. برای دو متغیر تصادفی X و Y کل همبستگی بین آن‌ها بوسیله اطلاعات متقابل کلاسیکی اندازه‌گیری و به صورت زیر تعریف می‌شود[۴۰]،

$$I(X:Y)=H(X)+H(Y)-H(X,Y) \qquad (۱-۳)$$

این کمیت نسبت به جابه‌جایی دو متغیر X و Y متقارن است و در آن $H(X,Y)$ اطلاعات مربوط به دو متغیر X و Y می‌باشد که لزوماً از هم مستقل نیستند.

با تعریف آنتروپی شرطی Y به ازای مقادیر داده شده X به صورت $H(Y|X)=H(Y,X)-H(X)$، می‌توانیم اطلاعات متقابل کلاسیکی را به صورت زیر بازنویسی کنیم،

$$J(X:Y)=H(Y)-H(Y|X) \qquad (۲-۳)$$

---

[41] Deterministic quantum computation with one qubit
[42] Pointer state
[43] Classical mutual information