دانشگاه یزد
دانشکده ریاضی
گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
ریاضی کاربردی

حل عددی مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم

استاد راهنما: دکتر سید محمد مهدی حسینی

استاد مشاور: دکتر علی دلاور خلفی

پژوهش و نگارش: مژگان سلیمانی

شهریور ماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

در این پایان‌نامه حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب مورد نظر است. در ابتدا به بیان روش‌هایی برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با قیدهای تساوی می‌پردازیم و در ادامه، پنج الگوریتم مبتنی بر روش‌های مجموعه-فعال، نقطه درونی و لاگرانژی افزوده برای حل مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم محدب در حالت کلی مطرح می‌شود. اشاره خواهیم کرد که هریک از این الگوریتم‌ها در حالت‌های خاصی کاربرد مفیدتر و همگرایی سریع‌تری خواهند داشت و درصورتی که الگوریتم در غیر از این حالت خاص پیشنهاد شده مورد استفاده قرار گیرد با سختی‌های عددی و افزایش تعداد تکرارها تا رسیدن به جواب مساله روبرو خواهیم شد.

کلمات کلیدی: برنامه‌ریزی درجه دوم محدب، روش گرادیان مزدوج، روش مجموعه فعال، روش نقطه درونی، روش لاگرانژی افزوده.

فهرست مطالب

پ

لیست تصاویر

لیست جداول

پیشگفتار

امروزه یکی از ارکان برنامه‌ریزی و تصمیم‌گیری در اکثر شاخه‌های علمی، بهینه‌سازی است. از جمله مسائل مطرح در بهینه‌سازی، مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم است. این دسته از مسائل از آن جهت که به حل مسائل غیرخطی کمک می‌کند و دارای کاربردهای متنوع و گوناگونی است، بسیار مورد توجه قرار می‌گیرد. به‌عنوان نمونه‌ای از کاربردهای این مسائل می‌توان از تحلیل سبد کالا[۱]، ماشین‌های بردار حمایتی[۲]، بررسی ساختارها[۳]، طراحی $VLSI$[۴]، کنترل بهینه[۵]، طراحی فیلتر واکنش ناگهانی متناهی[۶]، جریان توان بهینه[۷] و مسیریابی اقتصادی[۸] نام برد. در فهرست کتب اینترنتی گولد[۹] و توانت[۱۰] به بیش از ۴۰۰ کاربرد، همراه با مرجع، از مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم اشاره شده است [۲۸].

تاکنون الگوریتم‌های متنوعی جهت حل اینگونه مسائل ارائه شده است، که به لحاظ کثرت متغیرهای تصمیم‌گیری و قیود مساله و نیز محدودیت ماشین، معیار انتخاب الگوریتم حائز اهمیت است. یک الگوریتم مطلوب باید اولاً، برای هر مساله مطرح شده، پاسخی مبنی بر وجود یا عدم وجود جواب ارائه دهد. ثانیاً از سرعت بالا و نیز از حداقل تکرارها و قدم‌های لازم جهت رسیدن به جواب بهینه برخوردار باشد و ثالثاً به لحاظ محدودیت دقت ماشین از پایداری عددی برخوردار باشد، یا حتی المقدور مقید به محدودیت‌های سخت افرازی ماشین نباشد. اکثر الگوریتم‌های ارائه شده در خصوص برنامه‌ریزی درجه دوم برای حالت‌های خاص تدوین شده‌اند.

[۱] Portfolio Analysis
[۲] Support Vector Machines
[۳] Structural Analysis
[۴] VLSI Design
[۵] Optimal Control
[۶] Finite-Impulse-Response Filter Design
[۷] Optimal Power Flow
[۸] Economic Dispatch
[۹] Gould
[۱۰] Toint

فصل ۱

مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم با قیدهای تساوی

۱.۱ مقدمه

مناسب است که همواره مطالعه‌ی روش‌های لاگرانژ با بررسی برنامه‌ریزی درجه‌دوم شروع شود، زیرا شرایط KKT[۱] در این حالت خطی هستند. به علاوه، برنامه‌ریزی درجه دوم[۲] همواره مهم است؛ به خصوص اینکه در فرموله کردن بسیاری از مسائل علمی ظاهر می‌شود، برای نمونه مسائل سرمایه‌گذاری با بازده غیر قطعی، در چارچوب این مدل قرار می‌گیرند. اما علت عمده‌ی دیگر اهمیت این مدل آن است که به عنوان روش متداول برای حل بسیاری از مسائل بهینه‌سازی با قیدهای غیرخطی مورد استفاده قرار می‌گیرد، بدین معنی که مساله اصلی با یک دنباله از مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم تقریب زده شده و از طریق این مسائل حل می‌شود.

تعریف ۱.۱.۱. مساله برنامه‌ریزی درجه دوم محدب، یکی از انواع مسائل بهینه‌سازی غیرخطی است که در واقع کمینه‌کردن تابع محدب درجه دوم نسبت به یک مجموعه از قیود خطی مدنظر است و در حالت کلی می‌تواند به‌صورت زیر بیان شود:

$$
\begin{array}{lll}
\underset{x\in\mathbb{R}^n}{min} & q(x)=\frac{1}{2}x^TGx+x^Tc & \\
s.t. & a_i^Tx=b_i & i\in\mathcal{E}, \\
 & a_i^Tx\geq b_i & i\in\mathcal{I},
\end{array}
\tag{۱.۱}
$$

[۱] Karush-Kuhn-Tucher Conditions(KKT)

[۲] Quadratic Programming

که در آن G یک ماتریس $n \times n$ متقارن نیمه معین مثبت و x، c و $\{a_i\}$، $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$، بردارهایی n تایی و $\mathcal{E}$ و $\mathcal{I}$ مجموعه‌هایی متناهی از اندیس‌ها هستند.

تابع درجه دوم $q(x)$ محدب است اگر وتنها اگر ماتریس G نیمه معین مثبت باشد و محدب اکید است اگر وتنها اگر ماتریس G معین مثبت باشد. بنابراین، اگر ماتریس G نیمه معین مثبت باشد، (۱.۱) یک مساله‌ی برنامه‌ریزی محدب است.

مسائل برنامه‌ریزی درجه دوم همیشه در تعداد متناهی از محاسبات قابل حل هستند (یا می‌توان نشان داد که نشدنی هستند). اما میزان تلاش مطلوب به‌منظور پیدا کردن جواب به ویژگی‌های تابع هدف و تعداد قیدهای نامساوی بستگی دارند.

بحث خود را از الگوریتم‌هایی برای برنامه‌ریزی درجه دوم شروع می‌کنیم که در آنها تنها قیدهای تساوی حضور دارند. رویه‌ها برای این مورد خاص، قابل اجرا برای مساله‌هایی با قیدهای نامساوی نیز هستند (در ادامه الگوریتم‌هایی را می‌بینیم که برای حل یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم در حالت کلی، در هر تکرار، نیاز به جواب یک مساله برنامه‌ریزی درجه دوم با قیدهای تساوی دارند).

۲.۱ ویژگی‌های مسائل درجه دوم با قیدهای تساوی

برای سادگی قیدهای تساوی را در قالب ماتریسی قرار داده و مساله درجه دوم مقید شده با قیدهای تساوی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{x\in\mathbb{R}^n} & q(x) = \frac{1}{2}x^TGx + x^Tc \\ \text{s.t.} & \mathrm{Ax} = \mathrm{b}, \end{array} \qquad (۲.۱)$$

که A ماتریسی $m \times n$ و ژاکوبین قیدهاست ($m \leq n$) که سطرهای آن a_i^T، $i \in \mathcal{E}$ و b برداری در $\mathbb{R}^m$ است که مولفه‌هایش b_i، $i \in \mathcal{E}$ می‌باشد. در حال حاضر فرض می‌کنیم که A رتبه سطری کامل m دارد. بنابراین قیدهای مساله‌ی (۲.۱) سازگار هستند.

شرایط لازم مرتبه‌ی اول، برای x^* به عنوان جوابی از مساله‌ی (۲.۱) بیان می‌کند که بردار

λ^* وجود دارد به‌طوری‌که در دستگاه معادلات زیر صدق می‌کند:

$$\begin{bmatrix} G & -A^T \\ A & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^* \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ b \end{bmatrix}. \qquad (۳.۱)$$

این شرایط پیامد نتایجی از شرایط بهینگی مرتبه‌ی اول می‌باشد. دستگاه (۳.۱) می‌تواند در قالبی که برای محاسبه مفیدتر است نیز بازنویسی گردد. برای این منظور x^* را به‌صورت $x^* = x + p$ در نظر می‌گیریم که x تخمینی از جواب و p گام مورد نظر می‌باشد. به‌وسیله‌ی معرفی این علائم و مرتب کردن معادله‌ها دستگاه زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} G & A^T \\ A & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}, \qquad (۴.۱)$$

$$h = Ax - b, \quad g = c + Gx, \quad p = x^* - x.$$

ماتریس بلوکی در دستگاه (۴.۱) را ماتریس کاروش-کان-تاکر می‌نامیم و به‌دنبال شرایطی هستیم که تحت آن ماتریس فوق نامنفرد باشد. Z را به‌منظور نشان دادن ماتریس $n \times (n-m)$ که ستون‌هایش پایه‌ای برای فضای پوچ A هستند، به‌کار می‌بریم و بنابراین Z مرتبه ستونی کامل دارد و در رابطه‌ی $AZ = \circ$ صدق می‌کند.

لم ۱.۲.۱. فرض کنید A رتبه سطری کامل دارد و ماتریس هسین تحویل‌یافته Z^TGZ معین مثبت است. بنابراین ماتریس

$$K = \begin{bmatrix} G & A^T \\ A & \circ \end{bmatrix}, \qquad (۵.۱)$$

نامنفرد است و بردار یکتای (x^*, λ^*) وجود دارد که در (۳.۱) صدق می‌کند.

برهان. فرض کنید بردارهای w و v وجود دارند، به‌طوری‌که

$$\begin{bmatrix} G & A^T \\ A & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = \circ\,. \qquad (۶.۱)$$

چون $Aw = \circ$، باتوجه به (۶.۱) خواهیم داشت:

$$\circ = \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} G & A^T \\ A & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ v \end{bmatrix} = w^TGw\,. \qquad (۷.۱)$$

چون w در فضای پوچ A قرار دارد، می‌توان w را به‌صورت $w = Zu$، که $u \in \mathbb{R}^{n-m}$ در نظر گرفت. بنابراین

$$\circ = w^T G w = u^T Z^T G Z u\,.$$

باتوجه به اینکه $Z^T G Z$ معین مثبت است، نتیجه می‌گیریم که $u = \circ$ و $w = \circ$. از طرفی $A^T v = \circ$ را نیز از معادله (۶.۱) داریم و مرتبه سطری کامل داشتن ماتریس A موجب می‌شود که $v = \circ$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که معادله‌ی (۶.۱) برقرار است اگر و تنها اگر $w = \circ$ و $v = \circ$ باشد. پس ماتریس فوق، نامنفرد است. □

مثال ۲.۲.۱. مساله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} \min \quad & q(x) = ۳x_۱^۲ + ۲x_۱x_۲ + x_۱x_۳ + ۲/۵x_۲^۲ + ۲x_۲x_۳ + ۲x_۳^۲ - ۸x_۱ - ۳x_۲ - ۳x_۳, \\ s.t. \quad & x_۱ + x_۳ = ۳, \\ & x_۲ + x_۳ = \circ. \end{aligned} \tag{۸.۱}$$

با استفاده از ماتریس‌ها و بردارهای زیر می‌توان مساله را در قالب (۲.۱) بازنویسی کرد:

$$G = \begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -۸ \\ -۳ \\ -۳ \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} ۱ & \circ & ۱ \\ \circ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} ۳ \\ \circ \end{bmatrix}.$$

حال با استفاده از دستگاه (۴.۱) و در نظر گرفتن $x \in \mathbb{R}^۳$، به‌عنوان تقریبی از x^*، جواب کمینه‌کننده بهینه و ضریب لاگرانژ بهینه به‌صورت

$$x^* = (۲, -۱, ۱)^T, \qquad \lambda^* = (۳, -۲)^T, \tag{۹.۱}$$

حاصل می‌گردند. با توجه به رابطه (ب.۲۶) و در نظر گرفتن $N = (۱, ۱)^T$، ماتریس پایه فضای پوچ Z را می‌توان به‌صورت $(-۱, -۱, ۱)^T$ در نظر گرفت. $Z^T G Z$ معین مثبت است، پس بنابر لم ۱.۲.۱، بردار (x^*, λ^*) جواب یکتای مساله (۸.۱) می‌باشد.

به‌نظر می‌رسد وقتی شرایط لم ۱.۲.۱ برقرار هستند، برداری یکتا به‌صورت (x^*, λ^*) وجود دارد که در شرایط لازم مرتبه اول برای مساله (۲.۱) صدق می‌کند. در حقیقت این بردار یکتا شرایط کافی مرتبه دوم را نیز برقرار می‌سازد. در نتیجه x^* یک کمینه‌کننده اکید موضعی برای

مساله‌ی (۲.۱) می‌باشد و می‌توان با یک برهان مستقیم نشان داد که x^* یک جواب سراسری نیز هست.

قضیه ۳.۲.۱. فرض کنید که A رتبه سطری کامل دارد و ماتریس هسین تحویل‌یافته Z^TGZ معین مثبت است. بنابراین بردار x^* که در دستگاه (۳.۱) صدق می‌کند جواب یکتای سراسری مساله (۲.۱) می‌باشد.

برهان. فرض کنید x هر نقطه‌ی شدنی به جز x^* باشد. تفاضل $x^* - x$ را با p نشان می‌دهیم. چون $Ax^* = Ax = b$ پس $Ap = 0$. با جایگذاری p در تابع هدف مساله (۲.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} q(x) &= \tfrac{1}{2}(x^* - p)^T G(x^* - p) + c^T(x^* - p) \\ &= \tfrac{1}{2}p^T Gp - p^T Gx^* - c^T p + q(x^*). \end{aligned} \tag{۱۰.۱}$$

با توجه به معادله‌ی $Gx^* = -c + A^T\lambda$، از دستگاه (۳.۱) و $Ap = 0$، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$p^T Gx^* = p^T(-c + A\lambda^*) = -p^T c.$$

با جایگذاری این رابطه در (۱۰.۱)، رابطه‌ی

$$q(x) = \frac{1}{2}p^T Gp + q(x^*),$$

را خواهیم داشت. با توجه به اینکه p در فضای پوچ A قرار دارد، می‌توان p را به‌صورت $p = Zu$ که $u \in \mathbb{R}^{(n-m)}$ در نظر گرفت. بنابراین

$$q(x) = \frac{1}{2}u^T Z^T GZu + q(x^*).$$

با استفاده از معین مثبت بودن Z^TGZ می‌توان نتیجه گرفت، به جز وقتی که $u = 0$ است، نامساوی $q(x) > q(x^*)$ برقرار است و $u = 0$ زمانی رخ می‌دهد که $x = x^*$ باشد. پس x^* جواب سراسری و یکتای (۲.۱) می‌باشد. □

وقتی که ماتریس هسین تحویل‌یافته Z^TGZ نیمه معین مثبت با مقدار ویژه صفر باشد، بردار x^* که در (۳.۱) صدق می‌کند یک کمینه‌کننده موضعی است، اما اکید نیست. اگر ماتریس فوق مقدار ویژه منفی داشته باشد، آنگاه x^* تنها یک نقطه‌ی ایستا است و کمینه‌کننده موضعی نیست. به‌منظور اثبات این ادعا، فرض کنید بردار (x^*, λ^*) که در شرایط KKT (۳.۱)، صدق می‌کند، وجود دارد و u برداری است که به ازای آن $u^TZ^TGZu < 0$. قرار می‌دهیم $p = Zu$. برای هر α خواهیم داشت:

$$A(x^* + \alpha p) = b.$$

در نتیجه $x^* + \alpha p$ نقطه‌ای شدنی است و

$$\begin{aligned} q(x^* + \alpha p) &= q(x^*) + \alpha p^T(Gx^* + c) + \tfrac{1}{2}p^TGp \\ &= q(x^*) + \tfrac{1}{2}p^TGp \\ &< q(x^*), \end{aligned} \tag{۱۱.۱}$$

که این نامساوی از این حقیقت که $Gx^* + c = A^T\lambda^*$ و $p^TA^T = u^TZ^TA^T\lambda^* = 0$ نتیجه می‌شود. بنابراین برای هر x^* صادق در شرایط KKT (۳.۱)، می‌توان جهت شدنی p را یافت که در طول آن q کاهش می‌یابد. این امر یعنی همیشه می‌توان یک جهت اکیداً کاهشی برای q از نقطه x^* یافت، مگر اینکه Z^TGZ مقدار ویژه منفی نداشته باشد. نامساوی اخیر همچنین نشان می‌دهد که اگر Z^TGZ نیمه معین مثبت باشد، مساله (۲.۱) جواب موضعی دارد که اکید نیست.

۳.۱ جوابی مستقیم از دستگاه KKT

در این بخش در مورد روش‌های موثر برای حل کردن دستگاه KKT (۳.۱)، بحث می‌کنیم. اولین مشاهده مهم این است که اگر $m \geq 1$ باشد، ماتریس KKT همیشه نامعین است.

تعریف ۱.۳.۱. لختی[۳] ماتریس متقارن K، را سه تایی (n_+, n_-, n_0) تعریف می‌کنیم که به

[۳] Inertia

ترتیب تعداد مقدار ویژه‌های مثبت، منفی و صفر را نشان می‌دهد:

$$inertia(K) = (n_+, n_-, n_\circ)$$

قضیه ۲.۳.۱. فرض کنید K به‌وسیله (۵.۱) مشخص شده و مرتبه‌ی سطری A برابر m باشد. سپس

$$inertia(K) = inertia(Z^T GZ) + (m, m, \circ).$$

بنابراین اگر $Z^T GZ$ معین مثبت باشد، $inertia(K) = (n, m, \circ)$.

برهان. به‌منظور بررسی برهان به [۱۹] مراجعه شود. □

مثال ۲.۲.۱ فرض‌های قضیه ۲.۳.۱ را برقرار می‌سازد. بنابراین اگر ماتریس ۵×۵، K متناظر با مساله (۸.۱) را بسازیم، با استفاده از اطلاعات این مثال و قضیه ۲.۳.۱، خواهیم دید که:

$$inertia(K) = (۳, ۲, \circ).$$

۱.۳.۱ تجزیه دستگاه KKT

یک انتخاب برای حل دستگاه (۳.۱)، استفاده از تجزیه مثلثی[۴] ماتریس KKT و سپس جایگذاری پیشرو و پسرو به‌وسیله عامل‌های مثلثی است. چون طبق قضیه ۲.۳.۱ ماتریس KKT نامعین است، از تجزیه چولسکی[۵] نمی‌توان استفاده کرد. با استفاده از روش حذف گوسی[۶] (با محوریابی جزئی) نیز می‌توان عامل‌های L و U را محاسبه کرد. اما این روش یک عیب دارد و آن این است که از تقارن ماتریس KKT چشم پوشی می‌کند. راهکاری که در این حالت موثرتر می‌باشد، استفاده از تجزیه‌ی نامعین متقارن[۷] می‌باشد (در آ.۲ درمورد این روش تجزیه توضیح داده شده است). این تجزیه برای ماتریس متقارن K قالبی به شکل زیر دارد:

$$P^T KP = LBL^T \ , \tag{۱۲.۱}$$

[۴] Triangular Factorization
[۵] Cholesky Factorization
[۶] Gaussian Elimination
[۷] Symmetric Indefinite Factorization

که ماتریس P یک ماتریس جایگشتی، L ماتریسی پایین مثلثی و B ماتریسی بلوکی قطری با بلوک‌های ۱×۱ یا ۲×۲ می‌باشد. جایگشت‌های متقارن تعریف شده توسط ماتریس P برای حفظ پایداری عددی محاسبات در حالی که K بزرگ و تنک می‌باشد، معرفی شده‌اند. ارزش و هزینه محاسباتی تجزیه (۱.۱۲) در حدود نصف هزینه محاسباتی روش حذفی گوسی تنک[۸] می‌باشد.

به‌منظور حل دستگاه (۱.۳) ابتدا تجزیه‌ی نامعین متقارن را بر ماتریس ضرائب انجام می‌دهیم و سپس عملیات زیر را برای رسیدن به جواب پیگیری می‌کنیم:

۱) دستگاه $Lz = P^T \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$ را به‌منظور به دست آوردن z حل کن.

۲) دستگاه $B\hat{z} = z$ را به‌منظور به‌دست آوردن $\hat{z}$ حل کن.

۳) دستگاه $L^T\bar{z} = \hat{z}$ را به‌منظور به‌دست آوردن $\bar{z}$ حل کن.

۴) قرار بده: $P\bar{z} = \begin{bmatrix} -p \\ \lambda^* \end{bmatrix}$.

ضرب ماتریس جایگشت P یا P^T در یک بردار، به‌صورت چند جابه‌جایی ساده در مولفه‌های بردار انجام می‌شود، که عملیاتی کم هزینه می‌باشد. حل دستگاه $B\hat{z} = z$ مستلزم حل کردن تعدادی دستگاه کوچک (۱×۱) یا (۲×۲) می‌باشد، بنابراین تعداد عملیات لازم برابر مضرب کوچکی از $m + n$ می‌باشد، که همچنان کم هزینه به‌شمار می‌آید. اما جانشین‌سازی مثلثاتی با L یا L^T هزینه‌بر است. هزینه دقیق آن، وابسته به میزان تنکی مساله است، اما معمولاً به مقدار قابل توجهی کمتر از هزینه محاسباتی تجزیه (۱.۱۲) می‌باشد. این روش تجزیه برای ماتریس KKT، $(n + m) \times (n + m)$، در بسیاری از مسائل کاملاً موثر می‌باشد. اما سختی استفاده از این تجزیه زمانی است که L به اندازه ماتریس اصلی تنک نباشد، در واقع از ماتریس اصلی چگال‌تر گردد.

آنچه تاکنون آن را نادیده گرفته‌ایم، تاثیر انتخاب بلوک‌های محوری E روی تنک شدن ماتریس L یا بزرگ شدن درایه‌های ماتریس L می‌باشد. در نظر گرفتن این موضوع زمانی مهم

[۸] Sparse Gaussian Elimintion

می‌شود که با مساله در ابعاد بزرگ روبرو هستیم. در این حالت در گام‌های ۱ و ۳ تعداد عملیات قابل توجهی برای تجزیه L نیاز داریم. در نتیجه بزرگ شدن بعد L، تنکی و بزرگی درایه‌های آن قابل اهمیت می‌شوند، چون این عوامل بر زمان cpu و میزان ذخیره‌سازی به‌طور قابل توجهی تاثیر گذار هستند. به‌منظور بهبود وضعیت، راهکارهای پیشنهادی در [۱۲، ۱۴، ۱۷] را می‌توان مورد بررسی قرار داد.

مثال ۳.۳.۱. مساله (۸.۱) در مثال ۲.۲.۱ را در نظر بگیرید. با تشکیل ماتریس KKT و تجزیه نامعین متقارن (بلوک‌های محوری E با روشی که در آ.۲ بیان شده، انتخاب شده‌اند) خواهیم داشت:

$$K = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/1923 & 0/9615 & 0 \\ 0 & 0 & 0/9615 & -0/1933 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0/3250 \end{bmatrix},$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0/0385 & 0/3846 & 1 & 0 & 0 \\ 0/1923 & -0/0769 & 0 & 1 & 0 \\ -0/0769 & 0/2308 & 0/1251 & 0/2245 & 1 \end{bmatrix}, \quad P = \mathbf{I}_{5\times 5}.$$

با استفاده از تجزیه انجام شده و در نظر گرفتن $x = (0, 0, 0)$ عملیات زیر را انجام می‌دهیم:

۱. با حل دستگاه $Lz = P^T \begin{bmatrix} g \\ h \end{bmatrix}$، خواهیم داشت:

$$z = (-8, -3, -1/5384, -1/6923, 0/6493).$$

۲. با حل دستگاه $B\hat{z} = z$، $\hat{z} = (-۱/۳۰۷۷, -۰/۰۷۶۹, -۱/۲۴۸۴, ۲/۵۴۴۹, -۱/۹۹۷۹)$ حاصل می‌شود.

۳. جواب دستگاه $L^T\bar{z} = \hat{z}$، برابر $\bar{z} = (-۱/۹۹۸۶, ۰/۹۹۸۴, -۰/۹۹۸۵, ۲/۹۹۳۴, -۱/۹۹۷۹)$ خواهد شد.

۴. در نهایت با قرار دادن $\left[\begin{array}{c} -p \\ \lambda^* \end{array}\right] = P\bar{z}$ و در نظر گرفتن $p = x^* - x$ خواهیم داشت:

$$x^* = (۱/۹۹۸۶, -۰/۹۹۸۴, ۰/۹۹۸۵), \qquad \lambda^* = (۲/۹۹۳۴, -۱/۹۹۷۹). \qquad (۱۳.۱)$$

همان‌طور که در آ.۲ هم اشاره شده است، تجزیه نامعین متقارن با خطای گرد کردن همراه است و همین خطا موجب تفاوت ظاهر شده در (۱۳.۱) و (۹.۱) می‌باشد.

۲.۳.۱ روش مکمل شور

ماتریس G را معین مثبت درنظر می‌گیریم، به‌منظور به‌دست آوردن یک دستگاه خطی بر حسب λ^*، معادله اول دستگاه (۳.۱) را در $AG^{-۱}$ ضرب کرده وسپس از معادله دوم کم می‌کنیم:

$$(AG^{-۱}A^T)\lambda^* = (AG^{-۱}g - h). \qquad (۱۴.۱)$$

دستگاه مثبت معین متقارن به‌دست آمده را برای λ^* حل می‌کنیم و سپس با استفاده از معادله اول (۳.۱)، p را به‌دست می‌آوریم:

$$Gp = A^T\lambda^* - g. \qquad (۱۵.۱)$$

اگر سطر اول ماتریس (۴.۱) را در $-AG^{-۱}$ ضرب کرده، با سطر دوم آن جمع کرده و حاصل را در سطر دوم جایگزین کنیم، ماتریس زیر را خواهیم داشت:

$$\left[\begin{array}{cc} G & A^T \\ ۰ & -AGA^T \end{array}\right] \qquad (۱۶.۱)$$

در اصطلاح علمی به ماتریس $AG^{-۱}A^T$، مکمل شور[۹] ماتریس G در ماتریس K (۵.۱)، گفته می‌شود. به‌وسیله اعمال این رویه حذفی بلوکی برای دستگاه (۴.۱) روابط (۱۴.۱) و (۱۵.۱)

[۹] Schur Complement

به‌دست می‌آیند.

از روشی مشابه روش مکمل شور به‌منظور به‌دست آوردن یک فرمول صریح برای معکوس ماتریس KKT در (۴.۱) استفاده می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} G & A^T \\ A & ۰ \end{bmatrix}^{-۱} = \begin{bmatrix} C & E \\ E^T & F \end{bmatrix}, \tag{۱۷.۱}$$

که در آن

$$C = G^{-۱} - G^{-۱}A^T(AG^{-۱}A^T)^{-۱}AG^{-۱},$$

$$E = G^{-۱}A^T(AG^{-۱}A^T)^{-۱},$$

$$F = -(AG^{-۱}A^T)^{-۱}.$$

حال جواب (۴.۱) می‌تواند به‌وسیله ضرب تساوی (۴.۱) از طرف راست در این معکوس به‌دست آید.

مثال ۴.۳.۱. با در نظر گرفتن مساله (۸.۱)، تشکیل دستگاه (۱۴.۱) و با هر انتخاب $x \in \mathbb{R}^۳$، که در اینجا $x = (-۱, ۵, ۲)$ را مدنظر قرار داده‌ایم، می‌توان به‌محاسبه λ^* پرداخت:

$$\begin{bmatrix} ۰/۴۸۱۹ & ۰/۱۰۸۴ \\ ۰/۱۰۸۴ & ۰/۳۴۹۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_۱^* \\ \lambda_۲^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱/۲۲۸۹ \\ -۰/۳۷۳۵ \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda^* = \begin{bmatrix} ۳ \\ -۲ \end{bmatrix} \tag{۱۸.۱}$$

با استفاده از λ^* و (۱۵.۱) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} ۶ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۵ & ۲ \\ ۱ & ۲ & ۴ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_۱^* + ۱ \\ x_۲^* - ۵ \\ x_۳^* - ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۵ \\ -۲۶ \\ -۱۳ \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x^* = \begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \\ ۱ \end{bmatrix} \tag{۱۹.۱}$$

۳.۳.۱ روش فضای پوچ

اکنون فرض کنیم شرایط لم ۱.۲.۱ برقرار باشد، یعنی A رتبه سطری کامل دارد و Z^TGZ معین مثبت است. همچنین نیاز است که اطلاعاتی از ماتریس پایه فضای پوچ، Z، داشته