دانشگاه هرمزگان

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته ریاضی محض

عنوان:

معادلات دیفرانسیل تصادفی کسری و کاربرد آن در منابع مالی

استاد راهنما:

دکتر مجید کریمی

نگارش:

مریم نورالدین

شهریور ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

در این پایان‌نامه مدل پیشرفته‌ای از یک پدیده اقتصادی مورد بررسی قرار گرفته است و شرایط مطلوب برای جواب عاری از آربیتراژ معرفی گردیده است.

مهمترین ابزار برای مطالعه‌ی این گونه پدیده‌های اقتصادی، معادلات دیفرانسیل تصادفی است. بحث معادلات دیفرانیسل تصادفی یکی از پیچیده‌ترین مباحث ریاضیات می‌باشد که در عین حال کاربردهای فراوانی نیز دارد و برای مطالعه‌ی دقیق و عمیق آن باید به موضوعاتی مانند آنالیز حقیقی و نظریه‌های احتمال تسلط کافی داشته باشیم لذا در این پایان نامه ابتدا تعاریف و مقدماتی از آنالیز و احتمال را مورد مطالعه قرار داده ایم سپس در فصل دوم فرم کلی معادله دیفرانیسل تصادفی معرفی گردیده است و قضایای وجود و یکتایی جواب آورده شده‌اند. در فصل سوم حرکت براونی کسری و معادلات دیفرانسیل تصادفی کسری را آورده‌ایم و در نهایت در فصل چهارم مدل بلک شولز به عنوان یک مدل ریاضی از یک مساله‌ی اقتصادی را به عنوان نمونه‌ای از کاربرد معادلات دیفرانیسل تصادفی بررسی کرده‌ایم.

واژگان کلیدی: مشتق کسری، انتگرال کسری، حرکت براونی، معادلات دیفرانسیل تصادفی، مدل بلک شولز.

سپاسگزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که با لطف بی‌کران خود، آدمی را زیور عقل آراست و به واسطه نور علم و معرفت او را از ظلمت جهل و ضلالت به روشنایی هدایت و سعادت می‌رساند.

اینک که با لطف و یاری خداوند متعال موفق به انجام این تحقیق شده‌ام لازم است از زحمات بی شائبه استاد ارجمند، جناب دکتر مجید کریمی تشکر و قدردانی کنم و از محبت‌های بی دریغ ایشان در طول انجام این تحقیق و نگارش این پایان نامه خالصانه سپاسگزارم.

از استادان ارجمند، جناب آقای دکتر دولت آبادی و جناب آقای دکتر سبزواری که داوری آنان در این پایان نامه باعث افتخار من بوده، کمال تشکر را دارم. همچنین از دیگر اساتید بزرگوار، آقای دکتر احمدی، آقای دکتر مقدری و خانم دکتر محمدحسنی که در محضرشان کسب علم و تجربه کردم تشکر فراوان را دارم.

و در پایان از خانواده‌ی مهربانم که همواره پشتوانه محکمی برایم بوده‌اند نیز صمیمانه قدردانی می‌کنم.

امید است بتوانم بخش کوچکی از زحمات هر آنکس که مرا در این راه یاری نمود جبران نمایم، باشد که این کوچکترین بخشی از زحمات آنان را سپاس گوید.

مریم نورالدین

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیشگفتار

معادله دیفرانسیل تصادفی که به اختصار SDE می‌نامند، معادله‌ای است که در آن یک یا چند متغیر آن، فرآیند تصادفی باشد و در نهایت جواب این معادلات نیز یک فرآیند تصادفی است.

معادلات دیفرانسیل تصادفی برای مدل کردن پدیده‌های تصادفی مانند تغییرات قیمت سهام[۹]، تغییرات سیستم‌های مختلف از قبیل دینامیک جمعیت و سیستم‌های حرارتی به کار می‌روند. معمولا این معادلات نویز سفید [۱] را به عنوان مشتق حرکت براونی در خود جای داده‌اند. اولین بار رابرت براون [۲] در سال ۱۸۲۸ مشاهده کرد که گرده گیاه در درون مایع دارای حرکت است. انیشتین [۳] در سال ۱۹۰۵ ثابت کرد که حرکت این ذرات به دلیل بمباران مولکول‌های مایع است.

مانند حرکت براونی، حرکت براونی کسری نیز کاربردهای فراوانی دارد و در مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی و اقتصادی و غیره به کار گرفته می‌شود. حرکت براونی کسری تعمیمی یک پارامتری از حرکت براونی استاندارد است. این پارامتر که به پارامتر هرست [۴] معروف است و با H نشان داده می‌شود در بازه‌ای از $(۰,۱)$ تغییر می‌کند. در حالت $H = \frac{۱}{۲}$ حرکت براونی کسری، متناظر با حرکت براونی استاندارد است. هارولد ادوین هرست [۵] یک آب شناس انگلیسی بود که یکی از تحقیقاتش مطالعه و بررسی رودخانه نیل جهت پیش بینی تعداد طغیان‌ها در یک سال بود. او آزمایشی طراحی کرد و نشان داد که نوسانات سطح آب رود نیل دارای همبستگی طولانی مدت هستند. حرکت براونی کسری غیر استاندارد، در حالت $H > \frac{۱}{۲}$ دارای این خاصیت است و از این رو به عنوان مثال، برای مدل سازی ارتفاع آب یک رودخانه در یک بازه زمانی مشخص می‌تواند دارای کاربرد باشد و این در حالی است که حرکت براونی استاندارد به دلیل مستقل بودن نموهایش یک نویز بی‌حافظه است و از این رو برای توصیف پدیده‌هایی که نوسانات آن‌ها در بازه‌های مجزا دارای همبستگی

[۱] White noise [۲] R.Brown [۳] A.Einstein [۴] Hurst [۵] Harold Edwin Hurst

هستند نمی‌تواند مناسب باشد.

حرکت براونی استاندارد، مارتینگل است در حالی که حرکت براونی کسری در حالت $H \neq \frac{۱}{۲}$ (در حالت غیر استاندارد) مارتینگل و حتی نیم‌مارتینگل نیست. از این رو مطالعه‌ی این فرآیندها مشکل تر است. به عنوان مثال چون حرکت براونی کسری غیر استاندار، نیم‌مارتینگل نیست نمی‌توان از حسابان ایتو برای تعریف انتگرال تصادفی استفاده کرد. مندلبرات و ون نس [۱] در سال ۱۹۶۸ اصطلاح حرکت براونی کسری را به عنوان یک انتگرال تصادفی نسبت به حرکت براونی استاندارد تعریف کردند.

معادله دیفرانسیل تصادفی کسری با استفاده از حرکت براونی کسری تعریف می‌شود و کاربردهای زیادی در مخابرات، انتشار نور و گرما و حتی در ساخت دستگاه بینایی سنجی دارد و اشخاصی چون دیونگ [۲]، کارمونا [۳]، ... به مطالعه‌ی این رده از فرآیندهای تصادفی با دیدگاه‌های مختلف پرداخته‌اند.

یکی از کاربردهای حرکت براونی کسری و معادلات دیفرانسیل تصادفی کسری در ریاضیات مالی است که در این پایان نامه به آن اشاره می‌کنیم.

رویکرد نوین به حل مساله قیمت‌گذاری و مشتقات مالی، اندکی بیش از یک قرن قدرت دارد و ریشه‌های آن را باید در آثار ریاضی‌دان فرانسوی، لویس بشیلیه [۴] جستجو کرد. وی در رساله دکترایش در سال ۱۹۰۰ موضوعاتی اساسی مانند حرکت براونی و مدل‌سازی ریاضی بازارهای مالی را بررسی کرده‌است. بدین ترتیب بشیلیه پنج سال پیش از انتشار مقاله مشهور انیشتین درباره حرکت براونی از آن در مدل‌سازی‌های خود استفاده کرده‌است.

مهمترین پیشرفت در ریاضیات مالی مربوط به معادله بلک-شولز [۵] برای ارزش گذاری امتیازها و ادعاهای مشروط است که در سال ۱۹۷۳ به چاپ رسید. این مدل که توسط دو اقتصاددان به نام‌های فیشر بلک و مایرون شولز معرفی شده‌است به صورت مجموعه‌ای از معادلات است که اولین ابزار کمیتی برای محاسبه قیمت اختیارها محسوب می‌شود.

از آنجایی که حرکت براونی کسری بر خلاف حرکت براونی، دارای خاصیت همبستگی نموها می‌باشد در سال‌های اخیر توجه ریاضی‌دانان و اقتصاددانان به این امر معطوف شده است که می‌توانند با جایگزینی حرکت براونی کسری به جای حرکت براونی به معادلاتی دست یابند که دارای الگوهای تکراری باشد [۵،۶،۷،۱۲،۱۳]

[۱] Mandelbrot-Van Ness [۲] Dung [۳] Carmona [۴] Louis Bechelier [۵] Black-Scholes

و این موضوع در علوم مختلف مخصوصا ریاضیات مالی و اقتصاد کاربرد زیادی دارد. در این پایان نامه از حرکت براونی کسری به جای حرکت براونی استفاده می‌کنیم.

همچنین در این پایان نامه به مفهوم فرصت آربیتراژ در دنیای اقتصاد می‌پردازیم که در بازار کارآمد و کامل از اهمیت زیادی برخوردار می‌باشد. در واقع نبود فرصت آربیتراژ در بازار، این امکان را بوجود می‌آورد که تمام کسانی که در بازار سرمایگذاری می‌کنند دارای یک فرصت یکسان می‌باشند. شاید کسی فکر کند که این فرصت باعث ثبات قیمت در بازار می‌شود ولی اساس کار یک بازار خوب و کارآمد نبود این فرصت می‌باشد تا اشخاصی که به آنها آربیتراژگران می‌گویند نتوانند از این فرصت‌ها استفاده کنند. در واقع اگر قیمت یک سهام مشخص در قسمت‌های مختلف بازار یکسان باشد این فرصت بوجود نمی‌آید.

از آنجایی که موضوع این پایان‌نامه ارتباط زیادی با فرآیندهای تصادفی دارد سعی شده‌است تعاریف مهم و ضروری برای این پایان نامه در فصل اول ذکر شود و قضایای مربوط به آمار و فرآیندهای تصادفی بدون اثبات ولی با ذکر مرجع آورده شود.

فصل ۱

تعاریف مقدماتی

۱.۱ مقدماتی بر فرآیندهای تصادفی و فضای فیلتر شده

در هر مدل برای یک آزمایش تصادفی، داده‌های حاصل از آزمایش، تشکیل مجموعه‌ای به نام فضای داده‌ها می‌دهد که با Ω نشان می‌دهیم. مقصود از یک فضای نمونه (پیشامد) در این آزمایش، یک زیر مجموعه‌ی از Ω است اما معمولا در بررسی‌ها فقط برخی از زیر مجموعه‌های Ω مورد بررسی قرار می‌گیرد. گردایه حاصل از این پیشامدها به شرط آنکه دارای برخی خواص مطلوب باشد را میدان سیگمایی می‌نامیم.

تعریف ۱.۱.۱. برای هر مجموعه Ω، زیر مجموعه $\mathcal{F}$ از Ω را یک میدان گوییم اگر:

۱) $\emptyset, \Omega \in \mathcal{F}$.

۲) اگر $A \in \mathcal{F}$ آنگاه $A^c \in \mathcal{F}$ که در آن A^c متمم مجموعه A است.

۳) اگر $A, B \in \mathcal{F}$ آنگاه $A \cup B \in \mathcal{F}$.

مثال ۲.۱.۱.

۱) $\{\emptyset, \Omega\}$ را یک میدان بدیهی می‌نامیم و با $\mathcal{F}_\circ$ نمایش می‌دهیم.

۲) $\{\emptyset, \Omega, A, \bar{A}\}$ را میدان تولید شده بوسیله مجموعه‌ی A می‌نامیم و با $\mathcal{F}_A$ نمایش می‌دهیم.

۳) $\{A; A \subseteq \Omega\}$ میدان همه‌ی زیر مجموعه‌های Ω می‌باشد و بصورت ۲^Ω نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱. برای هر مجموعه‌ی Ω، زیر مجموعه‌ی $\mathcal{F}$ از Ω را یک میدان سیگمایی گوییم اگر علاوه بر ۳ ویژگی بالا، در ویژگی زیر صدق کند:

اگر $A_i \in \mathcal{F}$ برای هر $i \in \mathbb{N}$ آنگاه $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

مثال ۴.۱.۱ (میدان سیگمایی بورل). برای هر خانواده $\mathcal{U}$ از زیر مجموعه Ω، کوچکترین میدان سیگمایی که شامل $\mathcal{U}$ باشد را با $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ نمایش می‌دهیم و آن را میدان تولید شده توسط $\mathcal{U}$ می‌نامیم. به طور مثال، اگر $\mathcal{U}$ مجموعه‌ای از همه‌ی زیر مجموعه‌های باز از فضای توپولوژی Ω باشد (به عنوان مثال $\Omega = \mathbb{R}^n$) آنگاه $\mathcal{B} = \mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ را یک میدان سیگمایی بورل روی Ω می‌نامیم و هر عضو $B \in \mathcal{B}$ را یک مجموعه‌ی بورل می‌نامیم. $\mathcal{B}$ شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های باز، همه‌ی زیر مجموعه‌های بسته، همه‌ی اجتماعهای شمارش پذیر و همه‌ی اشترک های شمارش پذیر می‌باشد.

با قرار دادن یک اندازه در زوج مرتب $(\Omega, \mathcal{F})$ می توان یک فضای اندازه ساخت.

تعریف ۵.۱.۱. یک اندازه احتمال P روی فضای اندازه $(\Omega, \mathcal{F})$ یک تابع $P : \mathcal{F} \longrightarrow [۰, ۱]$ است که

۱) $P(\Omega) = ۱, P(\emptyset) = ۰$.

۲) اگر $A_۱, A_۲, ... \in \mathcal{F}$ و $\{A_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از مجموعه‌ای دوبه دو مجزا باشند آنگاه

$$P\left(\bigcup_{i=۱}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=۱}^{\infty} P(A_i).$$

سه تایی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را فضای احتمال گوییم . همچنین آن را یک فضای احتمال کامل می‌نامیم اگر $\mathcal{F}$ شامل همه‌ی زیر مجموعه‌های G از Ω با P -اندازه خارجی صفر باشد، یعنی

$$P^*(G) := \inf\{P(F); F \in \mathcal{F}, G \subset F\} = ۰.$$

تعریف ۶.۱.۱. یک فیلتر افزایشی $\mathbb{F}$ روی $(\Omega, \mathcal{F})$، خانواده‌ای از میدان‌های سیگمایی $\mathcal{F}$ بصورت

$$\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_۰, ..., \mathcal{F}_t, ..., \mathcal{F}_T\}$$

می‌باشد که برای هر $t \geq ۰$، $\mathcal{F}_t \in \mathbb{F}$ و اگر $۰ \leq s \leq t$ آنگاه $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

در واقع فیلتر $\mathbb{F}$ مدلسازی جریان اطلاعات با گذشت زمان می‌باشد و مشاهده می‌کنیم که اطلاعات با افزایش زمان بیشتر و بیشتر می‌شوند.

اگر $\mathcal{F}_۰$ شامل تمام مجموعه‌های با اندازه صفر باشد و فیلتر $\mathbb{F}$ از راست پیوسته باشد، یعنی برای هر $۰ \leq t \leq \infty$،

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t}(\mathcal{F}_s),$$

آنگاه فیلتر $\mathbb{F}$ را استاندارد گوییم.

در سراسر این پایان‌نامه فقط فیلترهای استاندارد در نظر گرفته شده‌است.

مثال ۷.۱.۱. $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_۰, \mathcal{F}_A, ۲^{\Omega}\}$ مثالی از یک فیلتر می‌باشد.

تعریف ۸.۱.۱. یک زیر مجموعه‌ی $A \in \Omega$ را $\mathcal{F}$ - اندازه‌پذیر گوییم هرگاه $A \in \mathcal{F}$.

تعریف ۹.۱.۱. یک متغیر تصادفی X یک تابع $\mathcal{F}$ - اندازه‌پذیر از Ω به $\mathbb{R}^n$ است.

مجموعه‌ی اندیس‌گذار $\mathbb{T}$ را بازه $[\circ, \infty)$ در نظر می‌گیریم اما می‌توان بازه $[a, b]$ از اعداد نامنفی را در نظر گرفت.

تعریف ۱۰.۱.۱. گردایه‌ای از متغیرهای تصادفی حقیقی مقدار $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را یک فرآیند تصادفی گوییم.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرآیند تصادفی X تحت فیلتر $\mathcal{F}$ را سازگار گوییم اگر برای هر $t \in [\circ, \infty)$، X_t $\mathcal{F}_t$ -اندازه پذیر باشد.

تعریف ۱۲.۱.۱. برای هر $\omega \in \Omega$ تابع

$$t \longrightarrow X_t(\omega), \quad t \in \mathbb{T}$$

را یک مسیر از فرآیند تصادفی گوییم و اگر این مسیر پیوسته باشد آنگاه فرآیند را پیوسته می‌خوانند.

توجه کنید برای هر $t \in T$ که ثابت باشد، یک متغیر تصادفی X_t به صورت $X_t(\omega) \longrightarrow \omega$ داریم که مانند تعریف بالا یک مسیر از فرآیند تصادفی نامیده می‌شود. بنابراین می‌توان یک فرآیند را بصورت یک تابع دو متغیره $X(t, \omega) \longrightarrow (t, \omega)$ در نظر گرفت. این مطلب نقطه‌ی شروع آنالیز تصادفی است.

تعریف ۱۳.۱.۱. کوچکترین میدان سیگمایی که شامل همه‌ی مجموعه‌های بفرم $\{a \leq X_u \leq b\}$ برای هر $t \leq u \leq \circ$ و $a, b \in \mathbb{R}$ باشد را میدان سیگمایی تولید شده توسط فرآیندهای تصادفی گوییم.

تعریف ۱۴.۱.۱. یک تابع $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ را $\mathcal{F}$ - اندازه پذیر گوییم اگر برای هر مجموعه باز $U \subseteq \mathbb{R}^n$ داشته باشیم

$$Y^{-۱}(U) := \{\omega \in \Omega; Y(\omega) \in U\} \in \mathcal{F}.$$

برای هر متغیر تصادفی، یک اندازه احتمال μ_X روی $\mathbb{R}^n$ بوسیله

$$\mu_X(B) = P(X^{-۱}(B))$$

تعریف می‌کنیم که آن را μ_X، تابع توزیع X می‌نامیم.

اگر $\int_\Omega |X(\omega)|dP(\omega) < \infty$ آنگاه عدد

$$E(X) := \int_\Omega X(\omega)dP(\omega) = \int_{R^n} d\mu_X(x)$$

را امید ریاضی و

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y),$$

تابع کوواریانس (همبستگی) می‌نامیم. همچنین $Cov(X,X)$ را واریانس X گوییم که به صورت $Var(X) = E(X^۲) - (E(X))^۲$ می‌باشد.

تعریف ۱۵.۱.۱. دو زیر مجموعه $A, B \in \mathcal{F}$ را مستقل از هم گوییم اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \cap P(B).$$

این تعریف برای تعداد متناهی از متغیرها قابل تعمیم است.

اگر دو متغیر تصادفی و $X, Y : \Omega \longrightarrow R$ مستقل باشند آنگاه

$$E(XY) = E(X)E(Y),$$

به شرطی که $E(|X|) < \infty$ و $E(|Y|) < \infty$.

تعریف ۱۶.۱.۱ (امید شرطی نسبت به میدان سیگمایی). اگر Y یک متغیر تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و $\mathcal{G}$ یک زیر میدان سیگمایی $\mathcal{F}$ باشد و همچنین اگر $E[Y]$ وجود داشته باشد، آنگاه تابع $E[Y|\mathcal{G}]$وجود دارد بطوریکه برای هر $\mathcal{C} \in \mathcal{G}$

$$\int_\mathcal{C} Y dP = \int_\mathcal{C} E[Y|\mathcal{G}]dP.$$

این تابع که تقریبا همه جا نسبت به P یکتا است، امید شرطی Y نسبت به $\mathcal{G}$ نام دارد.

گزاره ۱۷.۱.۱. *احکام زیر برای امید شرطی برقرار است:*

۱) *اگر Y نسبت به $\mathcal{G}$ اندازه پذیر باشد آنگاه تقریبا همه جا* $E[Y|\mathcal{G}] = Y$.

۲) *اگر $E(Y)$ و $\mathcal{G}$ مستقل باشند آنگاه، تقریبا همه جا* $E[Y|\mathcal{G}] = E[Y]$.

برهان. اثبات در [۳]. □

تعریف ۱۸.۱.۱ (تابع توزیع متناهی‌البعد)**.** از یک فرآیند تصادفی $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$، تابع اندازه‌ی $\mu_{t_1}, ..., t_k$ که روی $\mathbb{R}^{nk}$ برای $n \in \mathbb{N}\,, k = 1, 2, ...$ به صورت :

$$\mu_{t_1,...,t_k}(F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, ..., X_{t_k} \in F_k]; \quad t_i \in \mathbb{T},$$

تعریف می‌شود را تابع توزیع متناهی‌البعد از فرآیند تصادفی گوییم. $F_1, ..., F_k$ مجموعه‌های بورل در $\mathbb{R}^n$ هستند.

مثال ۱۹.۱.۱. متغیر تصادفی X دارای توزیع نرمال $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ است اگر

$$P(a < X < b) = \int_a^b e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}} dX \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$$

که μ و σ، امید ریاضی و واریانس هستند.

تعریف ۲۰.۱.۱. متغیر تصادفی $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ را گوسی (نرمال) گوییم اگر تابع توزیع آن نرمال باشد.

یک فرآیند گوسی، فرآیندی است که همه‌ی متغیرهای تصادفی آن دارای توزیع نرمال باشد و اگر دارای میانگین صفر و واریانس ۱ باشد را فرآیند گوسی مرکزی گوییم.

تعریف ۲۱.۱.۱. یک فرآیند تصادفی $X : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$، $H-$ خود متشابه با پارامتر $H \in (0, 1)$ می‌باشد اگر

$$\forall a > 0, \forall t \geq o \qquad X_{at} \sim a^H X_t\,,$$

جاییکه $\sim$ معرف یکسان بودن توزیع‌های متناهی‌البعد دو طرف رابطه است.

تعریف ۲۲.۱.۱. فرآیند $X : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای نمو ایستا است اگر

$$\forall s, t \geq 0 \quad X_{t+s} - X_t \sim X_s - X_0.$$

که در این جا هم نماد $\sim$ به معنای توزیع متناهی‌البعد یکسان می‌باشد.

تعریف بالا بیانگر این است که نمو فرآیند (برای $t > s$ تفاضل $X_t - X_s$ را نمو فرآیند می‌گوییم) فقط به تفاضل s, t بستگی دارد.

تعریف ۲۳.۱.۱. فرآیند $X : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ دارای نموهای مستقل است اگر برای $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$، متغیرهای تصادفی زیر مستقل باشند.

$$X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}},$$

لم ۲۴.۱.۱. *یک فرآیند تصادفی $X : [0, \infty) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ بطوریکه $H-$ خود متشابه، دارای نمو ایستا و واریانس متناهی باشد، شرایط زیر را دارد:*

۱) $X_0 = 0$ و $\forall t \geq 0, \quad E(X_t) = 0$.

۲) $\forall t \geq 0, \quad E(X_t^2) = t^{2H}\sigma^2$، جاییکه $\sigma = E(X_1^2)$.

۳) $\forall s, t \geq 0, \quad Cov(X_t, X_s) = \frac{\sigma^2}{2}\left(t^{2H} + s^{2H} - \mid t - s \mid^{H}\right)$.

برهان. اثبات در [۱۴]. $\square$

فرآیندهای با توزیع‌های متناهی‌البعد، کاربردهای زیادی دارند که یکی از معروفترین این فرآیندها، فرآیند وینر یا حرکت براونی می‌باشد که در همین فصل آن را معرفی می‌کنیم.
یکی از روش‌های اثبات وجود چنین فرآیندهای، قضیه توسیع کلموگروف است.

قضیه ۲۵.۱.۱ (قضیه توسیع کلموگروف [۱]). *فرض کنید $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{T}$ و $k \in \mathbb{N}$. اگر تابع $\nu_{t_1,\dots,t_k}$ یک اندازه‌ی احتمال روی $\mathbb{R}^{nk}$ باشد بطوریکه برای هر جایگشت σ روی $\{1, \dots, k\}$ و همه‌ی زیر مجموعه‌های بورل F_i، در دو شرط*

$$\nu_{t_{\sigma(1)},\cdots,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \nu_{t_1,\dots,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(K)}) \qquad (K_1)$$

و

$$\nu_{t_1,\cdots,t_k}(F_1 \times \cdots \times F_k) = \nu_{t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_{k+m}}(F_1 \times \dots \times F_K \times R^n \times \dots \times R^n) \qquad (K_2)$$

[۱] Kolmogorov Extension

برای هر $m \in \mathbb{N}$، که سمت راست رابطه $(K_۲)$ مجموعا $k+m$ عامل دارد، صدق کند آنگاه یک فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ و یک فرآیند تصادفی $\{X_t\}$ روی Ω که $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ برای هر $t_i \in \mathbb{T}$ و $k \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوریکه

$$\nu_{t_۱,\cdots,t_k}(F_۱ \times \cdots \times F_k) = P[X_{t_۱} \in F_۱, ..., X_{t_k} \in F_k].$$

برهان. اثبات در [۱۸]. □

تعریف ۲۶.۱.۱. فرض کنید که X_t و Y_t دو فرآیند تصادفی روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشند. آنگاه گوییم که X_t یک نسخه از Y_t است اگر برای هر t داشته باشیم

$$P(\{\omega; X_t(\omega) = Y_t(\omega)\}) = ۱.$$

توجه کنید که اگر X_t یک نسخه از Y_t باشد آنگاه X_t و Y_t توزیع متناهی‌البعد مشابهی دارند.

در زیر قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که از آن می‌توان برای اثبات پیوستگی مسیر فرآیندهای تصادفی استفاده کرد.

قضیه ۲۷.۱.۱ (قضیه پیوستگی کلموگروف). *فرض کنید که فرآیند تصادفی $X = \{X_t\}_{t \geq ۰}$ وجود داشته باشد بطوریکه برای هر $T > ۰$، ثابت‌های مثبت α, β, D وجود داشته باشند که*

$$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D|t-s|^{۱+\beta}, \qquad ۰ \leq s, t \leq T.$$

آنگاه یک نسخه از X وجود دارد که دارای پیوستگی هولدر از مرتبه $[۰, \frac{\beta}{\alpha})$ باشد.

برهان. اثبات در [۱۸] . □

در زیر چند نامساوی مهم برای متغیر تصادفی نامنفی X, Y روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ که در این پایان نامه به آن احتیاج داریم را ذکر می‌کنیم.

۱) نامساوی هولدر: برای اعداد مثبت p, q که $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$ داریم

$$E(X.Y) \leq (E(X^p))^{\frac{۱}{p}} (E(Y^q))^{\frac{۱}{q}}.$$

۲) برای هر $p \geq ۱$،

$$E|X+Y|^p \leq ۲^{p-۱}(E|X|^p + E|Y|^p).$$

۳) نامساوی لاگرانژ: اگر X,Y دو متغیر تصادفی گوسی با واریانس متناهی باشد آنگاه برای هر $p \geq ۱$ یک ثابت C وجود دارد بطوریکه

$$E|e^X - e^Y|^p \leq \left(E\left[e^{۲p|X|} + e^{۲p|Y|}\right] E|X-Y|^{۲p}\right)^{\frac{۱}{۲}}.$$

۴)

$$E|e^X - e^Y|^p \leq E|(X-Y) \sup_{min(X,Y)\leq x \leq max(X,Y)} e^x|^p.$$

۲.۱ همگرایی برای فرآیندهای تصادفی

فرض کنید $\{X_n\}_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی روی فضای احتمال $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ باشد. چند نوع همگرایی برای این دنباله می‌توان تعریف کرد که در زیر بیان می‌کنیم.

تعریف ۱.۲.۱ (همگرایی در L^p). برای $p \geq ۱$ گوییم X_n در L^P به X همگراست اگر

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = ۰.$$

تعریف ۲.۲.۱ (همگرایی تقریبا همه جا $(a.s)$). گوییم X_n تقریبا همه جا به X همگرا است اگر

$$P[\{\omega \in \Omega | \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}] = ۱.$$

تعریف ۳.۲.۱ (همگرایی در احتمال). گوییم X_n به X در احتمال همگراست اگر برای هر $\varepsilon > ۰$

$$\lim_{n\to\infty} P[\{\omega \in \Omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \geq \varepsilon\}] = ۰.$$

تعریف ۴.۲.۱ (همگرایی در توزیع). گوییم X_n در توزیع به X همگراست اگر برای هر تابع پیوسته کراندار g در $\mathbb{R}$ رابطه $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(X_n)dP = \int_\Omega g(X)dP$ ، برقرار باشد.

قضیه ۵.۲.۱. *همگرایی تقریبا همه جا، همگرایی در احتمال را نتیجه می‌دهد و همگرایی در L^p معادل با همگرایی در احتمال است.*

برهان. اثبات در [۳]. □

تغییرات برای هر فرآیند تصادفی

برای هر فرآیند تصادفی X تغییرات مسیر فرآیند، در بازه $[a,b]$ بصورت زیر تعریف می‌شود.

برای هر $p \geq 1$ و هر افراز $a = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_n^n = b$ که $\pi_n = \max_{1 \leq i \leq n}(t_i^n - t_{i-1}^n)$، تعریف زیر را داریم:

$$v_p(X, \pi_n) := \sum_{i=1}^{n} |X(t_i^n) - X(t_{i-1}^n)|^p.$$

تعریف ۶.۲.۱. فرآیند تصادفی X دارای $p-$ تغییرات متناهی است اگر

$$v_p^0(X) := \lim_{\pi_n \to 0} v_p(X, \pi_n)$$

موجود و متناهی باشد و دارای تغییرات کراندار است اگر، $v_p(X) := \sup_{\pi_n} v_p(X, \pi_n) < \infty$.

تعریف ۷.۲.۱. برای فرآیند تصادفی X تغییرات مربعی $[X,X]_T$ از افراز π_n به صورت زیر تعریف می‌شود

$$[X,X]_T := \lim_{\pi_n \to 0} \sum_{i=1}^{n} |X(t_i^n) - X(t_{i-1}^n)|^2$$

به شرط اینکه حد وجود داشته باشد(در احتمال).

قضیه ۸.۲.۱. *اگر فرآیند تصادفی X پیوسته باشد و دارای تغییرات متناهی، آنگاه تغییرات مربعی آن صفر است.*

برهان. اثبات در [۳]. □

۳.۱ مارتینگل‌ها

تعریف ۱.۳.۱. یک فرایند تصادفی M_t روی $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ را نسبت به فیلتر $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq \circ}$ یک مارتینگل گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) برای هر t، متغیر تصادفی M_t یک تابع $\mathcal{F}$ - اندازه پذیر است.

۲) برای هر t، $E(|M_t|) < \infty$.

۳) برای $s \geq t$، $E(M_s|\mathcal{F}_t) = M_t$.

اگر به جای تساوی در خاصیت سوم از نامساوی $\leq$ استفاده کنیم به فرآیند M_t یک فوق مارتینگل نسبت به فیلتر $\mathbb{F}$ گوییم و اگر از $\geq$ استفاده کنیم یک زیر مارتینگل داریم.
یک مارتینگل به دلیل اینکه آینده‌اش از گذشته‌اش مستقل است کاربردهای زیادی در علوم مختلف دارد بطوریکه به یک ابزار مهم در توصیف رفتار قیمت‌ها در بازار مالی تبدیل شده‌اند.

تعریف ۲.۳.۱. اگر برای یک مارتینگل M_t، تابع $t \longrightarrow M_t(\omega)$ تقریبا همه جا پیوسته باشد آنگاه مارتینگل را پیوسته گوییم.

تعریف ۳.۳.۱. هر متغیر تصادفی $\tau : \Omega \longrightarrow R^+$ را یک زمان تصادفی گوییم .

تعریف ۴.۳.۱. زمان تصادفی τ را یک زمان توقف تحت فیلتر $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t\geq\circ}$ گوییم، اگر برای هر $t = \circ, \cdots, T$، $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

قضیه ۵.۳.۱. *فرض کنید S, T دو زمان توقف باشند آنگاه هر یک از موارد زیر یک زمان توقف می‌باشند*

۱) $S \wedge T = min\{S, T\}$.

۲) $S \vee T = max\{S, T\}$.

۳) $S + T$.

۴) αS که $\alpha > ۱$.