بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه صنعتی امیرکبیر

دانشکده مهندسی پزشکی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
مهندسی پزشکی (گرایش بیومکانیک)

تعیین خواص مکانیکی بافت مغز بر مبنای ریز ساختار بافت

نگارش:
مهدی خوشگفتار

استاد راهنما:
پروفسور سیامک نجاریان

اساتید مشاور:
دکتر محمد تفضلی شادپور
دکتر فرهاد فرمانزاد

اسفند ۱۳۸۶

کاش یک مادر پرستار زمین می‌شد.

برای مادرم

و ***پدرم*** *که اندیشیدن را به من آموخت.*

سپاسگزاری

بدین وسیله از جناب آقای پروفسور سیامک نجاریان به‌خاطر هدایت این پروژه سپاسگزاری می‌نمایم. همچنین از آقای دکتر فرهاد فرمانزاد که از راهنمایی‌هایشان بسیار در این پروژه بهره بردم نهایت قدردانی را دارم. از آقایان دکتر صدیقی و گودرزی برای تهیه نمونه‌ها و همچنین آقای مهندس خوشگفتار به‌خاطر همکاری بی‌دریغشان در قسمت آزمایشات میکروپولار سپاس فراوان دارم.

چکیده

تعیین رفتار مکانیکی بافت مغز یکی از مورد نیازترین و پیچیده‌ترین مباحث در بیومکانیک می‌باشد. مدلسازی مکانیکی بافت مغز به دلیل کاربردهای متنوع در پزشکی مانند مطالعه هیدرسفالی، جراحی رباتیک، برنامه‌ریزی عمل جراحی، سیستم‌های آموزش جراح و شبیه‌سازی ضربه مغزی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. مغز یک ماده بسیار ناهمگن با مشخصه‌های ریزساختار پیچیده می‌باشد. ماده خاکستری و سفید مغز موادی پیچیده می‌باشند. در نظر گرفتن ریزساختار بافت مغز با استفاده از مکانیک محیط پیوسته مرتبه بالا تاثیرات مهمی بر روی مشخصه‌های ماکروسکوپیک و همچنین تعیین کمیت‌های پیوستگی در نواحی مهم مغز (به عنوان نمونه در اطراف بطن‌ها) دارد.

این مطالعه، در جهت بررسی تاثیر ریز ساختار بافت مغز در رفتار مکانیکی آن در انجام شد. در این تحقیق، برای اولین بار، آزمایشات در جهت بررسی تاثیر اندازه نمونه‌ها بر رفتار بافت مغز در فشار، انجام گرفته است. همچنین، برای نخستین بار قوانین مربوط به مواد کامپوزیت و تئوری پیوستگی میکروپولار برای تعیین بیومکانیک مغز به کار گرفته شدند. برای تعیین خواص الاستیک موثر صفحه‌ای ماده سفید سیستم عصبی مرکزی (CNS)، یک مدل ماده مرکب تقویت شده با فیبر میکروپلار، که از فیبرهای آکسونی الاستیک که با یک ماتریس میکروپلار احاطه شده، استفاده شد. برای تعیین خواص الاستیک موثر ماده خاکستری CNS، روش همگن سازی دو مرحله‌ای بر اساس مدل کامپوزیت چندفازی ریزساختار سه بعدی Mori-Tanaka/Voigt که آکسون‌های الاستیک، دندریت‌ها و جسم‌های سلولی به صورت نامنظم در آن جهت گیری کرده‌اند و توسط ماده زمینه دربر گرفته شده اند به کار گرفته شد. تاثیرات ریزساختار بر مدول الاستیک موثر با مقایسه نتایج تئوری‌های پیوستگی کلاسیک و میکروپولار بررسی گردید. نشان داده شده است که بدلیل قابل مقایسه بودن اندازه فیبرها با طول مشخصه ماتریس، ماده CNS از آنچه توسط تئوری محیط پیوسته کلاسیک (که قادر به درنظر گرفتن خصوصیات ریزساختار ماده نیست)، سخت‌تر است. نتایج بدست آمده از این تحقیق، می‌توانند در جهت‌گیری تلاش‌های آینده در زمینه مرتبط ساختن ریزساختار به رفتارهای ماکروسکوپیک بافت مغز مفید بوده و پایه ای برای نسل جدیدی از مدلهایی باشد که بر مبنای تئوری محیط پیوسته میکروپلار و در جهت پیش بینی پاسخ بافت مغز و دیگر بافت‌ها به بارهای مکانیکی اعمالی، بنا شده باشند.

واژه‌های کلیدی: بیومکانیک، بافت مغز، تاثیر اندازه، تست فشار، ماده مرکب، تئوری میکروپولار.

فهرست

فصل اول: مقدمه

۱-۱ مقدمه ۲

فصل دوم: مروری بر مدل‌های ساختاری بیومکانیکی برای بافت مغز

۲-۱ مقدمه ۶
۲-۲ تئوری‌های بنیادی در تحلیل رفتار مکانیکی مواد ۷
۲-۲-۱ تئوری الاستیسیته خطی ۸
۲-۲-۲ تئوری های هایپرالاستیک ..... Error! Bookmark not defined.
۲-۲-۳ تئوری ویسکوالاستیسیته ..... Error! Bookmark not defined.
۲-۲-۴ تئوری پوروالاستیسیته ..... Error! Bookmark not defined.
۲-۳ کاربرد تئوری‌های بنیادی در تحلیل رفتار مکانیکی بافت مغز ..... Error! Bookmark not defined.

فصل سوم: ریز ساختار و میکرومکانیک مغز

۳-۱ مقدمه ۲۶
۳-۲ اجزای ریز ساختار مغز و خواص مکانیکی آنها ۲۷
۳-۲-۱ نورون ۲۶
۳-۲-۲ آکسون ۲۷
۳-۲-۳ دندریت ۳۰
۳-۲-۴ سلولهای نوروگلیا ۳۰
۳-۲-۵ پوشش میلین ۳۱
۳-۲-۶ فضای خارج سلولیا ۳۳
۳-۳ تکنیکهای موجود برای بررسی خواص مکانیکی ساختارهای بیولوژیکی در مقیاسهای میکرو تا نانو ۳۵
۳-۳-۱ روش OPTICAL TRAP ۳۶
۳-۳-۲ روش MICROPIPETTE ASPIRATION ۳۷
۳-۴ خواص مکانیکی اجزائ ریز ساختار مغز ۳۹
۳-۴-۱ خواص مکانیکی نرونها ۳۹
۳-۴-۲ خواص مکانیکی رگهای خونی ۴۰
۳-۴-۳ خواص مکانیکی فضای خارج سلولی ۴۱
۳-۵ ماده سفید و ماده خاکستری ۴۱
۳-۵-۱ میکرومکانیک ماده خاکستری ۴۳
۳-۵-۲ میکرومکانیک ماده سفید ۴۴

۶-۳ مروری برتئوریهای میکرومکانیک ۴۶

فصل چهارم: تاثیر اندازه در آزمایش فشار بافت مغز

۴-۱ مقدمه ۵۲
۴-۲ مواد و روشها ۵۳
۴-۳ نتایج ۵۸

فصل پنجم: مدلسازی ماده سفید وخاکستری مغز بر مبنای ریز ساختار بافت

۵-۱ مقدمه ۶۴
۵-۲ توصیف تئوری میکروپلار ۶۵
۵-۳ روش اثر اندازه برای تعیین ثوابت الاستیسیته میکروپولار ۷۰
۵-۴-۱ تعیین خواص موثر ای ماده سفید CNS با استفاده از روش محیط پوسته میکروپلار ۷۱
۵-۴-۲ نتایج و بحث ۷۶
۵-۵-۱ مدل بیومکانیکی کاپوزیت برای تعیین مدول الاستیک موثر ماده خاکستری CNS ۸۳
۵-۵-۲ نتایج و بحث ۹۰

فصل ششم: نتیجه‌گیری‌های نهایی و پیشنهادات

مراجع: ..... ERROR! BOOKMARK NOT DEFINED.

فصل اول:

مقدمه

۱-۱ مقدمه

تعیین رفتار مکانیکی بافت مغز یکی از مورد نیازترین و پیچیده‌ترین مباحث در بیومکانیک می‌باشد. مدلسازی مکانیکی بافت مغز به دلیل کاربردهای متنوع در پزشکی مانند مطالعه هیدرسفالی، جراحی رباتیک، برنامه‌ریزی عمل جراحی، سیستم‌های آموزش جراح و شبیه‌سازی ضربه مغزی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. تا سال ۱۹۷۰ تنها تعداد معدودی مقاله در مورد مشخصات مکانیکی بافت مغز منتشر شده بود، ولی اخیراً گروه‌های متعددی بر روی مشخصات ساختاری بافت مغز متمرکز شده‌اند و مدل‌های بیومکانیکی مختلفی برای بافت مغز ارائه شده است. عمده تحقیقات آغازین بر روی بافت مغز، بر شبیه سازی ضربه به سر، استوار بود. اما هم اکنون مدلسازی تروما، شبیه سازی جراحی مغز و اعصاب و انجام آن به کمک ربات، و انطباق ارتجاعی تصاویر پزشکی نیز به این تحقیقات اضافه شده است. این اهداف جدید، نیاز به دقت بالایی در پیش‌بینی رفتار بافت مغز دارند. بر این اساس مدلسازی‌های انجام شده، باید فوق العاده دقیق باشند. به همین دلیل، شبیه سازی مکانیکی بافت مغز، از پر طرفدارترین و از طرف دیگر دشوارترین مسائل در مدلسازی های بیومکانیکی بشمار می رود.

اما همچنان مشکلاتی در زمینه مدل کردن بافت مغز وجود دارد که باعث کند شدن پیشرفت شده است. از جمله مهم‌ترین آن‌ها تحقیق در مورد چگونگی رفتار مکانیکی مغز است. چرا که برای شبیه‌سازی و پیش‌بینی این فرآیندها احتیاج به مدل‌سازی دقیق بافت پیچیده مغز می‌باشد که هنوز از مسائل بحث برانگیز است. علاوه بر مشکلات مربوط به مدل‌سازی و قوانین ساختاری حاکم بر رفتار بافت مغز، هندسه مغز و اعمال شرایط مرزی و بررسی نیروهای مؤثر نیز از مشکلات این قبیل شبیه‌سازی‌ها به شمار می‌رود.

تعدد مدل‌های ارائه شده در مقالات مختلف به دلیل فاکتورهای زیادی است که در تغییرشکل بافت مغز در شرایط مختلف دخیل هستند. مشخصات مکانیکی گزارش شده تاکنون بیشتر از یک درجه از نظر اندازه تفاوت دارند. این پراکندگی ممکن است به این دلیل باشد که فاکتورهای متعددی از جمله تفاوت در روش‌های آزمایش و تفاوت نمونه‌های مورد آزمایش (مانند تفاوت در سن، ناحیه بافت مغز و جهت‌گیری)، بر روی تعیین مشخصه‌های بافت مغز تأثیرگذارند. درستی مدل‌های ساختاری ارائه شده برای بافت مغز بستگی زیادی به خواص بافت مورد استفاده برای تعیین بافت بیولوژیکی دارد.

مغز یک ماده بسیار ناهمگن با مشخصه‌های ریزساختار پیچیده می‌باشد. ماده خاکستری و سفید مغز موادی پیچیده می‌باشند. به طور واضح مغز دارای بافتی ناهمگن است و ساختار و

ترکیبات سلولی آن در ناحیه‌های مختلف متفاوت است. مطالعات آزمایشگاهی تفاوت چشمگیری بین ماده خاکستری و سفید مغز نشان می‌دهند. مدل‌های محاسباتی برای نشان دادن این تفاوت به کار گرفته شده اند، اگرچه کمبود اطلاعات منطقه‌ای محققان را واداشته است تا در ناحیه‌های سفید و خاکستری، فرض همگن بودن را در نظر بگیرند. تلاش‌های علمی برای مرتبط ساختن ریزساختار مغز به رفتار ماکروسکوپیک آن محدود است و این زمینه‌ی هنوز بخوبی رشد نیافته است. فیزیک و مکانیک کاپوزیت‌های ناهمگن موجود در صنایع پیشرفته می‌تواند یکی از ابزارهای مفید برای تعیین چگونگی تاثیر ریزساختار مغز در رفتار مکانیکی آن باشد. از طرفی، امروزه با پیشرفتهای اخیر در بیولوژی مولکولی و سلولی، بیوفیزیک و نانوتکنولوژی چندین تکنیک و ابزار برای بررسی خواص ساختاری و مکانیکی ساختارهای بیولوژیکی در مقیاسهای میکرو تا نانو رشد یافته اند. با استفاده از خصوصیات ریز ساختار بافت و روشهای میکرومکانیک، می‌توان به چگونگی پاسخ ماده در مقیاس ماکرو پی برد.

بازسازی مدل‌های پیوستگی بر اساس ریزساختار بافت سه مزیت دارد، اول اینکه می‌تواند به مدل‌های دقیقی که تفاوت‌های ساختاری و ترکیبات سلولی در آن‌ها در نظر گرفته شده باشد، منجر شود. دوم، می‌تواند به دید بهتری در چگونگی انتقال تغییرشکل‌ها و تنش‌های ماکروسکوپیک به ساختارهای سلولی مغز که به ایجاد آسیب منجر می‌شود، کمک کند. سوم، قدرت قابل ملاحظه-ای در نظریه پردازی در زمینه تغییرات رفتارهای بیومکانیکی ریزساختار مغز در شرایط پاتولوژیکی فراهم می‌کند. در این تحقیق ما برآنیم تا بصورت آزمایشگاهی و تئوریک، به تاثیر ریزساختار پیچیده بافت مغز بر رفتار مکانیکی این بافت بپردازیم.

در فصل دوم، مفاهیم و پایه‌های معادلات ریاضی را تشریح می‌کنیم که رفتار یک محیط پیوسته را هنگامی که در معرض نیروهای خارجی قرار می‌گیرند به ما می‌دهد. سپس، مروری بر کاربرد تئوری‌های بنیادی مکانیک محیط پیوسته کلاسیک در تحلیل بافت مغز، آورده می‌شود. در فصل سوم، مروری بر ریز ساختار بافت مغز صورت می‌گیرد. سپس، تکنیکهای موجود برای بررسی خواص ساختاری و مکانیکی ساختارهای بیولوژیکی در مقیاسهای میکرو تا نانو معرفی شده و در نهایت مروری بر میکرومکانیک مغز و روشهای میکرومکانیک آورده می‌شود.

در فصل چهارم، برای اولین بار، آزمایشات در جهت بررسی تاثیر اندازه نمونه‌ها بر رفتار بافت مغز در فشار، انجام گرفته است. در فصل پنجم، برای اولین بار، مکانیک محیط پیوسته میکروپلار، برای ارتباط دادن معماری بیولوژیکی ماده سفید سیستم عصبی مرکزی (CNS) به پاسخ مکانیکی آن بکار برده شده است. برای تعیین خواص الاستیک موثر صفحه‌ای ماده سفید CNS، یک مدل ماده مرکب تقویت شده با فیبر میکروپلار، که از فیبرهای آکسونی الاستیک که با یک

ماتریس میکروپلار احاطه شده، استفاده شده است. برای تعیین خواص الاستیک موثر ماده خاکستری CNS، روش همگن سازی دو مرحله‌ای بر اساس مدل کامپوزیت چندفازی ریزساختار سه بعدی Mori-Tanaka/Voigt که آکسون‌های الاستیک، دندریت‌ها و جسم‌های سلولی به صورت نامنظم در آن جهت گیری کرده‌اند و توسط ماده زمینه دربر گرفته شده‌اند به کار گرفته شده است. تاثیرات ریزساختار بر مدول الاستیک موثر با مقایسه نتایج تئوری‌های پیوستگی کلاسیک و میکروپولار بررسی شده است. در نهایت در فصل ششم، نتیجه‌گیری‌های کلی و پیشنهادات ارائه می‌گردد.

فصل دوم:

مروری بر مدل‌های ساختاری بیومکانیکی برای بافت مغز

۲-۱ مقدمه

یکی از روشهای مدل‌سازی مکانیکی بافت مغز، تشکیل معادله پیوستگی برای توصیف رفتار مکانیکی بافت است. این معادلات پیوستگی مدلهای نمایی هستند که بصورت هماهنگ با داده های آزمایشگاهی تنظیم می‌شوند. مکانیک محیط‌های پیوسته، مطالعه چگونگی رفتار مواد وقتی در معرض تأثیرات خارجی قرار می‌گیرند، می‌باشد. تأثیرات خارجی که خواص یک ماده را تحت تأثیر قرار می‌دهند عبارتند از: نیروها، دما، واکنشهای شیمیایی، و پدیده‌های الکتریکی. نمونه‌هایی از نیروهای خارجی، نیروهای گرانشی، نیروهای الکترومغناطیس و نیروهای مکانیکی هستند.

جامدات تحت نیروهای خارجی تغییر شکل می‌دهند و بنابراین تغییر شکلها مورد مطالعه قرار گرفته است. سیالات تحت نیروهای خارجی حرکت می‌کنند و بنابراین سرعت سیال باید مورد مطالعه قرار گیرد. یک ماده محیط پیوسته در نظر گرفته می‌شود، اگر مجموعه‌ای از نقاط مادی به هم پیوسته توسط نیروهای داخلی (نیروهای بین اتمهای سازنده ماده) باشد. ما بر روی قوانین خواص ماکروسکوپیک ماده متمرکز می‌شویم و با ماده بعنوان یک جسم همگن و با ساختار پیوسته برخورد می‌کنیم. در کل، اغلب مفاهیم و فرضیات توسعه داده شده در این بخش می‌تواند به هر نوع ماده‌ای در مجموعه‌ای از نقاط به هم پیوسته تحت تاثیر هر نوع از نیروهای خارجی اطلاق گردد. یک ماده الاستیک ماده‌ای است که تحت اثر نیروهای خارجی در وضعیتی قرار می‌گیرد که اگر نیروهای خارجی برداشته شود، به شکل اصلی خود بازمی‌گردد. هنگامی که یک رابطه خطی بین نیروی اعمال شده و جابجایی ماده وجود دارد، ماده به عنوان یک ماده الاستیک خطی شناخته می‌شود. در مقابل، یک ماده پلاستیک تحت تأثیر نیروهای خارجی به وضعیتی نمی‌رسد که پس از برداشتن نیروی خارجی به شکل اصلی خود بازگردد. مواد پلاستیک همیشه بعد از برداشتن نیروی خارجی تحت تأثیر یک تغییر شکل دائمی هستند. یک ماده الاستیک همگن نامیده می‌شود اگر خواصش همه جا یکسان باشد. یک ماده ایزوتروپ همان خواص را در یک نقطه و در تمام جهات دارا می‌باشد.

در این فصل، مفاهیم و پایه‌های معادلات ریاضی را تشریح می‌شوند که رفتار یک محیط پیوسته را هنگامی که در معرض نیروهای خارجی قرار می‌گیرند به ما می‌دهد. در این مقدمه ما مفاهیم و پایه‌های معادلات ریاضی را تشریح می‌کنیم که رفتار یک محیط پیوسته را هنگامی که در معرض نیروهای خارجی قرار می‌گیرند به ما می‌دهد. این مفاهیم و معادلات اساسی برای مواد الاستیک خطی و غیر خطی، ویسکوالاستیک و پوروالاستیک اشاره گردیده است. سپس، مروری بر کاربرد تئوری‌های بنیادی مکانیک محیط پیوسته کلاسیک در تحلیل بافت مغز، آورده می‌شود.

۲-۲ تئوری‌های بنیادی در تحلیل رفتار مکانیکی مواد [۲-۱]

۲-۲-۱ تئوری الاستیسیته خطی

تئوری الاستیسیته تغییر شکل‌ها در یک محیط پیوسته الاستیک را توضیح می‌دهد. در اینجا ما بر روی تغییر شکلهای محدود و مواد همگن و ایزوتروپ متمرکز می‌شویم. اگر جابجایی محدود در هر نقطه X را با بردار U(x) نمایش دهیم، گرادیان جابجایی (∇u) میدان کرنش محدود می‌باشد و رابطـه زیر بین ε و u بنام رابطه کرنش – جابجایی خوانده می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$$

(۲-۲-۱)

یک میدان اسکالر در فضا وجود دارد که می‌توان رابطه زیر را برای ارتباط u و این میدان اسکالر نوشت:

$$u = \nabla\phi$$

(۲-۲-۲)

در یک محیط الاستیک ممکن است نیروهایی بر یک بخش S از فضا اعمال شوند که عمدتاً شامل نیروی سطحی (S_n) و نیروهای حجمی (F) هستند. طبق تئوری کوشی – پواسون، اگر u یک حرکت و f یک سیستم از نیروها باشد، آنگاه $[u,f]$ یک پروسس دینامیک است، اگر و تنها اگر دو شرط زیر ارضا شوند:

یک میدان تانسور متقارن σ بنام میدان تنش وجود داشته باشد که برای هر بردار n داریم:

$$\sigma_n = \sigma.n$$

(۲-۲-۳)

و u، σ و F رابطه زیر را ارضا کنند:

$$div\sigma + F = \rho\ddot{u}$$

(۲-۲-٤)

که ρ جرم حجمی می‌باشد. این تئوری یکی از نتایج اصلی مکانیک محیطهای پیوسته است. در یک محیط الاستیک خطی بین تنش و کرنش رابطه ای وجود دارد که می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$$

(۲-۲-۵)

که C تانسور الاستیسیته نامیده شده است و دارای ۳۶ مؤلفه است. C مستقل از بردار موقعیت x است. برای فضایی که همگن و ایزوتروپ باشد، این ۳٦ مؤلفه به ۲ ثابت کاهش پیدا می‌کنند و رابطه تنش کرنش به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\sigma = 2\mu\varepsilon + \lambda(\mathrm{etr}\varepsilon)\mathrm{I},$$
$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}$$
$$= \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) + \lambda u_{k,k}\delta_{ij}$$

(۲-۲-٦)

که λ,μ مدول الاستیک Lame هستند و δ_{ij} دلتای کرونکر[1] می‌باشد.

۲-۲-۲ تئوری‌های هایپرالاستیک

مواد هایپرالاستیک مانند مواد الاستیک در هنگام باربرداری و بارگذاری اتلاف انرژی ندارند (رفتار Conservative)، اما نمودار تنش بر حسب کرنش آنها غیر خطی است. اینگونه مواد توانایی کرنش‌های الاستیک بزرگ بطور برگشت ناپذیر را دارند. مواد لاستیکی و بسیاری از پلی مرها از این دسته مواد هستند. مدل‌های هایپرالاستیک با فرض ایزوتروپیک بودن ماده و دما ثابت بودن فرایند بارگذاری پیشنهاد شده است. این فرضیات به ما اجازه می‌دهد که انرژی کرنشی را تنها بر پایه ترم‌های Invariant کرنش بیان نمود. براین اساس تانسور تنش به عنوان مشتق تابع انرژی کرنشی نسبت به گرادیان تغییر شکل تعریف خواهد شد (معادله ساختاری مربوط به مواد ابرالاستیک). این تعریف به فرم معادله زیر ظاهر خواهد شد:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}\left(C_{ij} - \delta_{ij}\right) \qquad \text{و} \qquad S_{ij} = \frac{\partial W}{\partial E_{ij}} = 2\frac{\partial W}{\partial C_{ij}}$$

(۲-۲-۷)

که

S_{ij}: مولفه های تانسور تنش دوم پیولا-کریشف

W: تابع انرژی کرنشی در واحد حجم

E_{ij}: مولفه های تانسور کرنش گرین-لاگرانژ

C_{ij}: مولفه های تانسور تغییر فرم راست کوشی - گرین

δ_{ij}: دلتای کرونکر

[1] kronecker

تانسور تغییر شکل C_{ij} به صورت تابعی از تانسور گرادیان تغییر شکل بیان می‌شود:

$$F_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial X_k} \qquad \text{و} \qquad C_{ij} = F_{ik}F_{kj}$$

(۲-۲-۸)

که

F_{ij}: مولفه های گرادیان تغییر فرم

X_i: مختصات تغییر فرم نیافته نقاط

$x_i = X_i + U_i$: مختصات تغییر فرم یافته نقاط

U_i: میدان تغییر مکان

مقادیر ویژه تانسور C_{ij} عبارتند از: $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2$ و تنها هنگامی وجود دارند که:

$$\det\left(C_{ij} - \lambda_p^2 \delta_{ij}\right) = 0$$

(۲-۲-۹)

که به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\lambda_p^6 - I_1\lambda_p^4 + I_2\lambda_p^2 - I_3 = 0$$

(۲-۲-۱۰)

که در رابطه فوق I_1, I_2, I_3 اینورینت های تانسور C_{ij} بوده و به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$$
$$I_1 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_1^2\lambda_3^2$$
$$I_1 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2$$

(۲-۲-۱۱)

J که به آن ژاکوبین نیز گفته می‌شود اینچنین تعریف می‌شود: نسبت حجم تغییر شکل یافته الاستیک به حجم اولیه ماده. با فرض ایزوتروپیک بودن ماده، معمول است که تابع انرژی کرنشی بر حسب ترم های اینورینت های کرنش یا مولفه های اصلی تانسور کشیدگی بیان شود.

$$W = W(I_1, I_2, I_3) = W(I_1, I_2, J) = W(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

(۲-۲-۱۲)

که رابطه فوق با نوشتن بر حسب ترم‌های اینورینت و کشیدگی کاهش یافته ($\bar{I}$ و $\bar{\lambda}$) در نهایت بصورت زیر در خواهد آمد:

$$W = W(\bar{I}_1, \bar{I}_2, J) = W(\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_3, J)$$

(۲-۲-۱۳)

که

$$\bar{I}_1 = J^{-\frac{2}{3}} I_1, \bar{I}_2 = J^{-\frac{4}{3}} I_2, \bar{\lambda}_p = J^{-\frac{1}{3}} \lambda_p$$

(۲-۲-۱٤)

در ادامه، دو مدل از پر کاربرد ترین فرم‌های مختلف انرژی پتانسیل کرنشی که پیشنهاد شده است، آورده شده است.

تابع انرژی مدل Mooney-Rivlin [۳، ۴]

این مدل معروفترین مدل ساختاری مواد hyperelastic می باشد. این مدل شامل ٤ نوع ۲،۳،۵ و ۹ پارامتری می باشد. برای حالت ۲ پارامتری داریم:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3)$$

(۲-۲-۱۵)

که C_{01} و C_{10} ثوابت مادی هستند. فرم‌های ۳ ، ۵ و ۹ پارامتری به ترتیب به صورت زیر می‌باشند:

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)$$

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2$$

$$W = C_{10}(\bar{I}_1 - 3) + C_{01}(\bar{I}_2 - 3) + C_{11}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3) + C_{20}(\bar{I}_1 - 3)^2 + C_{02}(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{30}(\bar{I}_1 - 3)^3 + C_{21}(\bar{I}_1 - 3)^2(\bar{I}_2 - 3) + C_{12}(\bar{I}_1 - 3)(\bar{I}_2 - 3)^2 + C_{03}(\bar{I}_2 - 3)^3$$

(۲-۲-۱٦)

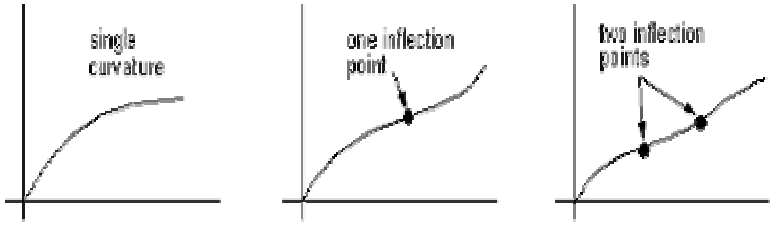
شکل (۱-۲) نمایانگر منحنی تنش کرنش نوعی Mooney-Rivlin در حالات مختلف می‌باشد.

تابع انرژی مدل Ogden [۶-۵]

مدل Ogden تابع انرژی کرنشی را بر حسب مقادیر اصلی کشیدگی در تانسور کرنش چپ کوشی بیان می‌کند:

$$W = \sum_{P=1}^{N} \frac{\mu_p}{\alpha_p}\left(\bar{\lambda}_1^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_2^{\alpha_p} + \bar{\lambda}_3^{\alpha_p} - 3\right)$$

(۲-۲-۱۷)



شکل (۱-۲) منحنی های نمونه Mooney-Rivlin

که

N: تعداد نقاط

μ_p, α_p: **ثوابت مادی**

۲-۲-۳ تئوری ویسکوالاستیسیته [۱۱-۷]

رفتار رئولوژیک ناشی از ویسکوالاستیسیته، مناسبترین راه برای تشریح خصیصه اصلی مواد واقعی است. اثرات مهم ویسکوالاستیک را می‌توان با اشاره به مثالی از میرا شدن ارتعاشات در زنگها بیان کرد که بخاطر اتلافهای «ویسکوز» در فلز است. در کل، ویسکوالاستیسیته یک ترکیب خواص سیال (اتلاف انرژی ویسکوز) و خواص جامد (ذخیره انرژی الاستیک) می‌باشد.

مواد ویسکوالاستیک دارای حافظه برای تاریخ تغییر شکلهای پیشین می‌باشند.رفتار ویسکوالاستیک می‌تواند به عنوان تغییرات آهسته تنش و تغییر شکل در زمان در نظر گرفته شود و این تأخیر نباید با اثرات اینرسی اشتباه گرفته شود. یک کلمه خیلی مهم در جمله گذشته کلمه «آهسته» می‌باشد. به منظور آشکار کردن اثرات ویسکوالاستیک در سیالات، ما نیاز به فرکانس‌های فوق بالا (مشخصه زمانی یک آزمایش در این حالت در حدود 10^{-7} s است) داریم، گرچه اثرات تأخیر زمانی در تغییر

شکلها در میله‌های واقعی و در لوله‌های پلاستیکی تحت فشار احتیاج به سالها (مشخصه زمانی در حدود 10^{8} s است) دارد. علاوه بر این، می‌توان تغییر شکلهای سنگ را به صورت یک پروسهٔ خیلی آهسته در نظر گرفت که نیاز به زمانهای رئولوژیک (مشخصه زمانی حدود 10^{17} s) دارد.

پدیده وسیکوالاستیک متعلق به اثرات رئولوژیک پایه‌ای است که رابطه بین تنش و تغییر شکلها را نشان می‌دهد. سه آزمایش اساسی، بنای بحث را تشکیل می‌دهند:

- خزش (creep)
- آسایش تنش (relaxation)
- تنش‌های پریودیک

می‌توان مدهای دیگری از تنش وابسته به زمان و یا مدهای تغییر شکل را مورد بررسی قرار داد، ولی این سه ساده‌ترین برای تعریف مفاهیم اصلی اثرات ویسکوالاستیسیته می‌باشد. در تنش ثابت σ_o اعمال شده در زمان اولیه $(t = 0)$، تغییر شکل آرام $\varepsilon(t)$ مشاهده می‌شود که این پدیده، خزش نامیده می‌شود. تابع $\varepsilon(t)$ را شامل در سه ترم می‌باشد:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_o(t,\sigma_0) + \Psi(t,\sigma_0) + \frac{t}{\eta(\sigma_0)}\sigma_0$$

(۲-۲-۱۸)

که در آن ε_0، یک تغییر شکل لحظه ای، $\Psi(t,\sigma_0)$ تابعی برای توصیف توسعه تأخیری تغییر شکلها، $\eta(\sigma_o)$ ویسکوزینه، که در حالت کلی می‌تواند وابسته به تنش و زمان t باشد. همانطور که در بالا اشاره شد، در استخراج معادلات فوق نوع تغییر شکل (کشش، برش و ...) مشخص نشده است، اما باید در نظر داشت که تغییر شکل یک بعدی می‌باشد. یک ماده را ویسکوالاستیک خطی می‌نامند، اگر پارامترهای I_o، $\Psi(t)$ و η تابع تنش نباشند، در غیر این صورت رفتار ماده رفتار ویسکوالاستیک غیرخطی خواهد بود. ضروری است که دو حالت از هم متمایز گردند: اگر مقدار η بی نهایت بزرگ باشد، ترم آخر معادله (۲-۲-۱۸) قابل صرفنظر کردن است و ماده، جامد ویسکوالاستیک می‌باشد. برای مایعات ویسکوالاستیک، تغییر شکل به علت افزایش ترم آخر تا حد بی نهایت افزایش می‌یابد. در مایعات ویسکوالاستیک مقدار کامپلیانس تعادل صفر است. رشد شتاب یافته تغییر شکل در خزش مشخصه‌ای برای رفتار ویسکوالاستیک غیرخطی است و شتاب در تغییر شکلهای پائین تر شروع می‌شود.

در تغییر شکلهای ثابت ε_0، که در لحظات اولیه $t = 0$، اتفاق می‌افتد، می‌توان کاهش تدریجی را در تنش برحسب زمان ($\sigma(t)$) مشاهده نمود. این پدیده relaxation یا آسایش تنش نامیده می‌شود. تابع $\sigma(t)$ را می‌توان به صورت جمع دو ترم نوشت:

$$\sigma(t) = \phi(t,\varepsilon_0) + E_\infty(\varepsilon_0)\varepsilon_0$$

(۲-۲-۱۹)

که در آن $\phi(t,\varepsilon_0)$ تابعی توصیف کننده‌ای از کاهش تنش و E_∞ بیانگر مؤلفه باقی مانده (آسایش نیافته) یا تعادلی تنش نامید.

نوسانات پریودیک، سومین حالت تغییر شکلها را تعریف می‌کند. شکل تغییر شکل پریودیک وابسته به زمان، کاملاً اختیاری می‌باشد، اما این تئوری با نوسانات‌هارمونیک سر و کار دارد. این امر کاملاً طبیعی است، چرا که یک سیگنال دلخواه می‌تواند به صورت سری فوریه بسط داده شود و یک تابع‌هارمونیک را تشکیل دهد. می‌توان فرض کرد که تنش $\sigma(t)$ به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{\omega t}$$

(۲-۲-۲۰)

که در آن σ_0 دامنه تنش و ω فرکانس نوسانات می‌باشد.

توابع فرمولبندی شده فوق، برای توضیح اثرات ویسکوالاستیک و خواص مشخصه مواد واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بسیار مشکل است که معادلات را در عمل مورد استفاده قرار داد، چرا که ورودی بعضی توابع ویسکوالاستیک (خزش، آسایش تنش، مدولهای دینامیک) در محدوده اندازه گیریشان (در شرایط محصور آزمایشگاه) ممکن است منجر به یک سری خطاهای نامعلومی در پیش بینی رفتار تغییر شکل یک ماده واقعی شود.

۲-۲-٤ تئوری پوروالاستیسیته

برای توجیه رفتار بافت های نرم بدن، تئوری های پوروالاستیسیته و دوفازی و حالت های تعمیم یافته این دو تئوری، بویژه در بافت ها یا شرایطی که نقش سیال میان بافتی در رفتار آنها مهم است، اهمیت بکارگیری آنها کاملاً مشهود است. البته روابط این دو تئوری و بویژه تعمیم آنها، بسیار پیچیده تر از تئوری های کلاسیک (مانند تئوری الاستیسیته و ویسکوالاستیسته) هستند و لذا شاید در مواردی بکارگیری این دو، مقرون به صرفه نباشد. نظر به اهمیت این تئوری ها در مکانیک بافت نرم، در زیر به بررسی مختصر آنها خواهیم پرداخت.