۸۳/۱/۱۰ ۱۵۶۰

۸۲/۶/۱۴

بسم الله الرحمن الرحیم

۱۰۴۳۰۴

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد ریاضی-گرایش جبر

عنوان:

ایده آل‌های اوّل الحاقی مدول‌های کوهمولوژی موضعی بالایی نسبت به یک ایده‌آل

استاد راهنما:

دکتر علیرضا نقی پور

استاد مشاور:

دکتر جواد اسداللهی

توسط:

سجاد کشاورزاصل

مهرماه ۱۳۸۷

دانشگاه شهرکرد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش جبر

آقای سجاد کشاورز اصل

تحت عنوان

ایده آل های اول الحاقی مدولهای کوهومولوژی موضعی بالایی نسبت به یک ایده آل

در تاریخ ۱۳۸۷/۷/۱۴ توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه عالی به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه دکترعلیرضا نقی پور با مرتبه علمی استاد یار — امضاء

۲- استاد مشاور پایان نامه دکتر جواد اسدالهی با مرتبه علمی دانشیار — امضاء

۳- استاد داور داخل گروه دکترمحمدرضا ریسمانچیان با مرتبه علمی استادیار — امضاء

۴ - استاد داور خارج از گروه دکترشکراله سالاریان با مرتبه علمی دانشیار از دانشگاه اصفهان — امضاء

۵- نماینده تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه دکتر محمد مرادی با مرتبه علمی استادیار — امضاء

دکتر محمد مردانی

معاون پژوهشی و تحصیلات تکمیلی

دانشکده علوم پایه

دانشگاه شهرکرد
دانشکده علوم پایه

تقدیر و تشکر

حمد و سپاس ایزد منان را که با الطاف بیکران خود این توفیق را به من ارزانی داشت تا بتوانم در راه ارتقای دانش خود این مرحله از تحصیل را پشت سر بگذرانم .

در پایان این مرحله از تحصیل از زحمات بی‌دریغ اسطوره‌های محبت و مهربانی، پدر و مادر عزیزم صمیمانه تشکر می‌کنم. همچنین این مجموعه ی کوچک را به همسر عزیزم که در طی این پایان نامه پشتوانه و مشوقم بوده، تقدیم می دارم.

از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر علیرضا نقی پور که گنجینه‌های دانش خود را در اختیار اینجانب قرار دادند و مرا قدم به قدم تا به انجام رسانیدن این پروژه هدایت کردند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌کنم.

همچنین از استاد بزرگوار، جناب آقای دکتر جواد اسداللهی که با راهنمائی‌ها و مساعدت‌های عالمانه خود، راهگشای این پژوهش گشتند، سپاسگزاری می‌کنم.

از استادان محترم و فرهیخته گروه ریاضی، آقایان: دکتر حسامی، دکتر ریسمانچیان، دکتر رضایی زاده و دکتر امینی هرندی که افتخار شاگردی ایشان را داشته‌ام تشکر و قدردانی می‌کنم.

در نهایت، از تمام کسانی که در عرصه‌های مختلف زندگی با کمک‌ها و راهنمائی هایشان مرا همراهی کردند، سپاسگزاری می‌کنم و برای همه این بزرگواران سلامتی، طول عمر با عزت، پیروزی و شادکامی آرزومندم.

سجاد کشاورز اصل

فهرست مندرجات

فهرست نمادها

مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل R ..... $\mathrm{Spect}R$

مجموعه‌ی عضوهایی از R که توان‌هایی از آن‌ها به $\mathfrak{a}$ متعلق باشد ..... $\sqrt{\mathfrak{a}}$

اشتراک ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R ..... $\mathrm{Jac}(R)$

پوچ‌ساز M ..... $\mathrm{Ann}(M)$

مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل وابسته M ..... $\mathrm{Ass}(M)$

مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر روی M ..... $Z(M)$

محمل M ..... $\mathrm{Supp}(M)$

دستگاه معکوس خانواده‌ی $(M_i)_{i\in I}$ ..... (M_i, f_{ij})

حد معکوس ..... $\varprojlim$

مجموعه‌ی تمام دنباله‌های کوشی C

مجموعه‌ی تمام دنباله‌های کوشی همگرا به صفر ..... $C_\circ$

تکمیل شده‌ی M نسبت به توپولوژی $\mathfrak{m}$− آدیک ..... $\hat{M}$

فیلتری از M ..... $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$

مجموعه‌ی عضوهای M که توسط توانی از $\mathfrak{a}$ پوچ می‌شوند ..... $\Gamma_{\mathfrak{a}}(M)$

مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ ..... $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M)$

پوش انژکتیو ..... $E(M)$

حد مستقیم ..... $\varinjlim$

مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل الحاقی M .... $\mathrm{Att}(M)$

بعد کوهمولوژی M نسبت به ایده‌آل $\mathfrak{a}$ .... $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, M)$

بعد M .... $\dim(M)$

مجموعه‌ی تمام ایده‌آل‌های اوّل شامل $\mathfrak{a}$ .... $\mathrm{Var}(\mathfrak{a})$

مجموعه‌ی $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$ به طوری که $\mathrm{cd}(\mathfrak{a}, R/\mathfrak{p}) = n$ .... $\mathrm{Assh}(M)$

تحدید روی حلقه‌ی R .... $\restriction_R$

چکیده

فرض کنید $(R,\mathfrak{m})$ حلقه‌ی نوتری و موضعی و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. همچنین فرض کنید M یک $R-$ مدول از بعد n باشد. در این پایان نامه ایده‌آل‌های اوّل الحاقی مدول کوهمولوژی موضعی بالایی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ مطالعه می‌شود. اگر M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد، آنگاه نشان داده می‌شود که تعداد متناهی مدول کوهمولوژی موضعی بالایی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ غیر یکریخت، به ازای ایده‌آل $\mathfrak{a}$ از R وجود دارد. نمایش ثانویه‌ی تحویل یافته برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی بالایی نسبت به یک ایده‌آل ارائه می‌شود. همچنین نشان داده می‌شود که به ازای عدد صحیح داده شده $r \geq 0$ اگر به ازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{Supp}(M)$ تساوی $\mathrm{H}^r_{\mathfrak{a}}(R/p) = 0$ برقرار باشد، آنگاه به ازای هر $i \geq r$ تساوی $\mathrm{H}^i_{\mathfrak{a}}(M) = 0$ نیز برقرار خواهد بود.

پیشگفتار

در سراسر این پایان نامه حلقه‌ی R جابه‌جایی و یک‌دار می‌باشد.

در حدود سال ۱۹۷۱ مکدانلد[۱] نظریه‌ی ایده‌آل‌های اوّل الحاقی و نمایش ثانویه را مطرح کرد [۱۱]. از دیدگاهی این نظریه دوگان نظریه‌ی ایده‌آل‌های اوّل وابسته می‌باشد. وی نشان داد که هر مدول آرتینی روی حلقه‌ی R دارای نمایش ثانویه می‌باشد. بعد از مدتی شارپ[۲] نشان داد که کلاس مدول‌هایی که دارای نمایش ثانویه می‌باشند، محدود به مدول‌های آرتینی نیست. در واقع شارپ نشان داد که مدول‌های انژکتیو روی حلقه‌ی نوتری دارای نمایش ثانویه می‌باشند. کاربردی از نظریه ایده‌آل‌های اوّل الحاقی در کوهمولوژی موضعی توسط خود مکدانلد و شارپ صورت گرفت [۱۲]. شارپ در مقاله‌ای [۱۶] مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل الحاقی مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M)$ را وقتی که M مدول متناهی مولد روی حلقه‌ی نوتری موضعی $(R,\mathfrak{m})$ باشد، معرفی کرد. در این پایان نامه نتیجه‌ی شارپ توسیع داده می‌شود و مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل الحاقی مدول کوهمولوژی موضعی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ به ازای ایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$ از R معرفی می‌شود (قضیه‌ی اساسی اوّل). همچنین نشان داده می‌شود که این مجموعه فقط به $\mathrm{Supp}(M)$ بستگی دارد و به عنوان نتیجه‌ای از آن قضیه‌ی لیختنبام — هارتشورن [۳] موضعی در کوهمولوژی موضعی ارائه می‌گردد. اکنون طبیعی است این سؤال مطرح شود که در مورد مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل الحاقی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ وقتی که M دلخواه باشد، چه می‌توان گفت. در سال

---

[۱] I. G. Macdonald
[۲] R. Y. Sharp
[۳] Lichtenbaum-Hartshorne

۱۹۸۰ راش[۴] به این سؤال پاسخ داد و کرانی برای مجموعه‌ی ایده‌آل‌های اوّل الحاقی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M)$ وقتی که M مدول دلخواه روی حلقه نوتری موضعی $(R, \mathfrak{m})$ باشد، محاسبه و نمایش ثانویه برای آن معرفی کرد [۱۵]. در این پایان نامه نتیجه‌ی راش توسیع داده شده و برای $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ به ازای ایده‌آل دلخواه $\mathfrak{a}$ از R بیان می‌گردد. هارتشورن در مرجع [۱۰] نشان داد که به ازای مدول متناهی مولد M روی حلقه‌ی نوتری موضعی $(R, \mathfrak{m})$ ، همریختی پوشای $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{m}}(M) \rightarrow \mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ وجود دارد. در این‌جا نیز نتیجه‌ی هارتشورن توسیع داده شده و برای هر ایده‌آل $\mathfrak{b}$ از R با شرط $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ بیان می‌گردد. در پایان نمایش ثانویه از مدول کوهمولوژی $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ ، بدون شرط $\dim(M) = \dim(R)$ ، بیان شده و کرانی برای تعداد مدول‌های کوهمولوژی موضعی ناصفر $\mathrm{H}^n_{\mathfrak{a}}(M)$ ارائه می‌شود.

---

[۴] D. E. Rush

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱.۱ ایده‌آل‌های اوّل وابسته و محمل مدول

تعریف ۱.۱.۱ ایده‌آل $\mathfrak{m}$ از R را ایده‌آل ماکسیمال گویند هر گاه ایده‌آلی بین $\mathfrak{m}$ و R وجود نداشته باشد. به عبارتی دیگر حلقه‌ی $R/\mathfrak{m}$ میدان باشد. حلقه‌ای که فقط یک ایده‌آل ماکسیمال دارد را حلقه‌ی موضعی می‌نامند.

تعریف و نماد گذاری. ایده‌آل $\mathfrak{p}$ از R را ایده‌آل اوّل گویند هر گاه حلقه‌ی $R/\mathfrak{p}$ دامنه‌ی صحیح باشد. به عبارت دیگر ایده‌آل $\mathfrak{p}$ اوّل است هر گاه در شرایط زیر صدق کند

۱) $\mathfrak{p} \neq R$،

۲) اگر به ازای هر x, y عضو R که $x, y \notin \mathfrak{p}$، آنگاه $xy \notin \mathfrak{p}$.

از این که هر میدان دامنه‌ی صحیح است نتیجه می‌شود که هر ایده‌آل ماکسیمال یک

ایده‌آل اوّل می‌باشد و مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اوّل حلقه‌ی R با $\mathrm{Spect}R$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۲.۱.۱ زیر مجموعه‌ی $S \subseteq R$ را ضربی بسته گویند هر گاه

۱) $1 \in S$،

۲) اگر $x, y \in S$، آنگاه $xy \in S$.

از تعریف قبل نتیجه می‌شود که اگر $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اوّلی از حلقه‌ی R باشد، آنگاه مجموعه‌ی $S = R - \mathfrak{p}$ یک مجموعه‌ی ضربی بسته می‌باشد.

تعریف و نماد گذاری. فرض کنید $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از حلقه‌ی R باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از R که توان‌هایی از آن‌ها به $\mathfrak{a}$ متعلق می‌باشد، تشکیل ایده‌آلی از حلقه‌ی R داده و رادیکال $\mathfrak{a}$ نامیده می‌شود و با نماد $\sqrt{\mathfrak{a}}$ نشان می‌دهند

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \{x \in R \mid x^n \in \mathfrak{a} \quad , \quad n \in \mathbb{N}\}.$$

گزاره ۱.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و $\mathfrak{a}$ ایده‌آلی از R باشد. در این صورت

$$\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{p} \quad (\mathfrak{p} \in \mathrm{Spect}R)$$

اثبات. به مرجع [۱۳] قضیه‌ی ۱.۲ رجوع کنید. □

در تعریف و نمادگذاری بالا اگر قرار دهید $\mathfrak{a} = (0)$، آنگاه $\sqrt{(0)}$ از همه‌ی عناصر پوچ توان حلقه‌ی R تشکیل شده است و بنابر گزاره ۱.۱.۱ اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های اوّل R

می‌باشد و آن را رادیکال پوچ حلقه‌ی R گویند. اشتراک همه‌ی ایده‌آل‌های ماکسیمال حلقه‌ی R را رادیکال جیکبسن[۱] R گویند و با نماد $\mathrm{Jac}(R)$ نشان می‌دهند.

قضیه ۱.۱.۱ (قضیه‌ی اجتناب از ایده‌آل‌های اوّل) فرض کنید R یک حلقه و $\mathfrak{a}$، $\mathfrak{p}_1$، $\mathfrak{p}_2$، ...، $\mathfrak{p}_r$ ایده‌آل‌هایی از حلقه‌ی R باشند به طوری که همه‌ی آن ها به جز حداکثر دو تا از آن‌ها اوّل باشند. در این صورت اگر به ازای هر $1 \leq i \leq r$، $\mathfrak{a}$ زیر مجموعه‌ی $\mathfrak{p}_i$ ها نباشد ($\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{p}_i$)، آنگاه $\mathfrak{a}$ زیر مجموعه‌ی اجتماع آن ها نمی‌باشد ($\mathfrak{a} \subsetneq \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$).

اثبات. به مرجع [۱] گزاره ۱.۱۱ قسمت i رجوع کنید. □

گزاره ۲.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و $\mathfrak{a}_1$، $\mathfrak{a}_2$، ...، $\mathfrak{a}_n$ ایده‌آل هایی از R و $\mathfrak{p}$ ایده‌آل اوّلی از R بوده به طوری که $\mathfrak{p}$ شامل $\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i$ باشد. در این صورت $1 \leq i \leq n$ وجود دارد به طوری که $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{a}_i$ می‌باشد.

اثبات. به مرجع [۱] گزاره ۱.۱۱ قسمت ii رجوع کنید. □

تعریف ۳.۱.۱ ایده‌آل $\mathfrak{q}$ از R را ایده‌آل اوّلیه گویند هر گاه به ازای هر $x, y \in R$ از رابطه‌ی $xy \in \mathfrak{q}$ بتوان نتیجه‌ی $x \in \mathfrak{q}$ یا $y \in \sqrt{\mathfrak{q}}$ را به‌دست آورد.

گزاره ۳.۱.۱ فرض کنید $\mathfrak{q}$ ایده‌آل اوّلیه‌ای از حلقه‌ی R باشد. در این صورت ایده‌آل $\sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{p}$ ایده‌آل اوّلی از R بوده و $\mathfrak{q}$ را ایده‌آل $\mathfrak{p}$− اوّلیه می‌گویند.

اثبات. به مرجع [۱۴] لم ۱.۲.۱ رجوع کنید. □

[۱] Jacobson

لازم به ذکر است که عکس گزاره‌ی ۳.۱.۱ وقتی صحیح می‌باشد که $\mathfrak{p}$ ایده‌آل ماکسیمالی از حلقه‌ی R باشد[۱۴].

تعریف و نماد گذاری. فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت ایده‌آل اوّل $\mathfrak{p}$ از R را ایده‌آل اوّل وابسته از M گویند هر گاه $\mathfrak{p}$ پوچ ساز عضو ناصفری از M باشد (($\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}(x)$)). مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل های اوّل وابسته‌ی M را با $\mathrm{Ass}(M)$ نشان می‌دهند و اگر بخواهند بر حلقه‌ی R تأکید کنند با $\mathrm{Ass}_R(M)$ نشان می‌دهند.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت مجموعه‌ی تمام مقسوم علیه‌های صفر روی M عبارت است از عناصری از حلقه‌ی R مانند r به طوری که عضو ناصفری از M مانند x وجود داشته باشد به طوری که $rx = 0$ باشد و این مجموعه را با $Z(M)$ نشان می‌دهند. به عبارت دیگر

$$Z(M) = \{r \in R \mid rx = 0 \ , \ 0 \neq x \in M\}.$$

قضیه ۲.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت تساوی زیر برقرار می‌باشد

$$Z(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)} \mathfrak{p}.$$

اثبات. به مرجع [۱۴] قضیه‌ی ۱۰.۳.۴ رجوع کنید. □

قضیه ۳.۱.۱ (قضیه‌ی بورباکی[۲]) فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری، M یک $R-$ مدول متناهی مولد و $\beta \subseteq \mathrm{Ass}(M)$ باشد. در این صورت زیر مدولی مانند N از M وجود دارد به طوری که در شرایط زیر صدق می‌کند

$$\mathrm{Ass}(M/N) = \beta \ , \ \mathrm{Ass}(N) = \mathrm{Ass}(M) \backslash \beta.$$

اثبات. به مرجع [۱۴] قضیه‌ی ۱.۳.۱۲ رجوع کنید. □

قضیه ۴.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و دنباله‌ی $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ دنباله‌ی دقیقی از $R-$ مدول‌ها باشد. در این صورت روابط زیر برقرار می‌باشند

$$\mathrm{Ass}(M') \subseteq \mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Ass}(M') \bigcup \mathrm{Ass}(M'').$$

اثبات. به مرجع [۱۴] قضیه‌ی ۱.۳.۶ رجوع کنید. □

قضیه ۵.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد. در این صورت زنجیر زیر از زیر مدول‌های M وجود دارد

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n = M$$

به طوری که به ازای هر $1 \leq i \leq n$، یکریختی $M_i/M_{i-1} \cong R/\mathfrak{p}_i$، جایی که هر $\mathfrak{p}_i$ عضوی از $\mathrm{Ass}(M)$ خواهد بود، برقرار می‌باشد.

اثبات. به مرجع [۱۴] قضیه‌ی ۱.۳.۵رجوع کنید. □

---
[۲] Bourbaki

تعریف ۵.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه و M یک $R-$ مدول باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل های اوّل $\mathfrak{p}$ از R به طوری که $M\mathfrak{p} \neq 0$ باشد را محمل مدول M می‌نامند و با $\mathrm{Supp}(M)$ نشان می‌دهند.

قضیه ٦.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد. در این صورت

۱) $\mathrm{Ass}(M)$ یک مجموعه‌ی متناهی است،

۲) $\mathrm{Ass}(M) \subseteq \mathrm{Supp}(M)$،

۳) مجموعه‌ی عضوهای مینیمال $\mathrm{Ass}(M)$ و $\mathrm{Supp}(M)$ با هم برابرند.

اثبات. به مرجع [۱۳] قضیه‌ی ٦.۵ رجوع کنید. □

گزاره ۴.۱.۱ فرض کنید R یک حلقه‌ی نوتری و M یک $R-$ مدول متناهی مولد باشد. در این صورت به ازای هر $R-$ مدول N رابطه زیر برقرار می‌باشد

$$\mathrm{Ass}(\mathrm{Hom}_R(M,N)) = \mathrm{Supp}(M) \bigcap \mathrm{Ass}(N)$$

اثبات. به مرجع [۲]، فصل ۴، بخش اول، گزاره‌ی ۱۰ رجوع کنید. □

۲.۱ مکمل سازی

در این بخش نظریه‌ی مکمل سازی که نقش مهمی در این پایان نامه دارد مطرح می‌شود. برای ارائه این نظریه به مفاهیمی همچون مجموعه‌ی مستقیم و دستگاه معکوس احتیاج

است که در ابتدا تعاریف آن‌ها آورده می‌شود.

تعریف ۱.۲.۱ مجموعه‌ی I را مجموعه‌ی مستقیم می‌نامند هرگاه رابطه‌ی $\leq$ روی I تعریف شده باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند

۱) مجموعه‌ی I نسبت به رابطه‌ی $\leq$ بازتابی باشد،

۲) مجموعه‌ی I نسبت به رابطه‌ی $\leq$ دارای خاصیت تعدّی باشد،

۳) به ازای هر $i,j \in I$، $k \in I$ وجود داشته باشد به طوری که $i,j \leq k$ باشند.

تعریف ۲.۲.۱ فرض کنید I مجموعه‌ی مستقیم و $(M_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از $R-$مدول‌ها باشد. در این صورت اگر به ازای هر $i,j \in I(i \leq j)$، $R-$ همریختی $f_{ij} : M_j \to M_i$ در شرایط زیر صدق کند

۱) $f_{ii} : M_i \to M_i$ به ازای هر $i \in I$ همریختی همانی باشد،

۲) به ازای هر $i,j,k \in I$ با شرط $i \leq j \leq k$، رابطه $f_{ij} \circ f_{jk} = f_{ik}$ برقرار باشد،

آنگاه گویند که خانواده‌ی $R-$ مدول‌های M_i به همراه همریختی‌های f_{ij} تشکیل یک دستگاه معکوس می‌دهند و با نماد (M_i, f_{ij}) نشان می‌دهند.

تعریف ۳.۲.۱ فرض کنید I یک مجموعه‌ی مستقیم و (M_i, f_{ij}) دستگاه معکوس روی مجموعه‌ی I باشد. در این صورت حد معکوس این دستگاه به صورت زیر تعریف

می‌شود

$$\varprojlim M_i = \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid x_i = f_{ij}(x_j)\ (i \leq j)\}.$$

تعریف ۴.۲.۱ در یک دستگاه معکوس وقتی همریختی‌های $f_{ij} : M_j \to M_i$، $(i \in I, j = i + ۱)$ برپوشا باشند، دستگاه خواص مطلوبی دارد و آن را دستگاه پوشا می‌نامند.

تعریف ۵.۲.۱ فرض کنید (A_i, f_{ij}) و (B_i, g_{ij}) دستگاه‌های معکوس از $R-$ مدول‌ها روی مجموعه‌ی مستقیم مشترک I باشند. همریختی $t : (A_i, f_{ij}) \to (B_i, g_{ij})$ بین دو دستگاه معکوس به معنی خانواده‌ای از همریختی‌های $R-$ مدولی $t_i : A_i \to B_i$ می‌باشد به طوری که به ازای هر $i \leq j$ تساوی $g_{ij}t_j = t_i f_{ij}$ برقرار باشد. به عبارت دیگر به ازای هر $i \leq j$ نمودار زیر جابجایی باشد

$$\begin{array}{ccc} A_j & \xrightarrow{t_j} & B_j \\ f_{ij} \downarrow & & \downarrow g_{ij} \\ A_i & \xrightarrow{t_i} & B_i \end{array}$$

تعریف ۶.۲.۱ فرض کنید (A_i, f_{ij}) و (B_i, g_{ij}) دستگاه‌های معکوس از $R-$ مدول‌ها روی مجموعه‌ی مستقیم مشترک I باشند. همریختی $t : (A_i, f_{ij}) \to (B_i, g_{ij})$ بین