بِسمِ اللّهِ الرّحمنِ الرّحيم

١٢١٤٩٨

دانشگاه تبریز
دانشکدهٔ فیزیک
گروه فیزیک نظری و اختر فیزیک

رساله

برای دریافت درجه دکتری در رشته
فیزیک گرایش نظری

عنوان
ساختن شاهدهای درهمتنیدگی تجزیه ناپذیر بهینه و نگاشتهای مثبت متناظر و کاربرد آنها در بررسی درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی

استاد راهنما:
دکتر محمد علی جعفریزاده
استاد مشاور:
دکتر مهدی رضایی کرامتی
و
دکتر رحیمه صوفیانی
پژوهشگر:
نقی بهزادی

۱۳۸۸/۷/۱۶
مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
تهیه مدارک

شهریور ۱۳۸۸

۱۲۱۴۹۸

تقدیم به:

مادر فداکارم

و

همسر عزیزم

با سپاس از:

- استاد گرانقدر آقای دکتر جعفریزاده که راهنمایی این پایان نامه را بر عهده داشتند و در طول مراحل آن، راهگشای مشکلات پژوهشی مربوطه بودند.

-اساتید محترم مشاور آقای دکتر مهدی رضایی کرامتی و خانم دکتر رحیمه صوفیانی.

- اساتید محترم داور پایان نامه آقایان دکتر محمد رضا ابوالحسنی از دانشگاه تربیت مدرس تهران و دکتر محمد رضا مطلوب از دانشگاه شهید باهنر کرمان و همچنین آقای دکتر حسین متولی از دانشگاه تبریز.

- مدیریت محترم گروه فیزیک نظری و اخترفیزیک آقای دکتر داود جسور.

- ریاست محترم اساتید و کارمندان محترم دانشکده فیزیک.

- دانشجویان عزیز در گروه فیزیک نظری بخصوص آقایان مهدیان، حشمتی، آقایار، قانع و مظهری.

نام خانوادگی دانشجو: بهزادی نام: نقی

عنوان پایان نامه: ساختن شاهدهای درهمتنیدگی تجزیه ناپذیر بهینه و نگاشتهای مثبت متناظر و کاربرد آنها در بررسی درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی

استاد راهنما: دکتر محمد علی جعفریزاده

اساتید مشاور: دکتر مهدی رضایی کرامتی و دکتر رحیمه صوفیانی

کلید واژه ها :درهمتنیدگی، شاهد درهمتنیدگی، نگاشت مثبت، تجزیه ناپذیر، بهینه

مقطع تحصیلی: دکتری رشته: فیزیک گرایش: نظری دانشگاه: تبریز

دانشکده: فیزیک تاریخ فارغ التحصیلی: شهریور۱۳۸۸ تعداد صفحه:۱۰۸

چکیده : تشخیص درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی در یک سیستم چند ذره ای، با اهمیت ترین مساله در نظریه اطلاعات کوانتومی می باشد. یکی از راههای شناسایی درهمتنیدگی کوانتومی در این سیستمها استفاده از شاهدهای درهمتنیدگی می باشد و رهیافت دیگر بر اساس نگاشتهای مثبت است. بر طبق یکریختی جمیولوفسکی، نگاشتهای مثبت در تناظر یک به یک با شاهدهای درهمتنیدگی می باشند. در میان شاهدهای درهمتنیدگی و نگاشتهای مثبت، شاهدها و نگاشتهای تجزیه ناپذیر از اهمیت اساسی برخوردارند چرا که آنها قادرند درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی با ترانهاد جزئی مثبت را، که توسط معیار معروف پرس-هورودکی غیر قابل تشخیص هستند، تشخیص دهند. همچنین بررسی بهینه بودن آنها دارای اهمیت می باشد. هدف عمده در این پایاننامه، ساختن شاهدهای درهمتنیدگی تجزیه ناپذیر بهینه و به تبع آن نگاشتهای مثبتی است که توانایی لازم برای شناسایی حالتهای درهمتنیده با ترانهاد جزئی مثبت در یک سیستم چند ذره ای با تعداد تراز دلخواه را داشته باشند. برای نیل به این هدف، از برنامه ریزی خطی استفاده می کنیم. همچنین از رهیافت دیگری که در آن انتظار داریم با افزودن جملات تصحیحی به شاهدهای درهمتنیدگی کاهشی تا بحال شناخته شده و همینطور برای نگاشتهای مثبت کاهشی مربوطه، شاهدها و نگاشتهای تجزیه ناپذیر بهینه مورد نظر را بدست آوریم.

فهرست مطالب

مقدمه ٦

١ بررسی منابع ٩

٢ مبانی و روش ها ١٥

١.٢ شاهدهای درهمتنیدگی ١٦

٢.٢ نگاشتهای مثبت ٢١

٣.٢ یکریختی جمیولوفسکی ٢٥

۴.٢ شاهدهای درهمتنیدگی بهینه ٢٥

۵.٢ برنامه ریزی خطی و شاهدهای درهمتنیدگی ٢٧

٦.٢ اندازه گیری شاهدهای درهمتنیدگی ٣١

٣ نتایج و بحث ٣٣

۱.۳ ساختن شاهدهای درهمتنیدگی بااستفاده از ماتریسهای گلمن ۳۴
۱.۱.۳ عملگرهای λ—قطری ۳۴
۲.۱.۳ شاهدهای درهمتنیدگی λ ـ غیرقطری ۳۹

۲.۳ عملگرهای چوی ۴۶
۱.۲.۳ سیستمهای $۳ \otimes ۳$ ۴۶
۲.۲.۳ سیستمهای $۴ \otimes ۴$ ۵۵

۳.۳ ساختن شاهدهای درهمتنیدگی با استفاده از عملگرهای پادمتقارن ۶۱
۱.۳.۳ شاهدهای در همتنیدگی برای سیستمهای $d \otimes d$ ۶۱
۲.۳.۳ شاهدهای درهمتنیدگی متناظر با پارشهای ممکن J ۷۵
۳.۳.۳ تعمیمهای دیگر ۷۸

۴.۳ شاهدهای درهمتنیدگی برای تشخیص درهمتنیدگی حالتهای قطری
$MUB - (ZZZ)_G$ ۸۷

۴ پیوست ها ۹۱

۱.۴ پیوست الف ۹۲
۱.۱.۴ پایه های جبر $su(۳)$ ۹۲
۲.۱.۴ پایه های جبر $su(۴)$ ۹۳

۲.۴ پیوست ب ۹۴
۹۴

۳.۴ پیوست ج ۹۶

۴.۴ پیوست د ۹۷

۵.۴ پیوست ت ۹۸

مراجع ۱۰۳

واژه نامه‌ی فارسی به انگلیسی ۱۰۹

واژه نامه‌ی انگلیسی به فارسی ۱۱۱

مقدمه

درهمتنیدگی[۱] کوانتومی یکی از جنبه های اساسی مکانیک کوانتومی است که هیچ‌گونه مشابهی در فیزیک کلاسیک ندارد. در همتنیدگی کوانتومی به منزلهٔ قلب نظریه اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی است. درهمتنیدگی کوانتومی به عنوان یک منبع فیزیکی برای اجرای بسیاری از اهداف نظریه اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی نظیر رمز نگاری کوانتومی[۲]، کدگذاری فشرده[۳] و ... مورد استفاده قرار می گیرد.

مهمترین مسالهٔ مربوط به درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی تعیین مرز بین حالتهای درهتنیده و حالتهای جدا از هم، که هنوز بخوبی تعیین نشده است، می باشد. گرچه معیار معروف پرس[۴]—هورودکی[۵] که بر اساس ترانهاد جزئی مثبت[۶] می باشد بروشنی این مرز را در سیستمهای فیزیکی دوتایی با ابعاد پایین نظیر (۲ ⊗ ۲) و (۳ ⊗ ۲) تعیین می کند، امااین معیار هیچ کارایی برای حالتهای درهمتنیدهٔ PPT[۷] که درسیستمهای مرکب فیزیکی با ابعاد بالاتر ظاهر می شوند ندارد.

کاراترین و عمومی ترین روش برای مشخص کردن درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی، درسیستمهای فیزیکی باابعاد بالاتر، استفاده از شاهدهای درهمتنیدگی، EWs[۸]، می باشد. EWs ابزار اساسی در نظریهٔ درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی می باشد به این دلیل که نشان داده شده است برای هر حالت درهمتنیده حداقل یک EW وجود دارد که بتواند درهمتنیدگی آنرا آشکار کند. عملگر هرمیتی W گفته می شود که یک EW است اگر مقدار انتظاری آن با تمام حالتهای جداپذیر مثبت باشد و بعلاوه مقدار انتظاری آن با یک حالت درهمتنیده منفی باشد. واضح است که ساختن شاهدهای درهمتنیدگی کار بسیار مشکلی است چرا که ممکن است بتوانیم عملگر هرمیتی پیدا کنیم که مقدار انتظاری آن با یک حالت درهمتنیده منفی باشد ولی کنترل اینکه مقدار انتظاری عملگر مربوطه باتمام حالتهای جداپذیر مثبت است، کار دشواری می باشد. بنابراین سوال اساسی ذیل مطرح می شود: چه موقع یک عملگر هرمیتی می تواند شاهد

---

[۱] Entanglement
[۲] Cryptography
[۳] Dense coding
[۴] Peres
[۵] Horodecki
[۶] Positive Partial Transpose
[۷] Positive Partial Transpose
[۸] Entanglement Witnesses

درهمتنیدگی باشد؟ پاسخ به این سوال منجر به ارائهٔ رهیافتهای مختلفی شده است. متداولترین آنها مبتنی بر الگوریتم برنامه ریزی خطی می باشد که حالت خاصی از بهینه سازی محدب می باشد. از طرف دیگر نگاشتهای مثبت[۹] نگاشتهایی هستند که هر عملگر مثبت را به عملگر مثبت نگاشت می کنند. اما هر توسیع آنها مثبت نمی باشد. برطبق یکریختی جمیولوفسکی[۱۰]، نگاشتهای مثبت در تناظر یک به یک با شاهدهای درهمتنیدگی هستند.

شاهدهای درهمنیدگی و نگاشتهای مثبت به دو دسته تقسیم می شوند: تجزیه پذیر و تجزیه ناپذیر، آنهایی که قادرند درهمتنیدگی حالتهای PPT را آشکار کنند تجزیه ناپذیر[۱۱] هستند در غیر اینصورت تجزیه[۱۲] پذیرند. با توجه به اهمیتی که تشخیص درهمتندگی حالتهای PPT در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی دارند، بررسی شاهدها و نگاشتهای تجزیه ناپذیر اهمیت پیدا می کنند. همچنین با توجه به اهمیت بخصوصی که شاهدهای درهمتنیدگی و نگاشتهای مثبت بهینه در بررسی درهمتندگی حالتهای کوانتومی دارند لذا ما علاقه داریم شاهدها و نگاشتهایی را طراحی و مطالعه کنیم که بهینه هم باشند. تعاریف متعددی از بهینگی شاهدهای درهمتندگی ارائه شده است که معروفترین آنها منسوب به لونشتاین[۱۳] و همکارانش می باشد. بر طبق تعریف لونشتاین یک شاهد درهمتندگی بهینه است هرگاه هیچ عملگر مثبتی را نتوان از آن کم کرد. همینطور یک شاهد درهمتندگی تجزیه ناپذیر بهینه است هر گاه نتوان هیچ عملگر تجزیه پذیری را از آن تفریق کرد. استفاده از برنامه ریزی خطی در ساختن شاهدهای درهمتنیدگی منجر به معرفی ناحیهٔ شدنی[۱۴] می شود. ناحیهٔ شدنی مجموعهٔ محدبی است که در فضای اقلیدسی R^n واقع است و نظیر حالتهای جداپذیر می باشد. n تعداد عملگرهایی است که در ساختن شاهد مورد نظر استفاده می شود. لازم به ذکر است که شکل ناحیهٔ شدنی بستگی به انتخاب عملگرهای مربوطه دارد. در فصل سوم نشان داده خواهد شد که انتخاب مجموعه‌های مختلف از عملگرها در ساختن شاهدهای درهمتنیدگی محاسن خاص خود را دارند. هر ابرصفحه‌ای[۱۵] که ناحیهٔ شدنی را قطع نکند یا بر آن مماس باشد نظیر یک شاهد درهمتنیدگی است. ابرصفحه هایی که بر ناحیهٔ شدنی مماس هستند نظیر شاهدهای در همتنیدگی بهینه می باشند. فهمیدن اینکه شاهدهای مزبور تجزیه ناپذیر هستند یا نه بستگی به این دارد که آیا آنها قادر هستند در همتنیدگی حالتهای

[۹] Positive Maps
[۱۰] Jamiolkowski
[۱۱] Nondecomposable
[۱۲] Decomposable
[۱۳] Lewenestein
[۱۴] Feasible Region
[۱۵] Hyperplane

درهمتنیدهٔ PPT را تشخیص دهند یا نه.

فصل ۱

بررسی منابع

درهم تنیدگی کوانتومی نخستین بار توسط اینشتین، پودلسکی[۱] و رزن[۲] در سال ۱۹۳۵ مورد مطالعه قرار گرفت[۱]. مهمترین خصوصیت درهم تنیدگی کوانتومی عدم موضعیت[۳] آن می باشد. تلاشهای متعددی از طرف فیزیکدانان به عمل آمد تا عدم موضعیت، که بارزترین وجه تمایز مکانیک کوانتومی با فیزیک کلاسیک می باشد، در چاچوب نظریه های دیگری غیر از مکانیک کوانتومی موسوم به نظریه های متغیر نهان[۴] بیان شود[۲]. در سال ۱۹۶۴ بل[۵] نشان که از دل هر نظریهٔ متغیر نهان یک نامساوی بدست می آید و نشان داد که حالتهای درهم تنیده از این نامساوی تخطی می کنند و بدین وسیله نتیجه گرفت که درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی فقط در نظریهٔ کوانتومی می گنجد[۳].

از طرف دیگر، درهمتنیدگی کوانتومی از دیدگاه کاربردی اهمیت بسزایی در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی و محاسبات کوانتومی دارد. آن می تواند به عنوان یک منبع فیزیکی برای اجرای بسیاری از برنامه های مربوط به اطلاعات کوانتومی، محاسبات کوانتومی، رمزنگاری کوانتومی و مخابرات کوانتومی مورد استفاده قرار گیرد[۴] و [?]. بنابراین موارد، درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی در آخرین دهه از قرن بیستم مورد توجه خاص فیزیکدانان قرار گرفت. بزرگترین مسالهٔ بنیادی در این مورد که فیزیکدانان با آن مواجه بودند این بود که در یک سیستم کوانتومی چند ذره ای، چه موقع یک حالت مرکب از این سیستم جدا پذیر[۶] است و چه موقع جدا پذیر نیست یعنی درهم تنیده است. بعبارت دیگر چگونه مرز بین حالتهای درهمتنیده و جداپذیر قابل شناسایی است. اگر این مرز شناسایی شود ما به هدف نهایی خودمان در نظریهٔ اطلاعات کوانتومی نایل خواهیم آمد.

اولین قدم مهم در این زمینه توسط پرس[۷] در سال ۱۹۹۶ برداشته شد. او توانست یک شرط لازم برای جدا پذیری (عدم درهمتنیدگی) حالات کوانتومی بدست آورد[۵]. یعنی اینکه اگر حالت کوانتومی یک سیستم چند ذره ای جدا از هم باشد(در همتنیده نباشد)، ترانهاد جزئی ماتریس چگالی این سیستم دارای ویژه مقادیر مثبت نیمه معین خواهد بود. درهمان سال هورودکی و همکارانش ثابت کردند که نگاشت ترانهاد جزئی که پرس معرفی کرده بود برای

---

[۱] Podolosky
[۲] Rosen
[۳] Nonlocality
[۴] Hidden Variable Theories
[۵] Bell
[۶] Separable
[۷] Peres

سیستمهای کوانتومی (۲ ⊗ ۲) و (۳ ⊗ ۲)، یک شرط لازم و کافی برای جدا پذیری است[٦]. یعنی اگر ماتریس حاصل از ترانهاد جزئی ماتریس چگالی مربوط به آن سیستم کوانتومی مثبت باشد سیستم جدا از هم است و اگر منفی باشد درهمتنیده است. بنابراین آنها توانستند مرز بین حالتهای جدا از هم و درهمتنیده را در این سیستمهای کوانتومی، که در نوع خودشان ساده ترین آنها می باشند، تعیین کنند.

از طرف دیگر، یکی از اهداف مورد نظر درمطالعهٔ درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی، علاوه بر آشکار سازی آن، کمی کردن آن می باشد. برای این منظور سنجه های[۸] متعددی بکار رفته است از جمله درهمتنیدگی قابل قطران[۹] که میزان استخراج یک حالت درهمتنیدهٔ استاندارد از یک حالت کوانتومی نوفه دار[۱۰] را بیان می کند[۷]. سنجهٔ دیگر آنتروپی نسبی درهمتنیدگی می باشد. این سنجه معیاری بصورت فاصله بدست می دهد که نشان دهندهٔ آنست که یک حالت درهمتنیده در چه فاصله ای از مجموعهٔ حالتهای جدا پذیر قرار دارد[۸]. همچنین می توان از سنجهٔ منفی بودن[۱۱] اسم برد. در این سنجه عملگر ماتریس چگالی بخاطر ترنهاد جزئی، ویژه مقدار منفی بدست می آورد. اندازهٔ این ویژه مقدار منفی بصورت یک سنجه عمل می کند که معروف به سنجهٔ منفی بودن است[۹]. معروفترین سنجه ای که بسیار کاربرد دارد موسوم به شکلیابی درهمتنیدگی[۱۲] است که توسط ووترز[۱۳] در سال ۱۹۹۸ ارائه شد. او شکلیابی درهمتنیدگی را از طریق عامل انطباق[۱۴] معرفی کرد و توانست توسط آن مقدار درهمتنیدگی را بصورت کمی محاسبه کند[۱۰]. این سنجه که بصورت یک تابع افزایشی است به حالتهای جداپذیر مقدار صفر و به حالتهای با بیشترین مقدار درهمتنیدگی مقدار یک را نسبت می دهد. سنجه های متعدد دیگری که از اهمیت کمتری برخوردارند را می توان در مرجع [۱۱] یافت. درساختن بسیاری از این سنجه ها از یک روش بهینه سازی استفاده می شود. یکی از این روشهای بهینه سازی، بهینه سازی محدب[۱۵] می باشد[۱۲]. این روش رهیافت جدیدی را برای

---

[۸] Measure
[۹] Distillable
[۱۰] Noisy
[۱۱] Negativity
[۱۲] Entanglemen of Formation
[۱۳] Wooters
[۱۴] Concurrence
[۱۵] Convex Optimization

بدست آوردن تجزیهٔ لونشتاین—سنپرا[۱۶]، قدرت درهمتنیدگی[۱۷]، انتروپی نسبی درهمتنیدگی[۱۸] بدست می دهد [۱۵]، [۱۴] و [۱۳].

همانطور که میدانیم معیار پرس—هورودکی فقط برای ساده ترین سیستمهای کوانتومی نظیر (۲ ⊗ ۲) و (۳ ⊗ ۲)، دارای کارایی می باشد. برای مثال آن معیار برای یک سیستم کوانتومی نظیر (۳ ⊗ ۳)، که نزدیکترین سیستم از نظر سادگی به سیستمهای (۲ ⊗ ۲) و (۳ ⊗ ۲) می باشد، هیچ کارایی از خود نشان نمی دهد. بنابراین برای سیستمهای کوانتومی با پیچیدگی بالا هیچ معیار جامعی که بتواند مرز منطقهٔ جدا پذیر و درهمتنیده رامشخص سازد در دسترس نیست.

در سیستمهای پیچیده تر از (۲ ⊗ ۲) و (۳ ⊗ ۲)، کلی ترین و کاراترین روش برای حل مسالهٔ درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی استفاده از شاهدهای درهمتنیدگی می باشد[۱۶]، [۱۷]،[۱۸]،[۱۹]،[۲۰]، [۲۱]،[۲۲] و [۲۳]. از آنجا که برای هر حالت درهمتنیده حداقل یک شاهد درهمتنیدگی وجود دارد که درهم تنیدگی آنرا آشکار کند لذا شاهدهای درهمتنیدگی ابزار اساسی در مطالعهٔ درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی هستند[۲۴].

یکی از روشهای استاندارد و کلاسیک در ساختن شاهدهای درهمتنیدگی بهینه سازی محدب می باشد. این روش غالبا بصورت برنامه ریزی نیمه معین[۱۹] و برنامه ریزی خطی[۲۰] بکار می رود. لازم به یادآوری است که روشهای تحلیلی و عددی دیگر نیز مبتنی بر الگوریتم بهینه سازی محدب هستند. با استفاده از الگوریتم بهینه سازی محدب، شاهدهای درهمتنیدگی متنوعی با کاراییهای مختلف ساخته شده است که به چند مورد اشاره می شود.

دوهرتی و همکارانش در مراجع [۲۵]، [۲۶] و [۲۷] با استفاده از ایدهٔ وجود توسیع برای[۲۱] حالتهای جداپذیر دوتایی به چندتایی، نشان دادند حالتهای درهمتنیده ای که توسط معیار ترانهاد جزئی مثبت یا به اختصار PPT قابل تشخیص نیستند، دارای چنین توسیعی نمی باشند. روش کار آنها بر اساس برنامه ریزی نیمه معین بود. آنها از این الگوریتم بصورت عددی استفاده کرده به این نتیجه رسیدند که برای حالتهای درهمتنیده این الگوریتم ناشدنی[۲۲] است و به دنبال این با استفاده از دوگان این الگوریتم، به شاهد درهمتنیدگیی رسیدند که حالت درهمتنیدهٔ مزبور را

---

[۱۶] Lewenestein-Sanpera
[۱۷] Robustness of Entanglement
[۱۸] Relative Entropy of Entanglement
[۱۹] Semi Definite Programming
[۲۰] Linear Programming
[۲۱] Extension
[۲۲] Infeasible

آشکار سازی می کرد. در این روش ملاحظه می شود که ایدهٔ شهودی توسیع در نهایت به پیدا کردن شاهدهای درهمتنیدگی برای مساله مورد نظر می انجامد. اما ضعف این روش در این است که نمی تواند در مورد وجود شاهدهای درهمتنیدگی تجزیه ناپذیر بصورت تحلیلی، مطلبی را ارائه بدهد.

از طرف دیگر، جعفریزاده و همکارنش با استفاده از برنامه ریزی خطی توانستند شاهدهای درهمتنیدگی تجزیه ناپذیر متعددی بدست آورند. این شاهدهای درهمتنیدگی که روی فضای هیلبرت با پایه های بل قطری[۲۳] تعریف می شوند، قادر هستند دسته ای از حالتهای درهمتنیدهٔ PPT را آشکار سازی کنند[۲۸]. همچنین در این مرجع بهینه بودن این شاهدها بررسی شده است. استفاده از عملگرهای پایدار ساز[۲۴] حالتهای کوانتومی چند کیوبیتی در ساختن شاهدهای درهمتنیدگی خوشه ای[۲۵]، با استفاده از برنامه ریزی خطی همراه با بحث بهینگی این شاهدها، در مرجع انجام شده است[۲۹]. همچنین با بکار بردن رهیافت مزبور، طراحی شاهدهای درهمتنیدگی چند اسپینوری نسبیتی[۲۶] در مرجع [۳۰] به عمل آمده است. در [۳۱] از شاهدهای درهمتنیدگی غیر خطی برای تعیین منطقهٔ درهمتنیدگی مربوط به حالتهای سه کیوبیتی PPT $۲ \otimes ۲ \otimes ۲$ که در پایه های ناسودار مشترک[۲۷] نوشته شده است، استفاده گردیده است. همچنین تعیین منطقهٔ درهمتنیدگی حالتهای PPT در سیستمهای کوانتومی با مشخصهٔ $۲ \otimes ۲ \otimes d$ با استفاده از شاهدهای درهمتنیدگی خطی و غیر خطی، به کمک الگوریتم بهینه سازی محدب، در مرجع [۳۲] انجام گرفته است.

در تمامی این موارد، در خلال اجرای الگوریتم برنامه ریزی خطی، مسالهٔ اصلی مشخص کردن مرز ناحیهٔ شدنی[۲۸] می باشد. مرزهای این ناحیه در حکم شاهدهای درهمتنیدگی بهینه هستند. اگر بشود مرزهای این ناحیه بطور دقیق تعیین شود ما به هدف اصلی خود در نظریهٔ حالتهای درهمتنیدهٔ کوانتومی نایل خواهیم آمد چرا که این مرز جدا کنندهٔ حالتهای درهمتنیده از حالتهای جداپذیر است. حسن این روش در حل مسائل هندسی بودن آن می باشد. شکل ناحیهٔ شدنی بستگی به انتخاب عملگرهایی دارد که شاهد درهمتنیدگی بر حسب آنها نوشته شده است.

یکی دیگر از ابزارهای اساسی در مطالعهٔ درهمتنیدگی حالتهای کوانتومی، نگاشتهای مثبت

---

[۲۳] Bell State-Diagonal
[۲۴] Stabilizer
[۲۵] Cluster Entanglement Witnesses
[۲۶] Multi-Spinor
[۲۷] Mutually Unbiased Bases
[۲۸] Feasible Region

می باشند که به همان اندازهٔ شاهدهای درهمتنیدگی اهمیت دارند[۳۳]، [۳۴]، [۳۵]، [۳۶]، [۳۷]. قضیهٔ اساسی جمیولوفسکی یکریختی[۲۹] بین شاهدهای درهمتنیدگی و نگاشتهای مثبت را بیان می کند[۳۸]. بدین ترتیب که برای هر عملگر داده شده ای می توان نگاشت مربوط به آن عملگر را بدست آورد و بر عکس برای هر نگاشت داده شده ای می توان عملگر مربوطه را نتیجه گرفت. بنابر این قضیه، نگاشتهای مثبت نظیر شاهدهای درهمتنیدگی هستند و نگاشتهای کاملا مثبت[۳۰] نظیر عملگرهای مثبت می باشند. همانطور که در ابتدا اشاره شد پرس از نگاشت مثبت ترانهاد یک شرط لازم برای جدا پذیری بدست آورد. بعد از او هورودکی و همکارانش نگاشت مثبت کاهشی[۳۱] را معرفی کردند و با استفاده از این نگاشت، شرط لازم و کافی برای قطران پذیری حالتهای کوانتومی را بدست آوردند[۳۹]. چوی[۳۲] در مرجع[۴۰] برای سیستم $(۳ \otimes ۳)$ نگاشتی را معرفی کرد که قادر بود درهمتنیدگی طیف وسیعی از حالتهای درهمتنیده، مخصوصا حالتهای PPT، را آشکار سازی کند. بعدها کراچنسکی[۳۳] و همکارانش ایدهٔ چوی را برای سیستمهای کلی تر $(d \otimes d)$ تعمیم دادند[۴۱]. از طرف دیگر، برائور[۳۴] با تلفیق نگاشتهای مثبت تجزیه پذیر کاهشی و معکوس زمانی[۳۵] در سیستمهای کوانتومیی که دارای تقارن اندازه حرکت زاویه ای هستند، توانست نگاشت مثبتی بدست آورد. او نشان داد که شاهدهای بدست آمده از این نگاشت تجزیه ناپذیر بهینه هستند و نتیجه گرفت که نگاشت مزبور تجزیه ناپذیر بهینه می باشد[۴۲].

---

[۲۹] Isomorphism
[۳۰] Complete Positive Maps
[۳۱] Reduction
[۳۲] Choi
[۳۳] Chruscinski
[۳۴] Breuer
[۳۵] Time Reversal

فصل ۲

مبانی و روش ها

۱.۲ شاهدهای درهمتنیدگی

درهمتنیدگی کوانتومی یکی از اسرار آمیزترین پدیده های طبیعت است که در ابعاد زیر اتمی خود را نشان می دهد و تنها در چارچوب مکانیک کوانتومی توصیف پذیر است. گرچه فون نویمن[۱] در سال ۱۹۳۲ توصیف مربوط به جهان در حوزهٔ مکانیک کوانتوم غیر نسبیتی را تکمیل کرده بود، اما اینشتین، پودولسکی، رزن و شرودینگر وجود یک چهرهٔ شبهگون در رهیافت مکانیک کوانتومی را تشخیص دادند که در فیزیک قرن بیست و یکم در مرکز توجهات قرار دارد. این چهره از مکانیک کوانتومی، که درهمتنیدگی نام دارد، بر این نکته دلالت دارد که حالتهای کلی‌ای[۲] در یک سیستم مرکب یافت می شود که نمی توان آنها را بصورت حاصلضرب حالتهای مربوط به زیر سیستمها نوشت. ما به این عبارت که توصیف طبیعت در سطوح بنیادی، به مکانیک کوانتومی احتیاج دارد نه کلاسیک، عادت کرده‌ایم. ولی با بررسی جزئیات، متوجه می شویم که این موضوع خیلی هم بدیهی نیست. به عنوان مثال در توصیف سیستمهای مرکب، با جایگزینی مفهوم کلاسیکی فضای فاز بامفهوم انتزاعی فضای هیلبرت، متوجه یک تفاوت اساسی بین این دو توصیف می شویم. برای توضیح بیشتر، یک سیستم مرکب با n زیر سیستم در نظر می گیریم. بر طبق توصیف کلاسیکی، فضای حالت این سیستم ضرب کارتزی فضای حالت تک تک زیر سیستمهاست یا به عبارت دیگر، حالت کلی این سیستم همیشه یک حالت ضربی از زیر سیستمهای مجزا از هم است. اما در رهیافت کوانتومی، فضای هیلبرت کلی برابر است با حاصل ضرب فضای هیلبرت تک تک زیر سیستمها، یعنی $H = H_1 \otimes H_2 \otimes ... \otimes H_n$. اصل برهمنهی این امکان را به ما می دهد که حالت کلی سیستم را بصورت زیر بنویسیم

$$|\psi\rangle = \sum_{i_n} c_{i_n} |i_n\rangle, \qquad (۱.۲)$$

که در آن $i_n = i_1, i_2, i_3, ..., i_n$ و $|i_n\rangle = |i_1\rangle \otimes |i_2\rangle \otimes |i_3\rangle \otimes ... \otimes |i_n\rangle$ می باشد. $|\psi\rangle$ در حالت کلی نمی تواند بصورت حاصل ضرب حالتهای مربوط به تک تک ذرات، یعنی $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes |\psi_3\rangle \otimes ... \otimes |\psi_n\rangle$، نوشته شود. رابطهٔ فوق، نشان دهندهٔ پدیدهٔ در همتنیدگی در سیستمهای کوانتوم مکانیکی می باشد. این پدیده در واقع بخاطر بر همکنش فیزیکی بین زیر سیستمهای یک سیستم مرکب، ایجاد می شود.

---

[۱] Von Neumann

[۲] Global States