دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

هندسه التصاق‌های کارتان بر روی خمینه‌های کشی—ریمان

رساله‌ی دکتری ریاضی محض‌هندسه،

مسعود سبزواری

استاد راهنما

دکتر منصور آقاسی

بهمن ماه ۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

رساله‌ی دکتری ریاضی محض‌هندسه، آقای مسعود سبزواری

تحت عنوان

هندسه التصاق‌های کارتان بر روی خمینه‌های کشی—ریمان

در تاریخ ۲۶ بهمن ماه ۱۳۹۰ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱— استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر منصور آقاسی
۲— استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر اعظم اعتماد
استاد مشاور پایان‌نامه	پروفسور ژوئل مرکر (دانشگاه پاریس ۱۱ فرانسه)
۳— استاد داور	دکتر مهدی نجفی خواه (دانشگاه علم و صنعت)
۴— استاد داور	دکتر بهروز بیدآباد (دانشگاه امیرکبیر)
۵— استاد داور	دکتر امیر هاشمی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده　　دکتر اعظم اعتماد دهکردی

چکیده

محاسبه التصاق‌های کارتان را می‌توان از جمله مهم‌ترین و در عین حال پیچیده‌ترین بخش‌ها در مطالعه هندسه کارتان دانست. در این رساله به محاسبه التصاق و انحنای کارتان متناظر با دگردیسی‌های دایره هایزنبرگ $\mathbb{H}^3$ در فضای مختلط $\mathbb{C}^2$ می‌پردازیم. اگر چه هندسه کارتان مورد بحث به نوعی ساده‌ترین نوع از این دست است (که اولین بار در سال ۱۹۳۲ توسط خود کارتان بررسی شد) اما محاسبات متناظر بسیار سنگین و پیچیده هستند. به‌علاوه در این‌جا قصد داریم تا التصاق و انحنای کارتان مورد نظر را با استفاده از الگوریتم تاناکا که مبتنی بر روش‌های جبری است به‌دست آوریم. برای این منظور لازم است به مفاهیم دیگری مانند خمینه‌های کشی—ریمان، کوهمولوژی جبرهای لی، جبر لی همریختی‌های بینهایت کوچک خمینه‌های کشی—ریمان و غیره نیز بپردازیم. نتایج این تحقیق (برای اولین بار) کاملا بر اساس تنها داده مسئله یعنی نگاشت‌های تعریف‌گر دگردیسی‌های دایره هایزنبرگ ارائه می‌شوند. این موضوع ارزش کار را از آن جهت بالا می‌برد که می‌توان مفهوم التصاق و انحنای کارتان را به‌شکل بهتر و محسوس‌تری بررسی کرد. در پایان الگوریتمی جهت محاسبه کوهمولوژی مراتب دلخواه (سوپر) جبرهای لی متناهی بعد با استفاده از ابزار پایه‌های گربنر ارائه خواهد شد.

کلمات کلیدی. هندسه کارتان، التصاق کارتان، کوهمولوژی جبرهای (سوپر) لی

فهرست مطالب

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ هندسه کارتان

مفهوم هندسه کارتان در اوایل قرن بیستم و زمانی مطرح شد که الی کارتان، ریاضی‌دان برجسته فرانسوی و یکی از پیشگامان نظریه لی، بر روی مسئله هم‌ارزی کار می کرد. در این مسئله، هدف تعیین شرایطی است که تحت آن‌ها دو مفهوم خاص هندسی توسط یک نگاشت وابرسانی به یکدیگر تصویر شوند. این مسئله می‌تواند در موضوعات مختلفی مورد بررسی قرار گیرد. به عنوان مثال می‌توان به هم‌ارزی خمینه‌ها، هم‌ارزی معادلات دیفرانسیل، هم‌ارزی قاب‌ها، هم‌ارزی هم—قاب‌ها و ... اشاره کرد.

در حالت خاص ابررویه‌های حقیقی—تحلیلی موضعی در فضای مختلط $\mathbb{C}^۲$، هانری پوآنکاره در سال ۱۹۰۷ مسئله هم‌ارزی را برای خمینه‌های کشی—ریمان بررسی کرد. پس از آن کارتان در سال ۱۹۳۲ این مسئله را به‌طور کامل حل کرد [۱۴]. در واقع کارتان توانست مفاهیم و ابزارهای جدیدی معرفی کند که با کمک آن‌ها امکان بررسی مسئله هم‌ارزی در بسیاری از حالات در قالب هم‌ارزی هم—قاب ها وجود داشت (مرجع [۴۹] را ببینید). او توانست الگوریتمی ابداع کند که بر اساس آن تصمیم‌گیری در مورد معادل بودن دو خمینه داده شده $M_۱$ و $M_۲$ که دارای خاصیت هندسی خاصی هستند را در قالب مفهوم هم—قاب‌ها امکان‌پذیر می‌ساخت. در واقع ایده اصلی در ساختن دو کلاف برداری اولیه $\mathcal{G}_۱$ و $\mathcal{G}_۲$ به ترتیب

روی M_1 و M_2 همراه با دو هم‌ـ قاب $\omega^1 := \{\omega_1^1, \ldots, \omega_1^n\}$ روی $\mathcal{G}_1$ و $\omega^2 := \{\omega_2^1, \ldots, \omega_2^n\}$ روی $\mathcal{G}_2$ است به‌طوری‌که M_1 و M_2 معادل هستند اگر و تنها اگر یک نگاشت دیفیومرفیسم:

$$\Phi : \mathcal{G}_1 \longrightarrow \mathcal{G}_2$$

موجود باشد به‌طوریکه هم‌ـقاب ω^1 را به هم‌ـقاب ω^2 نظیر کند. به عبارت دیگر:

$$\Phi^*(\omega_2^i) = \omega_1^i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

این موضوع انگیزه‌ای برای کارتان شد که به شکل زیرکانه‌ای هندسه مورد نظر خود را معرفی کند. او ابتدا آن را هندسه توسیع‌ها نامید (زیرا در واقع توسیعی از دو هندسه معروف دیگر در زمان او یعنی هندسه کلاین و هندسه ریمانی بود)، مفهومی که امروزه به افتخار وی به نام هندسه کارتان شناخته می‌شود.

مسئله ساختن یک التصاق کارتان را می‌توان مهم‌ترین بخش از نظریه هندسه کارتان نامید که دارای تاریخچه‌ای طولانی و تا حدودی متفاوت است. در ابتدا، الگوریتم ارائه شده توسط خود کارتان امکان ساختن این التصاق را در مواردی امکان‌پذیر نمود. او در ابتدا توانست الگوریتمی ارائه دهد که بر اساس آن برای ابررویه‌های فضای $\mathbb{C}^2$ التصاق‌های کارتان قابل محاسبه بود [۱۴]. پس از کارتان بسیاری از شاگردان و دیگر ریاضی‌دانان بر روی نظریه وی کار کردند. محسن هشترودی شاگرد ایرانی وی توانست مسئله هم‌ارزی کارتان را برای معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از مرتبه سه حل کند [۲۶]. چرن (شاگرد چینی‌الاصل کارتان) و موزر [۱۵] از یک‌سو و تاناکا [۵۷] از سوی دیگر و هم‌زمان توانستند روش‌های موثرتری ارائه نمایند که امکان ساخت التصاق کارتان را برای هر خمینه کشی‌ـریمان ممکن می‌ساخت (مرجع [۳۷] را برای مشاهده ارتباط این دو روش ببینید).

امروزه هندسه کارتان در حالت خاص و مهم آن یعنی هندسه‌های سهموی مورد توجه بسیار قرار گرفته و توسط ریاضی‌دانانی مانند آندریاس شاپ، یان اسلوواک و غیره بررسی شده است [۱۳، ۱۲].

اخیرا والری بلوشاپکا، ولادیمیر اژوف و جرد اشمالز در [۱۰] توانسته‌اند با بکارگیری روش تاناکا، التصاق کارتان مناسبی برای دگردیسی یک مدل جهانی M در $\mathbb{C}^3$ بیابند. با توجه به تحقیقات صورت گرفته به‌نظر می‌رسد که این مقاله اولین تحقیق به چاپ رسیده برای محاسبه عملی یک التصاق کارتان با روش تاناکا باشد. به‌علاوه به‌تازگی نیز اژوف، بن مک لولین و اشمالز مقاله جالبی در Notices of AMS به چاپ رسانده‌اند که مسئله ساخت التصاق کارتان بر روی ابررویه‌های $\mathbb{C}^2$ (که قبلا توسط خود کارتان، چرن و موزر با روش الگوریتم کارتان حل شده بود) با روش تاناکا حل کرده‌اند. این مقاله در واقع انگیزه اصلی شروع تحقیق مورد بحث در این رساله است.

۱—۲ صورت مسئله

بر خلاف تصور بسیاری (به‌عنوان مثال ریاضی‌دان برجسته لهستانی پاول نوروسکی که با وی در کارگاه برگزار شده در تیرماه سال جاری در موسسه اروین شرودینگر ESI وین بحث کرده‌ام)، اگر چه کارتان کاری بسیار سخت و در خور تقدیر برای محاسبه التصاق کارتان بر روی ابر رویه‌های تعریف شده ناتباهیده حقیقی—تحلیلی سه بعدی $M^۳$ در $\mathbb{C}^۲$ که توسط نگاشت‌های حقیقی‌مقدار به‌صورت زیر با مختصات مختلط $(z,w)=(x+iy,u+iv)$

$$v=\varphi(x,y,u)=x^۲+y^۲+O(۳)$$

انجام داد، اما متاسفانه فرمول‌های ارائه شده توسط وی (و سایر ریاضی‌دانان که بر روی ایده وی کار کرده‌اند) فرمول‌های موثری نبودند. در واقع مشکل اساسی در این‌جاست که تا زمانی‌که التصاق کارتان بر روی ابررویه‌های $M^۳$ بر اساس تنها داده مسئله یعنی نگاشت مشتق‌پذیر φ ارائه نگردند، مسئله هنوز مبهم خواهد ماند. به‌طور خلاصه می‌توان ادعا کرد که ارائه نتایج کارتان بر اساس این داده سالهاست که یک مسئله باز می‌باشد.

در این رساله قصد داریم تا با استفاده از روش تاناکا (که مبتنی بر ساختارهای جبری مانند کوهمولوژی مرتبه دوم جبرهای لی است) مسئله ساخت التصاق کارتان بر روی خمینه‌های کشی—ریمان $M^۳$ را مجددا بررسی کرده و فرمول‌های مربوطه را در قالب تنها داده مسئله یعنی φ و با فرض ساده $C^۶$ (و نه حقیقی—تحلیلی) بودن آن ارائه نمائیم .

اگرچه این ابررویه‌ها ساده‌ترین نوع خمینه های کشی—ریمان هستند که مسئله ساخت التصاق کارتان بر روی آن‌ها بررسی شده است اما خواهیم دید که این مسئله ذاتا مسئله‌ای سنگین و دارای محاسبات بسیار پیچیده است.

به‌علاوه قصد داریم با توجه به قضایا و نتایج موجود در مبحث هندسه کارتان، مسئله یکریخت بودن موضعی ابررویه‌های $M^۳$ با حالت خاص و بارز آن یعنی دایره هایزنبرگ $\mathbb{H}^۳$ تعریف شده توسط ضابطه

$$v=x^۲+y^۲$$

را به‌طور کامل بررسی کرده و بر اساس نگاشت‌های تعریف کننده φ به آن پاسخ دهیم.

با تکیه بر روش تاناکا، روند انجام محاسبات و به‌دست آوردن نتایج لازم در این رساله در فصل‌های آتی به‌صورت زیر است

- محاسبه جبرلی لوی—تاناکا متناظر با دایره هایزنبرگ: این کار را با محاسبه جبر لی همریختی‌های بینهایت کوچک این دایره انجام می‌دهیم (فصل سوم).
- جبر تاناکای لازم در روش تاناکا را با اعمال توسیع تاناکا بر روی جبر لوی—تاناکای مذکور به‌دست می آوریم (فصل سوم).
- با محاسبه کوهمولوژی مرتبه دوم متناظر خواص مهمی از التصاق و انحنای کارتان مطلوب را پیش‌بینی می‌نماییم (فصل چهارم).
- پس از آن به یافتن یک قاب اساسی برای خمینه لوی ناتباهیده M^3 بر اساس تابع تعریف کننده φ خواهیم پرداخت و آن را محاسبه می‌نماییم. محاسبه این قاب بر اساس تنها داده مسئله یعنی φ باعث می‌شود که نتایج آتی همگی بر اساس آن به‌دست آیند. به‌علاوه، روابط پیچیده‌تری بین ضرب‌های براکت لی مکرر از طول حداکثر شش را به‌دست خواهیم آورد (فصل پنجم).
- سر انجام محاسبات پیچیده مربوط به یافتن تابع انحنای مربوطه را آغاز کرده و نتایج لازم را به‌دست می آوریم (فصل ششم).

به‌علاوه در انتهای این رساله به‌عنوان یک فصل مجزا، الگوریتمی موثر برای محاسبه کوهمولوژی جبرهای لی ارائه می‌دهیم که یکی از ابزارهای لازم در این نوشتار است.

طبق محاسبات دقیق صورت گرفته بر اساس تابع تعریف کننده φ، خواهیم دید که مسئله یکریختی دگردیسی‌های M^3 با دایره هایزنبرگ بر اساس صفر شدن دو تابع Δ_1 و Δ_4 (ارائه شده بر اساس تابع φ و مشتقات جزئی آن تا مرتبه شش) رده‌بندی خواهد شد. اما این محاسبات برای اولین بار پیچیدگی کار را به‌دقت مشخص می‌کند. در واقع بر اساس آن‌چه که در محاسبات صورت گرفته کاملا قابل مشاهده است، ضابطه هر یک از توابع فوق به‌شکل باور نکردنی شامل بیش از ۱۰۰۰۰ صفحه در محیط Maple است! این در حالی است که مسئله ساخت التصاق کارتان بر روی ابررویه‌های $\mathbb{C}^2$ ساده‌ترین محاسبات را در مقایسه با سایر ابررویه‌ها دارد.

حاصل تحقیقات صورت گرفته تاکنون دو مقاله چاپ شده [۱، ۲] بوده است.

۱—۳ الگوریتم کارتان و الگوریتم تاناکا

همان‌گونه که گفته شد در این رساله هدف انجام محاسبات مربوط به یافتن التصاق کارتان مطلوب بر پایه روشی است که توسط تاناکا ارائه شده است. با این‌حال در این‌جا قصد داریم مقایسه‌ای کوتاه بین این دو

روش بیان کنیم.

- روش کارتان بر اساس محاسبات روی هم—قاب‌ها (مجموعه‌ای از ۱—فرمی‌های مستقل خطی از M که فضای برداری T^*M را تولید می‌کنند) و استفاده از خواص آن‌ها است در حالی‌که روش تاناکا بیشتر بر اساس خواص قاب‌ها (مجموعه‌ای از میدان‌های برداری مستقل خطی روی خمینه M که فضای برداری TM را تولید می‌کنند) می‌باشد. می‌دانیم که مفاهیم قاب و هم—قاب دو مفهوم دوگان یکدیگر می‌باشند و این خود ارتباط تنگاتنگ این دو روش را نشان می‌دهد.

- در روش کارتان بیشتر از ابزارهای جبرخطی و هندسی (مانند تقلیل ماتریس ساختاری گروهی متناظر) استفاده می‌شود در حالی‌که روش تاناکا بیشتر بر روش‌ها و ابزارهای جبری (مانند کوهمولوژی و توسیع تاناکا) استوار است. به‌عنوان مثال در مدل مورد بحث روش کارتان به ساخت هندسه‌های کارتان مناسب $\mathcal{G} = M \times G$ متناظر با خمینه‌های M و گروه ساختاری ماتریسی G از ماتریس‌های به فرم

$$\begin{pmatrix} \mathsf{a} & \circ & \circ \\ \mathsf{b} & \mathsf{c} & \circ \\ \overline{\mathsf{b}} & \circ & \overline{\mathsf{c}} \end{pmatrix}$$

برای $\mathsf{a} \in \mathbb{R}$ و $\mathsf{b}, \mathsf{c} \in \mathbb{C}$ می‌پردازد، درحالی‌که در این رساله روش تاناکا را بر اساس این مدل ارائه خواهیم کرد (با توجه به پیچیدگی‌های موجود در هر دو روش، بررسی روش کارتان هدف این رساله نیست).

فصل ۲

مفاهیم و تعاریف ابتدایی

۲—۱ هندسه کارتان

در این فصل به ذکر مطالبی مقدماتی در مورد مفاهیم مورد نیاز در این رساله خواهیم پرداخت. قبل از ارائه تعریف هندسه کارتان ابتدا نیاز به بیان چند تعریف مقدماتی داریم.

تعریف ۲—۱ یک خمینه هموار G دارای ساختار گروهی که نگاشت‌های ضربی $G \times G \longrightarrow G$: . و وارون $i : G \longrightarrow G$ مربوط به آن هموار هستند را یک گروه لی می‌نامیم. به‌علاوه یک جبر لی، یک فضای برداری مانند $\mathfrak{g}$ همراه با یک نگاشت دو خطی $[.,.] : \mathfrak{h} \times \mathfrak{h} \longrightarrow \mathfrak{h}$ به نام براکت لی مانند است که در دو شرط زیر صدق می‌کنند:

(i) (خاصیت پادمقارن): $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = -[\mathsf{y}, \mathsf{x}]$.

(ii) (تساوی ژاکوبی): $[\mathsf{x}, [\mathsf{y}, \mathsf{z}]] + [\mathsf{z}, [\mathsf{x}, \mathsf{y}]] + [\mathsf{y}, [\mathsf{z}, \mathsf{x}]] = ۰$.

یک نگاشت خطی $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ بین دو جبر لی $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ را یک همریختی جبرهای لی می‌نامیم هرگاه برای هر $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$ داشته باشیم $\varphi([\mathsf{x}, \mathsf{y}]) = [\varphi(\mathsf{x}), \varphi(\mathsf{y})]$. در صورتی که G یک گروه لی دلخواه باشد مجموعه بردارهای مماس بر G در عضو همانی گروهی $e \in G$ تشکیل یک جبر لی می‌دهد که آن را جبر لی متناظر با گروه لی G نامیده و با $\mathfrak{g}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲–۲ فرض کنیم F یک فضای توپولوژی و برای دو خمینه B و E، نگاشت $\pi : E \longrightarrow B$ یک نگاشت هموار باشد. چهار تایی مرتب (E, B, π, F) را یک کلاف تاری با تار F می‌نامیم هرگاه برای هر $b \in B$ همسایگی بازی مانند $U_b \subset B$ شامل b و وابرسانی مانند $\varphi_b : \pi^{-1}(U_b) \longrightarrow U_b \times F$ موجود باشند به‌طوری‌که $pr \circ \varphi_b = \pi$ که در آن $pr : U \times F \longrightarrow U$ نگاشت تصویرگر است. زوج مرتب (U_b, φ_b) را یک چارت از این کلاف تاری می‌نامیم.

همچنین فرض کنیم G یک گروه لی باشد که به‌طور هموار روی تار F از کلاف تاری (E, B, π, F) عمل می‌کند. یک G–اطلس برای کلاف مذکور خانواده‌ای مانند $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i)\}$ از چارت‌های آن است به‌طوری‌که:

(i) U_iها خمینه B را پوشش می‌دهند.

(ii) برای دو چارت (U_i, φ_i) و (U_j, φ_j) از $\mathcal{A}$ نگاشت هموراری مانند $h_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G$ (که آن را نگاشت انتقال می‌نامیم) موجود باشد به‌طوری‌که نگاشت تغییر مختصات

$$\Phi := \varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : (U_i \cap U_j) \times F \longrightarrow (U_i \cap U_j) \times F$$

در شرط زیر صدق کند

$$\Phi(u, f) = (u, h_{ij}(u)f).$$

یک G–ساختار از کلاف تاری (E, B, π, F) یک کلاس هم‌ارزی روی G–اطلس‌های آن است. به‌علاوه این کلاف تاری را یک G–کلاف می‌نامیم هرگاه دارای یک G–ساختار باشد.

تعریف ۲–۳ یک G–کلاف مانند (E, B, π, F) را اولیه می‌نامیم هر گاه وابرسانی $\psi : G \longrightarrow F$ با تعریف $\psi(g) = gf_\circ$ برای عضوی از F مثل $f_\circ$ و برای هر $g \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که ضرب $F \times G \longrightarrow F$ حافظ تار باشد و به‌علاوه به صورت متعدی عمل کند (به این معنا که برای هر دو عضو x, y از F عضوی مانند $g \in G$ موجود باشد به‌طوری‌که $gx = y$).

هر گروه لی می‌تواند به صورت زیر بر روی خود عمل کند

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & ghg^{-1} \end{array}$$

بر این اساس نگاشت $Ad(g) : G \longrightarrow G$ که همریختی داخلی القا شده توسط $g \in G$ نام دارد به‌صورت $Ad(g)(h) = ghg^{-1}$ تعریف می‌شود. همچنین نگاشت $Ad: G \longrightarrow Aut(G)$ را عمل الحاقی القا شده توسط G بر خودش می‌نامیم.

تعریف ۲–۴ فرض کنیم G یک گروه لی با جبر لی متناظر $\mathfrak{g}$ باشد. برای هر $g \in G$ تعریف می‌کنیم $Ad(g) := \boldsymbol{Ad}(g)_* \in Gl(\mathfrak{g})$. بر این اساس نگاشت نمایش الحاقی $Ad : G \longrightarrow Gl(G)$ را به‌صورت $g \mapsto Ad(g)$ تعریف می‌کنیم.

تعریف ۲–۵ یک میدان برداری مانند v روی یک گروه لی مانند G را پایای چپ می‌نامیم هرگاه برای هر $g, g' \in G$ رابطه زیر برقرار باشد

$$L_{g_*}v(a) = v(ga).$$

در این‌جا $L_g : G \longrightarrow G$ ضرب از چپ g در عناصر G است.

ثابت می‌شود که (قضیه ۲.۳ صفحه ۱۰۲ از [۵۵]) مجموعه میدان‌های برداری از پایای چپ روی G با جبر لی متناظر $\mathfrak{g}$ یکریخت است. بر اساس این یکریختی، هر عضو v از جبر لی $\mathfrak{g}$ با میدان برداری پایای چپ $\mathsf{v}^\dagger$ متناظر می‌شود که به‌صورت $\mathsf{v}^\dagger(g) = L_{g_*}(\mathsf{v})$ برای هر $g \in G$ تعریف می‌شود.

حال آماده‌ایم تا تعریف هندسه کارتان را به‌صورت زیر ارائه دهیم.

تعریف ۲–۶ فرض کنیم G یک گروه لی و H یک زیرگروه بسته آن باشد. به علاوه فرض کنیم $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{h}$ جبرهای لی متناظر G و H باشند. یک هندسه کارتان مدل شده روی زوج مرتب $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ از یک خمینه M، یک $H-$کلاف اولیه مانند:

$$\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$$

همراه با یک ۱–فرمی $\mathfrak{g}-$مقدار

$$\omega : T\mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

است به‌طوری‌که در سه شرط زیر صدق کند:

(i) برای هر نقطه $p \in \mathcal{G}$، تبدیل خطی $\omega_p : T_p\mathcal{G} \longrightarrow \mathfrak{g}$ یک یکریختی فضاهای برداری باشد.

(ii) برای هر $h \in H$، اگر $R_h : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ نگاشت ضرب از راست با تعریف $R_h(p) = ph$ برای $p \in \mathcal{G}$ باشد آن‌گاه

$$R_h^*\omega = Ad(h^{-1}) \circ \omega$$

که در آن $Ad(h^{-1}) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ نگاشت الحاقی متناظر با h است [۵۵].

(iii) در صورتی‌که $\mathsf{h}^\dagger$ میدان برداری پایای چپ متناظر با h باشد، داشته باشیم:

$$\omega(\mathsf{h}^\dagger) = \mathsf{h}.$$

۱–فرمی ω را التصاق کارتان می‌نامیم (تعریف معادل دیگری با استفاده از مفاهیم نظریه پیمانه در [۵۵] قابل مشاهده است)

باید توجه داشت که مهم‌ترین بخش در تعریف فوق یافتن التصاق کارتان ω است. در واقع در صورت یافتن این التصاق، امکان ساختن H–کلاف اولیه $\mathcal{G}$ بر اساس الگوریتمی که در صفحه ۱۸۰ از [۵۵] آمده است امکان پذیر خواهد بود.

تعریف ۲–۷ فرض کنیم G یک گروه لی دلخواه باشد. التصاق ماروئر–کارتان متناظر با این گروه لی، یک ۱–فرمی نظیر $\omega_{MC} : TG \longrightarrow \mathfrak{g}$ است که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\omega_{MC}(v) = L_{g^{-1}*}(v), \qquad v \in T_gG.$$

می‌توان نشان داد که برای هر $v \in T_gG$، میدان برداری $L_{g^{-1}*}(v)$ در واقع میدان برداری پایای چپ متناظر v یعنی $v^\dagger$ است. به‌عبارت دیگر فرم ماروئر–کارتان نگاشتی است که هر عضو TG را به میدان برداری پایای چپ متناظر آن تصویر می کند. در واقع این فرم کلیه خواص یک التصاق کارتان را بر هر زیر گروه بسته G داراست [۵۵].

در پس‌زمینه هر هندسه کارتان مدل شده روی زوج مرتب $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ هندسه کارتان ثابتی قرار دارد که آن را هندسه فضای همگن یا هندسه کلاین می‌نامیم. این هندسه با قرار دادن $\mathcal{G} = G$، $M = G/H$ و $\omega = \omega_{MC}$ در تعریف هندسه کارتان به دست می‌آید. هندسه کلاین متقارن‌ترین و ساده‌ترین نوع از هندسه‌های کارتان است و در واقع می‌توان گفت که هندسه کارتان توسیعی از هندسه کلاین است.

به‌علاوه، فرم ماروئر–کارتان دارای خاصیت مهم دیگری نیز هست. در واقع می‌توان نشان داد که این فرم تساوی زیر را برقرار می کند که تساوی ساختاری نامیده می‌شود (بخش ۳.۳ از [۵۵] را ببینید)

$$d\omega_{MC}(X,Y) + \left[\omega_{MC}(X), \omega_{MC}(Y)\right] = 0. \qquad (1)$$

در این‌جا X و Y دو میدان برداری پایای چپ روی TG هستند. این خاصیت منحصر به فرد انگیزه‌ای ایجاد می‌کند تا برای هر هندسه کارتان دلخواه مدل شده روی $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ همراه با التصاق کارتان ω، انحنای K که یک ۲–فرمی $\mathfrak{g}$–مقدار است را به‌صورت زیر تعریف کنیم:

تعریف ۲–۸ برای هر هندسه کارتان دلخواه از نوع $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ همراه با التصاق کارتان ω، انحنای K به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

در صورتی که $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ نگاشت تصویرگر با تعریف $\rho(\mathrm{x}) = \mathrm{x} + \mathfrak{h}$ باشد، آن‌گاه $\rho(K)$ را تاب هندسه کارتان می‌نامیم. این هندسه را بدون تاب می‌نامیم هر گاه تاب آن نگاشت صفر باشد، به‌عبارت دیگر داشته باشیم $Im\, K \subset \mathfrak{h}$.

گزاره ۲–۹ برای دو عضو X_p, Y_p از $T_p\mathcal{G}$ انحنای $K_p(X_p, Y_p)$ صفر است هرگاه یکی از آن‌ها عضو T_pH باشند.

می‌توان نشان داد که در هر هندسه کارتان $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ مدل شده روی $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$، کلاف مماس TM با حاصل‌ضرب تاری $\mathfrak{g}$ و $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ یکریخت است. به بیان دقیق‌تر،

گزاره ۲–۱۰ فرض کنیم $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ یک هندسه کارتان مدل شده روی $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ باشد. آن گاه

$$TM \cong \mathcal{G} \times_H \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

به‌علاوه نمودار زیر برای هر $x \in M$ و $p \in \mathcal{G}$ جابجایی است.

$$\begin{array}{ccc} T_p(pH) & \longrightarrow & \mathfrak{h} \\ \downarrow & & \cap \\ T_p\mathcal{G} & \longrightarrow & \mathfrak{g} \\ \downarrow & & \downarrow \\ T_xM & \longrightarrow & \mathfrak{g}/\mathfrak{h}. \end{array}$$

اثبات . *قضیه ۳.۱۵ صفحه ۱۸۸ از [۵۵] را ببینید.* □

متناظر با انحنای کارتان K نگاشت دیگری که تابع انحنا نامیده می‌شود و آن را با نماد κ نمایش می‌دهیم نیز وجود دارد که هر کدام دیگری را نتیجه می‌دهد. با این‌حال در این رساله، از تابع انحنای κاستفاده بیشتری خواهد شد.

تعریف ۲–۱۱ برای یک هندسه کارتان تابع انحنای $\kappa : \mathcal{G} \longrightarrow Hom(\Lambda^2\mathfrak{g}/\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ به‌صورت زیر معرفی می گردد

$$\kappa_p(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = K_p(\omega_p^{-1}(\mathsf{x}), \omega_p^{-1}(\mathsf{y})), \qquad \mathsf{x} + \mathfrak{h},\ \mathsf{y} + \mathfrak{h} \in \mathfrak{g}/\mathfrak{h}.$$

می‌توان نشان داد (لم ۳.۲۳ صفحه ۱۹۱ از [۵۵] را ببینید) که تعریف فوق مستقل از انتخاب اعضای x, yاز $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ است؛ به‌همین دلیل نماد زیر را معرفی می‌نماییم.

نمادگذاری. *برای هر $\mathsf{x}+\mathfrak{h}\in\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$، میدان برداری $\widehat{X}:=\omega^{-1}(\mathsf{x})$ را که یک میدان برداری روی $\mathcal{G}$ است به‌صورت زیر تعریف و میدان برداری ثابت می‌نامیم.*

$$\widehat{X}_p := \omega_p^{-1}(\mathsf{x}), \quad \mathsf{p}\in\mathcal{G}$$

کارتان ثابت کرده است که برای دو میدان برداری X, Y و یک ۱−فرمی مانند ω روی یک خمینه هموار مانند M رابطه زیر همواره برقرار است:

$$d\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y]).$$

بر این اساس می‌توان گزاره زیر را بیان کرد.

گزاره ۲−۱۲ برای هر دو نمایش $\mathsf{x},\mathsf{y}\in\mathfrak{g}$ در $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ رابطه زیر برقرار است:

$$\kappa_p(\mathsf{x},\mathsf{y}) = [\mathsf{x},\mathsf{y}] - \omega_p(\widehat{X},\widehat{Y}). \tag{۲}$$

اثبات. *با شروع از تعریف تابع انحنا و به‌کارگیری فرمول کارتان می‌توان نوشت،*

$$\begin{aligned}
\kappa(p)(\mathsf{x},\mathsf{y}) &= \Omega_p(\widehat{X},\widehat{Y})\\
&= d\omega_p(\widehat{X},\widehat{Y}) + \left[\omega_p(\widehat{X}),\,\omega_p(\widehat{Y})\right]_{\mathfrak{g}}\\
&= \widehat{X}\big(\omega_p(\widehat{Y})\big) - \widehat{Y}\big(\omega_p(\widehat{X})\big) - \omega_p\big([\widehat{X},\widehat{Y}]\big) + [\mathsf{x},\mathsf{y}]_{\mathfrak{g}}\\
&= \underbrace{\widehat{X}(\mathsf{y})}_{\circ} - \underbrace{\widehat{Y}(\mathsf{x})}_{\circ} - \omega_p\big([\omega^{-1}(\mathsf{x}),\,\omega^{-1}(\mathsf{y})]\big) + [\mathsf{x},\mathsf{y}]_{\mathfrak{g}},
\end{aligned}$$

در تساوی آخر عبارات مشخص شده به این دلیل صفر می‌شوند که اثر میدان‌های برداری روی توابع ثابت هستند.
□

تعریف ۲−۱۳ یک هندسه کارتان دلخواه مدل شده بر روی زوج $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ را تخت می‌نامیم هرگاه انحنای آن صفر باشد. به‌علاوه این هندسه را موثر می‌نامیم هرگاه $\mathfrak{g}$ هیچ ایده‌آل غیربدیهی سره $\mathfrak{h}$ نداشته باشد.

تعریف ۲−۱۴ فرض کنیم $\pi_1:\mathcal{G}_1\longrightarrow M_1$ و $\pi_2:\mathcal{G}_2\longrightarrow M_2$ دو هندسه کارتان مدل شده روی $(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$ باشند. در صورتی که وابرسانی $\Phi:M_1\longrightarrow M_2$ همراه با یک نگاشت H−کلافی مانند $\widetilde{\Phi}:\mathcal{G}_1\longrightarrow\mathcal{G}_2$ با خاصیت $\pi_2\circ\widetilde{\Phi}=\Phi\circ\pi_1$ موجود باشد به‌طوری‌که التصاق‌های کارتان را منتقل کند (یعنی $\widetilde{\Phi}^*\omega_2=\omega_1$) آن‌گاه این دو هندسه کارتان را یکریخت هندسی می‌نامیم.

با توجه به این‌که فرم ماروئر—کارتان در تساوی ساختاری (۱) صدق می‌کند، بنا بر (۲) مشخص می شود که انحنای هر هندسه کلاین برابر صفر است. تابع انحنای κ معیار خوبی برای سنجش میزان انحراف یک هندسه کارتان دلخواه از فضای همگن (کلاین) متناظر با آن است.

قضیه ۲—۱۵ فرض کنیم $\pi : \mathcal{G} \longrightarrow M$ یک هندسه کارتان تخت و موثر مدل شده بر روی $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ باشد. برای هر نقطه دلخواه از M یک همسایگی وجود دارد به‌طوری‌که با زیرمجموعه بازی از هندسه کلاین متناظر $G \longrightarrow G/H$ یکریخت هندسی است.

اثبات . *قضیه ۵.۱ صفحه ۲۱۲ از* [۵۵] *را ببینید.* □

در انتهای این بخش چند تعریف دیگر ارائه می‌دهیم که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.

تعریف ۲—۱۶ یک جبر لی متناهی بعد مانند $\mathfrak{g}$ را ساده می‌نامیم هرگاه دارای هیچ ایده‌آل غیربدیهی حل‌پذیر نباشد.

تعریف ۲—۱۷ برای جبر لی n—بعدی $\mathfrak{g}$ نگاشت $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$ad(\mathsf{x})(\mathsf{y}) = [\mathsf{x}, \mathsf{y}], \qquad \mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$$

برای هر $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$ نگاشت $ad(\mathsf{x})$ یک ماتریس $n \times n$ خواهد بود. بنابراین می‌توان نگاشت دو خطی $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ را که فرم کیلینگ نام دارد به‌صورت زیر تعریف کرد

$$B(\mathsf{x}, \mathsf{y}) = Tr(ad(\mathsf{x}) \circ ad(\mathsf{y})).$$

تعریف ۲—۱۸ برای یک فضای برداری متناهی بعد مانند V و برای یک نگاشت دو خطی $C : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$، رادیکال نگاشت C به‌صورت زیر تعریف می‌شود

$$rad\,(C) := \{v \in V \mid C(v, u) = \circ, \quad \forall u \in V\}.$$

نگاشت C را ناتباهیده می‌نامیم هرگاه $rad\,(C) \equiv \circ$.

تعریف ۲—۱۹ جبر لی $\mathfrak{g}$ با بعد بزرگ‌تر از یک را ساده می‌نامیم هرگاه دارای هیچ ایده‌آل غیر بدیهی نباشد. به علاوه یک جبر لی را شبه—ساده می‌نامیم هر گاه به‌صورت حاصل جمع مستقیمی از جبرهای لی ساده قابل نمایش باشد.

قضیه ۲—۲۰ (محک کارتان برای شبه—سادگی). جبر لی متناهی بعد $\mathfrak{g}$ شبه—ساده است اگر و تنها اگر فرم کیلینگ آن ناتباهیده باشد.

۲—۲ خمینه‌های کشی—ریمان

هر چند که مفهوم خمینه‌های مختلط یک مفهوم بسیار قدیمی است که سالها مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته است، موضوع خمینه‌های کشی—ریمان یک موضوع جدید است که اخیرا مورد توجه بسیاری از ریاضی‌دانان قرار گرفته است [۵۴، ۹، ٦، ۴، ۱۰، ۱۱] . در واقع اولین تعریف از موضوع خمینه‌های مماس کشی—ریمان اولین بار توسط کوهن و روسی [۳۱] در سال ۱۹٦۰ ارائه شد و از آن به بعد این مفهوم طبیعی (که به عنوان مثال شامل مفاهیمی مثل ابررویه‌های مختلط می‌شود) مورد توجه قرار گرفت و کاربردهایی در سایر علوم مانند فیزیک، معادلات دیفرانسیل، هندسه کارتان و غیره پیدا کرد .

در این‌جا قصد داریم که خلاصه‌ای از مفاهیم و تعاریف مورد نیاز در این رساله، مرتبط با مباحث خمینه‌های کشی—ریمان را ارائه دهیم. مرجع اصلی ما در این قسمت [۱۱] است.

تعریف ۲—۲۱ فرض کنیم V یک فضای برداری حقیقی باشد. تبدیل خطی $J : V \longrightarrow V$ را یک نگاشت ساختار مختلط می‌نامیم هرگاه:

$$J \circ J = -id.$$

مثال ۲—۲۲ فرض کنیم $V = T_p(\mathbb{R}^{2n}) = T_p(\mathbb{C}^n)$ و $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ مختصات ساختاری متناظر $\mathbb{R}^{2n}$ باشد. نگاشت ساختار مختلط J را می‌توان به‌صورت طبیعی زیر تعریف کرد:

$$J(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad J(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

با توجه به خواص نگاشت ساختار مختلط، می‌توان گفت که در صورت وجود آن برای یک فضای برداری حقیقی مانند V، یک نگاشت ساختار مختلط القایی نیز برای مختلط سازی شده

$$V^{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

از V وجود دارد. در واقع درصورتی‌که $v_1, \ldots, v_n$ پایه‌های فضای برداری V باشند، نگاشت ساختار مختلط القایی باعث به‌وجود آمدن دو زیرفضای جدید از $V^{\mathbb{C}}$ می‌شوند

$$\begin{aligned} V^{1,0} &= \langle v_1 - iJ(v_1), \ldots, v_n - iJ(v_n) \rangle, \\ V^{0,1} &= \langle v_1 + iJ(v_1), \ldots, v_n + iJ(v_n) \rangle \end{aligned}$$

به‌طوری‌که

$$V^{\mathbb{C}} = V^{1,0} \oplus V^{0,1}, \qquad \overline{V^{1,0}} = V^{0,1}.$$

همچنین اگر M یک زیرخمینه n–بعدی $\mathbb{C}^n$ با مختصات $(z_1, \ldots, z_n)$ و همراه با $z_k = x_k + iy_k$، $k = 1, \ldots, n$ باشد، با توجه به مثال قبل و همچنین با توجه به دو تساوی:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_j} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} &= \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\Big), \end{aligned}$$

برای هر نقطه دلخواه $p \in M$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} T_p^{1,0}M &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial z_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial z_n} \Big\rangle, \\ T_p^{0,1}M &= \Big\langle \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_n} \Big\rangle. \end{aligned}$$

تعریف ۲–۲۳ فرض کنیم M یک خمینه هموار و $\mathbb{L}$ یک زیر کلاف $T^{\mathbb{C}}M = TM \otimes \mathbb{C}$ باشد. زوج مرتب $(M, \mathbb{L})$ را یک ساختار تقریبا مختلط M می‌نامیم هرگاه

(i) $\mathbb{L} \cap \overline{\mathbb{L}} = 0$.

(ii) $\mathbb{L} \oplus \overline{\mathbb{L}} = T^{\mathbb{C}}M$.

یک ساختار تقریبا مختلط از M تنها زمانی می‌تواند وجود داشته باشد که بعد خمینه M عددی زوج باشد. دقت داشته باشیم که یک خمینه مختلط مانند M همراه با $\mathbb{L} = T^{1,0}M$ مثالی از یک ساختار تقریبا مختلط است. به‌علاوه، برای چنین خمینه‌ای دو زیر کلاف $\mathbb{L} = T^{1,0}M$ و $\overline{\mathbb{L}} = T^{0,1}M$ تو در تو هستند (به این معنا که براکت لی بین دو میدان برداری دلخواه از این دو زیرکلاف مجددا یک میدان برداری از آن است).

قضیه ۲–۲۴ (نیولندر–نیرنبرگ) فرض کنیم $(M, \mathbb{L})$ یک نگاشت ساختار مختلط و $\mathbb{L}$ یک زیر کلاف تو در تو از $T^{\mathbb{C}}M$ باشد. برای هر عضو $p \in M$ یک نگاشت ساختار مختلط مانند J روی M وجود دارد به‌طوری‌که

$$\mathbb{L} = T_p^{0,1}M.$$