دانشگاه مازندران

دانشكده علوم رياضي

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته ریاضی

(گرایش جبر)

عنوان:

گراف های کیلی s– کمان منظم

استاد راهنما:

دکتر علی اصغر طالبی

استاد مشاور:

دکتر یحیی طالبی

نگارش:

مرضیه خوش تراش

شهریور ۹۰

تقدیم به

پدر و مادر عزیزم

و همه ي آنهایی که دوستشان دارم

سپاس خدايي را كه يادش، هميشه باعث آرامشم است،

سپاس خدايي را كه در همه ي مراحل زندگي پشتيبانم بوده وهست،

سپاس خدايي را كه داده هايش از روي رحمت است و نداده هايش از روي حكمت.

از استاد گرانقدر و فرهیخته ام آقای دکتر علی اصغر طالبی ،نهایت تشکر و قدردانی را دارم که در نهایت صبر و شکیبایی ،مرا تشویق و راهنمایی نموده و بیش از آنچه که می باید به بنده لطف داشته اند برای ایشان و خانواده محترمشان آرزوی سلامتی، سعادت وموفقیت دارم

وظیفه خود می دانم از خانواده ام صمیمانه تشکر کنم که وجودشان برایم نعمتی بس بزرگ است.از همه معلمان و استادانم در همه مقاطع تحصیلی از ابتدا تا کنون، بینهایت سپاسگزارم؛ همچنین از تمامی دوستانم که در طی این سالها با من بوده اند تشکر می کنم.

خوش تراش

شهریور ۹۰

چکیده :

فرض کنید G یک گروه متناهی و S زیر مجموعه ای از G باشد به طوری که $S=S^{-1}$ و $1\notin S$، در این صورت گراف کیلی $\Gamma:=\mathrm{Cay}(G,S)$ یک گراف با مجموعه راس G و مجموعه یال $\{\{g,sg\}|g\in G,s\in S\}$ است. یک گراف s- کمان منظم نامیده می شود اگر گروه خود ریختی هایش به طور منظم بر مجموعه s- کمان ها عمل کند.

دراین پایان نامه گراف های کیلی s- کمان انتقالی و s- کمان منظم بر روی گروه های ساده را به دست می آوریم و در پایان گراف های کیلی کمان انتقالی وs- منظم از ظرفیت ۵ را دسته بندی می کنیم.

کلمات کلیدی: گراف کیلی، گراف کیلی نرمال، گراف کیلی کمان انتقالی، گراف کیلی کمان منظم، گروه ساده غیر آبلی، گروه متناوب.

فهرست مندرجات

مقدمه :

بررسی و مطالعه ی گراف های کیلی s- کمان منظم از جمله موضوعاتی است که در چند دهه اخیر مورد توجه بسیاری از ریاضی دانان قرار گرفته است.

دسته بندی گراف های ۱- کمان منظم مکعبی ابتدا توسط فروچت[۱]در [۱۰] در سال ۱۹۵۲ ارائه گردید و سپس وای. کیو.فنگ[۲] و جی. اچ. کواک[۳] در [۸] در سال ۲۰۰۳ به بررسی خواص گراف های کیلی ۱ – کمان منظم مکعبی از گروه های متناوب پرداختند و خواصی از گروه تصویری (p و۲)PSL، توسط وانگ اف آر[٤] و دی.یو.اس.اف[٥] در [٤] در سال ۲۰۰۵ ارائه شده است. مینگ[٦] و جینگ[۷] در [١٦] همه ی گراف های کیلی کمان انتقالی با ظرفیت بیشتر از ٤ را بر روی گروه های آبلی دسته بندی کردند و در [١٤] ام وای ایکس یو[۸] همه ی گراف های دوری ۱- منظم با ظرفیت ٤ را دسته بندی کرد. توت[۹] در [۲۰] ثابت کرد که هیچ گراف s- کمان انتقالی مکعبی برای ٦ ≤ s وجود ندارد.

---

۱)Frucht

۲)Y.Q.Feng

۳)J.H.Kwak

٤)Wang.F.R

٥)D u s f

٦)Ming-Yao Xu

۷) Jing Xu

۸)M.Y.Xu

۹)Tutte

این پایان نامه در چهار فصل تدوین شده است که درفصل اول، مقدماتی از نظریه گروه ها و نظریه گراف را که در فصل بعدی مورد نیاز است به طور خلاصه بیان شده است.

در فصل دوم به بررسی خواص گراف های کیلی s- کمان انتقالی مکعبی از گروه های ساده متناهی پرداخته ایم.

در فصل سوم قضایایی در ارتباط با گراف های کیلی s- کمان منظم مکعبی از گروه های ساده غیر آبلی بیان شده است و

درفصل چهارم به بررسی خواص گراف های کیلی s- منظم و کمان انتقالی با ظرفیت پنج پرداخته ایم.

مفاهیم این پایان نامه برگرفته از منابع [۱] و [۲۰] و [۲۱] می باشد.

فصل ۱

تعاریف و قضایای مقدماتی

۱٫۱ گروه ها

دراین بخش، تعاریف و قضایایی ازنظریه گروه ها را که در فصل های آتی مورد نیاز خواهند بود بیان می کنیم .

تعریف ۱٫۱٫۱: فرض کنید H زیر گروهی از یک گروه G باشد و $x , y \in G$. رابطـه $\sim$ را در G بـه صـورت زیـر تعریف می کنیم:

$x \sim y$ اگر و تنها اگر $xy^{-1} \in H$. به آسانی دیده می شود که رابطه $\sim$ در G یک رابطه هم ارزی است.

کلاس هم ارزی شامل عضو x عبارت است از $\{hx | h \in H\}$ ، این مجموعه را باعلامت Hx نشان می دهـیم و آن را همرده راست H در G شامل x می نامیم و مجموعه ی $\{xh | h \in H\}$ را باعلامت xH نشان می دهـیم و آن را همرده چپ H در G شامل x می نامیم.

تعریف ۲٫۱٫۱: فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. هر تناظر ۱–۱ مانند $f : X \to X$ را یک جایگشت X می گوییم.

مجموعه ی همه جایگشت های X با عمل ترکیب توابع تشکیل یک گروه می دهدکه به آن گروه متقارن بر X می گوییم و آن را با نماد S_x نشان می دهیم. هر زیر گروه S_x را یک گروه جایگشتی X می نامیم.

هرگاه X یک مجموعه متناهی n عضوی باشد، آنگاه S_xرا با نماد S_nنشان می دهیم و آن را گروه متقارن از درجه n می نامیم. واضح است که مرتبه S_n برابر $n!$ است. همچنین هر جایگشت α در S_nیک دور یا حاصل ضربی (متناهی) از دورهای از هم جداست. هردور به طول ۲ را یک ترانهش می گوییم جایگشت π از S_n را زوج می نامیم هرگاه عده ی ترانهش هایی که در هر تجزیه ی π به ترانهش ها ظاهر می شود زوج باشد. در غیر اینصورت آن را فرد می نامیم.

مجموعه ی همه ی جایگشت های زوج S_n یک زیر گروه S_n است. این زیر گروه را با A_n نشان می دهیم و آن را گروه متناوب از درجه n می نامیم و مرتبه ی آن برابر $\frac{n!}{۲}$است.

تعریف ۳,۱,۱: حلقه ی اعداد صحیح به پیمانه ی m را با Z_m نشان می دهیم. برای اختصار، اعضای این حلقه را با ۰، ۱،...، $m-۱$ نمایش می دهیم.

تعریف ٤,۱,۱: یک گروه دو وجهی $D_{۲n}$ ، $n\geq ۳$ یک گروه از مرتبه ۲n است که به صورت مجموعه ی زیر نمایش داده می شود.

$$D_n =< a,b | a^n = b^۲ = (ab)^۲ = ۱ >$$

تعریف ۵,۱,۱: فرض کنید G یک گروه باشد. هر همریختی مانند $f : G \to G$ را یک درونریختی G می نامند. مجموعه ی همه ی درونریخت های G را با End(G) نشان می دهیم و در صورتی کهf یک ریختی باشد آن را یک خود ریختی G می نامند.

مجموعه ی همه ی خودریختی های G با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می دهد. این گروه را گروه خودریختی های G می نامند و آن را با Aut(G) نشان می دهند.

تعریف ۶،۱،۱: فرض کنید X زیر مجموعه ای از گروه مفروض G باشد. زیر گروه تولید شده با X را که با $<X>$ نشان می دهیم مقطع همه ی زیر گروه هایی از G می گیریم که حاوی X اند. به بیان دیگر $<X>$ کوچک ترین زیر گروه G است که حاوی X است.

تعریف ۷،۱،۱: گروه G را متناهی مولد گویند در صورتی که زیر مجموعه ی متناهی X وجود داشته باشد به طوری که $G = <X>$. دراینصورت هر یک از اعضای X رایک مولد G می نامیم. گروه G را دوری می خوانیم هرگاه G با یک عضو تولید شود.

تعریف ۸،۱،۱: یک p– زیر گروه سیلوی G عبارت است از یک p – زیر گروه ماکسیمال از G.

(p- زیر گروه سیلو، زیر گروهی است که p گروه و ماکسیمال باشد) مجموعه ی همه ی p- زیرگروه های سیلوی G را$Syl_p(G)$ می نامند، و عده ی اعضای مجموعه اخیر را با$n_p(G)$ (یا مختصراً باn_p) نمایش می دهند.

تعریف ۹،۱،۱: فرض کنید H زیر گروهی از گروه G باشد. در اینصورت نرمال ساز H در G را با$N_G(H)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$N_G(H) = \{g \in G \mid H^g = H\}$$

تعریف ۱۰،۱،۱: فرض کنید H زیر گروهی از گروه G باشد. H را یک زیر گروه نرمال G می نامیم هرگاه $N_G(H) = G$ و آن را با $H \trianglelefteq G$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۱،۱،۱: فرض کنید G یک گروه باشد. زیر گروه نرمال غیر بدیهی H را یک زیر گروه نرمال مینیمال G می نامیم هرگاه H حاوی هیچ زیر گروه نرمال G به جزء خود و ۱ نباشد.

تعریف ۱۲,۱,۱: به ازای هر g از G تابع $\tau_g : G \to G$ با ضابطه ی $x\tau_g = x^g$ یک خود ریختی G است. این خود ریختی را خودریختی داخلی G القا شده با g می نامند. مجموعه ی همه ی خود ریختی های داخلی G، که آن را با Inn(G) نشان می دهیم، یک زیر گروه نرمال Aut(G) است.

تعریف ۱۳,۱,۱: فرض کنید G یک گروه باشد، $X \subseteq G$. مرکز ساز X در G یعنی مجموعه ی

$$\{ g \in G \mid xg = gx \text{ ، } X \text{ از } x \text{ به ازای هر} \}$$

را باعلامت $C_G(X)$ نشان خواهیم داد.

تعریف ۱٤,۱,۱: فرض کنید G یک گروه و X یک مجموعه ناتهی باشد، فرض کنید تابعی مانند

$$\bullet : X \times G \to X$$

$$(x \in X \, , g \in G)$$

$$(x \, , g) \to x \bullet g$$

وجود داشته باشد بطوری که:

(۱) به ازای هر x از X، $x \bullet 1 = x$

(۲) به ازای هر g_1 و g_2 از G وهر x از X، $x \bullet (g_1 g_2) = (x \bullet g_1) \bullet g_2$

در این صورت می گوییم گروه G روی مجموعه X عمل می کند و $\bullet$ راعمل G بر X گوییم. برای سهولت در نوشتن به جای $x \bullet g$ معمولاً از x^g استفاده می کنیم.

تعریف ۱,۱,۱۵: فرض کنید گروه G روی مجموعه دلخواه X عمل کند و $g \in G$ و $x \in X$. د رایـن صـورت می گوییم g عضو x را ثابت نگه می دارد هرگاه $x^g = x$. مجموعه اعضایی از G که هر عضـو x را ثابـت نگـه می دارند هسته ی عمل نامیده می شود.

قضیه ۱,۱,۱: فرض کنید گروه G روی مجموعه X عمل کند. به ازای هر g از G ، تابع $\varphi_g: X \to X$ را با ضابطه $\varphi_g(x) = x^g$ تعریـف مـی کنـیم. درایـن صـورت $\varphi_g \in S_X$ و نگاشـت $\varphi: G \to S_X$ بـا ضـابطه $g \to \varphi_g$ یـک همریختی است که هسته آن باهسته عمل برابر است.

اثبات: به [۲۵] مراجعه شود.

همریختی مذکور در قضیه فوق رانمایش جایگشتی G متناظر باعمل گروه (بر X) مـی نامنـد. ایـن نمـایش را صادق (باوفا) می گویند در صورتی که φ یک به یک باشد. به عبارت دیگر، عضو همانی G تنهـا عضـوی از گروه G باشد که همه اعضای X را ثابت نگه می دارد. به عنوان مثال، نمایش گروهG متنـاظر باعمـل ضـرب از راست صادق است در حالی که نمایش گروه G متناظر با عمل تزویج صادق نیست.

تعریف ۱,۱,۱۶: فرض کنید گروه G بر مجموعه X عمل کند. رابطه ~ رادر X به صورت زیر تعریف می کنیم:

گوییم $X_1 \sim X_2$ در صورتی که به ازای عضوی از G مانند g، $X_1 g = X_2$. رابطه ی ~ یک رابطه ی هم ارزی در X است. هر رده هم ارزی رایک مدار عمل، یا گاهی اوقات یک G – مدار می نامیم. اگر $x \in X$ آنگـاه رده هـم ارزی شامل x را مدار x در G می نامیم و آن را با علامـت $orb_G(x)$ (مختصـراً بـا $orb(x)$) نشـان مـی دهـیم. درصورتی که $orb_G(x)$ مجموعه ای متناهی باشد عده ی اعضای آن را طول مدار x در G می نامیم.

تعریف ۱,۱,۱۷: فرض کنید گروه G برمجموعه X عمل کند. عمل را متعدی (انتقـالی) گـوئیم هرگـاه X تنهـا مدار عمل باشد. به عبارت دیگر:

$$\forall x_1, x_2 \in X \ , \ \exists g \in G \quad s.t \quad x_1^g = x_2$$

گاهی به جای اینکه بگوییم عمل متعدی (انتقالی) است می گوییم G برمجموعه ی X به طور انتقالی عمل می کند به عنوان مثال، G روی G با عمل ضرب از راست انتقالی است در صورتی که عمل تزویج یک گروه نابدیهی G روی خودش انتقالی نیست.

تعریف ۱٫۱٫۱۸: فرض کنید گروه مفروض G روی مجموعه ناتهی X عمل کند و $x \in X$. در این صورت مجموعه ی $\{g \in G | x^g = x\}$ را پایدار ساز x در G می نامیم و آن را با علامت $St_G(x)$ نشان می دهیم.

مثال ۱٫۱٫۱: فرض کنید $\sigma = (۱۲۳)(٤٥)$ و $G =< \sigma >$. واضح است که گروه G بر مجموعه $X = \{۱،...،٥\}$ عمل می کند. پایدار سازهای اعضای X عبارت است از:

$$G = \{\sigma, \sigma^۲, \sigma^۳, \sigma^٤, \sigma^٥, \sigma^٦ = ۱\}$$

$$\sigma = (۱۲۳)(٤٥)$$

$$\sigma^۲ = (۱۲۳)(٤٥)(۱۲۳)(٤٥) = (۱۳۲)$$

$$\sigma^۳ = \sigma\sigma^۲ = (۱۲۳)(٤٥)(۱۳۲) = (٤٥)$$

$$\sigma^٤ = \sigma\sigma^۳ = (۱۲۳)(٤٥)(٤٥) = (۱۲۳)$$

$$\sigma^٥ = \sigma\sigma^٤ = (۱۲۳)(٤٥)(۱۲۳) = (۱۳۲)(٤٥)$$

$$\sigma^٦ = \sigma.\sigma^٥ = (۱۲۳)(٤٥)(۱۳۲)(٤٥) = ۱$$

$$St_G(۱) = \{\sigma^۳, \sigma^٦\}$$

$St_G(۲)=\{\sigma^۳,\sigma^۶\}$

$St_G(۳)=\{\sigma^۳,\sigma^۶\}$

$St_G(٤)=\{\sigma^۲,\sigma^٤,\sigma^۶\}$

$St_G(٥)=\{\sigma^۲,\sigma^٤,\sigma^۶\}$

قضیه ۲,۱,۱: (مدار – پایدار ساز) فرض کنید گروه G روی مجموعه دلخواه X عمل کند و $x \in X$.

در این صورت $|G|=|G_x|.|X^G|$

اثبات: به [۲۵] مراجعه شود.

قضیه ۳,۱,۱: فرض کنید گروه G روی مجموعه دلخواه X عمل کند. دراین صورت عمل G روی X را نیم منظم می گوییم هرگاه برای هر $G_x = 1, x\in X$. همچنین عمل G روی X را منظم گوییم هرگاه G روی X انتقالی و نیم منظم باشد.

تعریف ۱۹,۱,۱: فرض کنید گروه G برمجموعه X عمل کند و$g \in G$. مجموعه ی $\{x\in X| xg =x\}$ را مجموعه نقاط ثابت g در G می گویند و آن را با علامت $Fix_G(g)$ نشان می دهند.

مثال ۲,۱,۱: فرض کنید $\alpha = (۱۲۳)(٤٥)$ و $G = <\alpha>$، واضح است که گروه G بر مجموعه ی $x=\{۱,...,٥\}$ عمل کند. به ازای $g \in G$ ، $Fix_G(g)$ عبارت است از:

$Fix(\sigma^۲)=\{٤,٥\}$

$\mathrm{Fix}(\sigma^{۳}) = \{۱,۲,۳\}$

$\mathrm{Fix}(\sigma^{٤}) = \{٤,٥\}$

$\mathrm{Fix}(\sigma^{٦}) = \{۱,۲,۳,٤,٥\}$

تعریف ۲۰,۱,۱: فرض کنید گروه G به طور متعددی (انتقالی) بر مجموعه X عمل کند. زیر مجموعـه B از X را یک بلوک عمل گوییم در صورتی که به ازای هر g از $B.G$، $Bg = B$ یا $Bg \cap B = \phi$. بالاخص اگر B برابر X یا زیر مجموعه های یکانی X باشند این بلوک ها را بلوک هـای بـدیهی مـی نـامیم. عمـل را اولیـه گـوییم در صورتی که تنها بلوک های عمل، بلوک های بدیهی باشند.

در غیر اینصورت آن را غیر اولیه می نامیم. اگر عمل G بر X اولیه باشد گاهی ازاوقات، اصطلاحاً می گـوییم G به طور اولیه بر X عمل می کند.

تعریف ۲۱,۱,۱: فرض کنید گروه G به طور متعدی بر مجموعه X عمـل کنـد و $|X| \geq ۲$.

عمل را ۲– متعدی (متعدی دو گانه) گوییم در صورتی که به ازای هر دو زوج مرتب از اعضـای متمـایز X مانند(x, x') و (y, y') عضوی از G مانند g باشد به طوری که $xg = y$ و $x'g = y'$. گاهی اوقات، از اصطلاح ((G به طور ۲– متعدی بر X عمل می کند)) نیز استفاده می شود.

لم ۱,۱,۱: همه ی گروههای ۲– متعدی، اولیه هستند.

اثبات: به [۲٥] مراجعه شود.

لم ۲,۱,۱: به ازای هر n طبیعی که$n \geq ۳$ ، گروه A_n با دورهایی به طول ۳ تولید می شود.

اثبات: به [۲٥] مراجعه شود.

لم ۳,۱,۱: فرض کنید H زیر گروهی نرمال از A_n باشد و $n \geq ۵$. اگر H شامل یک ۳- دور باشد. آنگاه

$H=A_n$

اثبات: به [۲۵] مراجعه شود.

تعریف ۲۲,۱,۱: فرض کنید F یک میدان و n عدد طبیعی باشد. مجموعه همه ی ماتریس های معکوس پذیر n ×n را که درایه های هر یک در F اند، با GL(n,F) نمایش می دهیم. مجموعه GL(n,F) با عمل ضرب ماتریس ها تشکیل یک گروه می دهد. گروه GL(n,F) را گروه خطی عام می گوییم.

مجموعه همه اعضایی از GL(n,F) که دترمینان هر یک از آنها برابر ۱ (عضو واحد میدان F) است زیر گروهی از GL(n,F) است. این زیر گروه را با SL(n,F) نشان می دهیم و آن را گروه خطی خاص می نامیم.

اکنون فرض کنید $Z = Z(GL(n,F))$. در این صورت گروه های $\frac{GL(n,F)}{Z}$ و $\frac{SL(n,F)}{Z \cap SL(n,F)}$ را با نماد های $PGL(n,F)$ و $PSL(n,F)$ نشان می دهیم و آنها را به ترتیب گروه خطی عام تصویری و گروه خطی خاص تصویری می نامیم.

قضیه ٤,۱,۱: فرض کنید n یک عدد طبیعی مفروض و q توان مثبتی از یک عدد اول باشد. در این صورت:

$$|GL(n,q)| = (q^n - ۱)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-۱})$$

$$|SL(n,q)| = \frac{(q^n - ۱)(q^n - q)\ldots(q^n - q^{n-۱})}{q - ۱}$$

$$|PSL(n,q)| = \frac{۱}{(q-۱,n)}|SL(n,q)|$$

اثبات: به[۲۵] مراجعه شود.

تعریف ۲۳,۱,۱: فرض کنید H , K دو گروه دلخواه و $\varphi : H \to K$ یک همریختی باشد.

(به ازای هر h از H، تصویر h با φ را با φ_h نشان می دهیم.) در حاصلضرب دکارتی $H \times K$ عمل دوتایی زیر را تعریف می کنیم:

$$(h_1, k_1)(h_2, k_2) = (h_1 h_2, (k_1 \varphi_{h_2}) k_2)$$

مجموعه $H \times K$ با عمل فوق تشکیل یک گروه می دهد. این گروه را حاصلضرب نیم مستقیم H , K با عمل φ می نامند و آن را با علامت $H \times_\varphi K$ نمایش می دهند و اصطلاحا می گویند گروه H بر گروه K با φ عمل می کند و گاهی اوقات با علامت $H . K$ نمایش می دهند.

۲,۱ گراف ها :

دراین بخش ابتدا مفاهیم اولیه نظریه گراف رابه طور خلاصه بیان می کنیم و سپس از دیدگاه جبری برخی مفاهیم مورد نیاز را مورد بازبینی قرار می دهیم.

تعریف ۱,۲,۱: گراف X عبارت است از زوجی مانند (V , E) که در آن V مجموعه ای ناتهی و E مجموعه ای از زوج های نامرتب (نه لزوماً متمایز) از V است. مجموعه های VوE را به ترتیب مجموعه رئوس و مجموعه یال های گراف X می نامیم.

فرض کنید $e = \{u ,v\}$ یالی از X باشد. دراین صورت می گوییم یال e، راس u را به راس v وصل می کند.

راس u (و همچنین راس v) بر یال e واقع است یا اینکه دو راس u وv با هم مجاورند، در این حالت u وv را رئوس انتهایی یال e می نامیم. یالی که درآن دو راس انتهایی با هم یکسان هستند طوقه نام دارد.

گراف X متناهی است اگر مجموعه رئوس آن متناهی باشد. گراف X را ساده می نامیم هرگاه دارای هیچ طوقه ای نباشد و نیز بین هر دو راس آن بیش از یک یال وجود نداشته باشد. گراف ساده ای راکه در آن بین هردو

راس، یک یال وجود داشته باشد گراف کامل می نامیم. اگر گراف کامل X دارای n راس باشد آن را با K_n نشان می دهیم.

گراف دو بخشی X، گرافی است که درآن مجموعه رئوس به دو زیر مجموعه V_1 و V_2 افراز می شود بطوریکه هر یال از X دارای یک راس در V_1 و راس دیگر در V_2 است. زیر مجموعه های V_1 و V_2 مجموعه های دوبخشی گراف X نامیده می شوند.

همچنین اگر X گراف ساده ای باشد که در آن بین هر راس از V_1 و هر راس از V_2 یک یال وجود داشته باشد، آنگاه X یک گراف دو بخشی کامل نام دارد. اگر $|V_1| = n$ و $|V_2| = m$ آنگاه چنین گرافی را با $K_{n,m}$ نشان می دهد.

گراف $Y = (V_2, E_2)$ زیر گرافی از X نام دارد اگر $V_Y \subseteq V_X$ و $E_Y \subseteq E_X$. اگر $V_Y = V_x$، آنگاه Y یک زیر گراف فراگیر از X نام دارد.

زیر مجموعه ناتهی V از V_X رادر نظر بگیرید. زیر گرافی از X را که مجموعه رئوسش V و مجموعه یال هایش، مجموعه همه یال هایی در X است که هر دو راس آنها در V قرار دارد زیرگراف القا شده توسط V یا به طور ساده تر زیر گراف القایی نام دارد.

فرض کنید u راسی در گراف X باشد. تعداد یال هایی از X راکه u یک انتهای آنها است درجه u نامیده می شود و آن را با $deg_X(u)$ نشان می دهیم. گرافی راکه در آن درجه همه ی رئوس برابر عددی مانند K است یک گراف K – منتظم می نامیم. گراف های ۳- منتظم معمولاً گراف های مکعبی نامیده می شوند. همچنین مجموعه همه رئوسی از X را که با u مجاور هستند، همسایگی راس u در گراف X نامیده می شود و آن را با $N_X(u)$ نشان می دهیم.

گراف های $X=(V_x,E_x)$ و $Y=(V_Y,E_Y)$ را درنظر بگیرید. همریختی گراف $\varphi : X \to Y$ ، نگاشتی از V_X به V_Y است به طوری که اگر $\{u,v\}\in E_x$، آنگاه $\{\varphi(u),\varphi(v)\}\in E_Y$. ضرب دو همریختی گرافی به صورت ترکیب دو تابع تعریف می شود . اگر همریختی گرافی $\varphi : X \to Y$ یک دوسویی باشد و وارون آن نیز خودیک همریختی گرافی باشد آنگاه φ یک یکریختی نام دارد. دراین حالت، دو گراف X و Y را با هم یکریخت می نامند و می نویسند $X\cong Y$ اگر $X=Y$، آنگاه یکریختی φ یک خودریختی نام دارد. مجموعه همه خود ریختی های گراف X با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می دهد که به آن، گروه خودریختی های گراف X می گویند و آن را با $Aut(X)$ نشان می دهند.

فرض کنید $\{u,v\}$ یالی در گراف X باشد. در این صورت زوج مرتب (u,v) را یک کمان می نامیم.

مجموعه کمان های گراف X را با $A(X)$ نشان می دهیم.

تعریف ۲,۲,۱: فرض کنید $X=(V_x,E_x)$ یک گراف باشد و $G \le Aut\ (X)$. اگر G روی مجموعه های V_X،E_X و $A(X)$ به طور انتقالی عمل کند. آنگاه گراف X را به ترتیب یک گراف G – راس انتقالی، G- یال انتقالی و G – کمان انتقالی می نامیم. همچنین، زیر گروه G را به ترتیب یک زیر گروه راس انتقالی، یال انتقالی و کمان انتقالی می نامیم.

در حالت خاصی که $G = Aut\ (X)$، گراف X را به ترتیب راس – انتقالی، یال – انتقالی و کمان – انتقالی (متقارن) می نامیم.

مثال ۱,۲,۱: گراف کامل K_n، راس انتقالی است.

می دانیم که $Aut\ (K_n) = S_n$ ،حال اگر x و y دو راس دلخواه باشند، آنگاه جایگشت $\sigma=(x,y)$ از $Aut\ (K_n)$ وجود دارد که $x^\sigma = y$

مثال ۲,۲,۱: گراف کامل K_n، یال انتقالی است.

فرض کنید $e_1 = \{x_1, y_1\}$ و $e_2 = \{x_2, y_2\}$ دو یال باشند. تابع دو سویی f را روی مجموعه رئوس K_n طوری در نظر می گیریم که $x_1^f = x_2$ و $y_1^f = y_2$ باشند در این صورت $e_1^f = e_2$ است.

نکته ۱,۲,۱: ممکن است گرافی یال انتقالی باشد ولی راس انتقالی نباشد.

مثال ۲,۲,۱: گراف دو بخشی کامل $K_{n,m}$ که $n \neq m$ است راس انتقالی نیست اما یال انتقالی است.

گزاره ۱,۲,۱: فرض کنید X یک گراف راس انتقالی باشد، دراین صورت X، K– منتظم است. علاوه بر آن اگر X یال انتقالی و K عددی فرد باشد، آنگاه X متقارن است.

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود.

لم ۱,۲,۱: فرض کنید X یک گراف یال انتقالی باشد به طوری که دارای راس تنها نباشد. اگر X راس انتقالی نباشد آنگاه $Aut(X)$ دقیقاً دو مدار دارد و این مدارها دو بخش های گراف دو بخشی X هستند.

اثبات : به [۱۲] مراجعه شود.

گزاره ۲,۲,۱: فرض کنید X یک گراف همبند باشد و $G \le Aut(X)$. همچنین فرض کنید X، G – یال انتقالی باشد اما G – راس انتقالی نباشد . دراین صورت X دو بخشی است.

اثبات: به [۱۲] مراجعه شود.