وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه
گاوازنگ - زنجان

پایداری همولوژی برای گروه‌های خطی عام

پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد

فاطمه یگانه مکاری

استاد راهنما: دکتر بهروز میرزائی

آذر ماه ۱۳۸۹

به نام آنکه

تمام دانسته‌های هستی

در برابر علم نامنتهایش ناچیز است

تقدیم به :

پدر مهربانم،

موهای سپید و چشمهای نگران مادرم،

به پاس تعبیر عظیم و انسانی‌شان از کلمه ایثار

به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان که در این سردترین روزگاران بهترین پشتیبان است،

به پاس قلب‌های بزرگ‌شان که فریادرس است و ترس در پناهشان به شجاعت می‌گراید

و

به پاس محبت‌های بی‌دریغ‌شان که هرگز فروکش نمی‌کند.

اگر خدایی نباشد، باید او را اختراع کرد اما تمامی طبیعت فریاد برمی‌آورد
که خدایی هست.

«ولتر»

با سپاس از خدا که همواره مبهوت حکمتش بوده و هستم.

اکنون که با عنایت پروردگار، تدوین و نگارش این پایان‌نامه پایان یافته، لازم و شایسته است که از زحمات استاد عزیزم جناب آقای دکتر بهروز میرزائی به خاطر راهنمایی و زحمات بی‌دریغ‌شان در طول مدت تحصیل و همچنین تمام آنچه از ایشان آموختم، صمیمانه تشکر و قدردانی می‌کنم.

همچنین از پدر و مادر عزیزم که در تمام مراحل زندگی راهنما و مشوق من بودند، از همسر عزیزم به خاطر عشق و محبت بی پایانش که همواره روح تلاش و امید را در من زنده نگه می‌دارد، از خواهرانم بخصوص محبوبه و از برادرانم بخصوص علیرضا بخاطر حمایت‌های بی‌دریغ‌شان سپاسگزارم.

اندوخته‌های ذیقیمت مادی و معنوی هر انسانی حاصل تلاش یک نفر یا دو نفر نیست. حاصل تلاش دهها و صدها انسان از خود گذشته‌ای است که شغلهای فریبندهٔ دیگر را رها کرده، عاشقانه شغل معلمی را برگزیده‌اند. از اساتید محترمی که در محضر آنان در راه علم استفاده بردم سپاسگزارم.

بی‌شک تلاشهای اساتید محترم، آقایان جناب دکتر سید محمد غلامزاده محمودی از دانشگاه صنعتی شریف، جناب دکتر سعید تفضلیان و جناب دکتر محمد رضا سالاریان از دانشگاه تحصیلات تکمیلی زنجان، در مقام داوری این پایان‌نامه بسیار چشمگیر و قابل تقدیر بوده است. از بذل توجه این بزرگواران نیز سپاسگزارم.

از دوستان عزیزم خانمها بیان نامی و مهناز علوی نژاد که لحظه‌های پر از خاطره را در کنار هم سپری کردیم، صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

در پایان امیدوارم که این پایان‌نامه برای اهل فن و دوستداران دانش مفید واقع شود. اگر کاستی در این پایان‌نامه مشاهده می‌شود به صاحب قلم برمی‌گردد که تمنای آن دارد به دیده اغماض به آن نگریسته شود.

چکیده

هدف این پایان‌نامه اثبات پایداری همولوژی برای گروههای خطی عام روی یک حلقه موضعی با میدان مانده نامتناهی است. قضیه پایداری همولوژی روی چنین حلقه‌ای ادعا می‌کند که برای عددهای صحیح و مثبت q و n، همریختی طبیعی

$$H_q(inc) : H_q(GL_n(R), \mathbb{Z}) \longrightarrow H_q(GL_{n+1}(R), \mathbb{Z})$$

برای $q \leq n$ پوشا و برای $q \leq n-1$ دوسویی است. در اینجا $inc : GL_n(R) \hookrightarrow GL_{n+1}(R)$ نگاشت شمول با ضابطه $A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ می‌باشد. برای اثبات این قضیه از ابزارهای مهمی همچون دنباله‌های طیفی و همولوژی گروههای آفین روی حلقه‌های با بیشمار یکه استفاده شده است. مرحله آخر اثبات این ادعا در این پایان‌نامه مستقل از استقراء است و به نوعی متفاوت از اثبات اولیه آن می‌باشد. این قضیه و قضایای شبیه به این بخاطر کاربردهای زیادی که در نظریه جبری K و شاخه‌های مرتبط با آن دارند و همچنین بخاطر تکنیکهای بکار برده شده در اثبات آنها، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشند.

فهرست

مقدمه

ایده وجودی مسئله پایداری هومولوژی برای گروههای خطی عام را شاید بتوان به تابع دترمینان نسبت داد. فرض کنید F یک میدان و $GL_n(F)$ مجموعه همه ماتریسهای معکوس‌پذیر $n \times n$ روی F باشند. نگاشت دترمینان $\det : GL_n(F) \longrightarrow F^*$، یکریختی $GL_n(F)/SL_n(F) \xrightarrow{\sim} F^*$ با ضابطه $\overline{A} \mapsto \det A$ را القاء می‌کند، که $SL_n(F)$ مجموعه همه ماتریسهای $n \times n$ با دترمینان یک می‌باشد. معکوس نگاشت بالا، نگاشت

$$F^* \xrightarrow{\sim} GL_n(F)/SL_n(F) \qquad\qquad (*)$$

با ضابطه $a \mapsto \overline{\begin{pmatrix} a & \circ \\ \circ & I_{n-١} \end{pmatrix}}$ می‌باشد. نگاشت شمول $i_n : GL_n(F) \longrightarrow GL_{n+١}(F)$ با ضابطه $A \mapsto \begin{pmatrix} A & \circ \\ \circ & ١ \end{pmatrix}$ بطور طبیعی همریختی $GL_n(F)/SL_n(F) \xrightarrow{\overline{i_n}} GL_{n+١}(F)/SL_{n+١}(F)$ را القاء می‌کند. یکریختی $(*)$ نشان می‌دهد که همه نگاشتها در زنجیر

$$F^* \simeq GL_١(F)/SL_١(F) \xrightarrow{\overline{i_١}} GL_٢(F)/SL_٢(F) \xrightarrow{\overline{i_٢}} \cdots \longrightarrow GL_n(F)/SL_n(F) \xrightarrow{\overline{i_n}} \cdots \qquad (**)$$

یکریخت می‌باشند. این واقعیت حالت خاصی از قضیه پایداری هومولوژی برای گروههای خطی عام است. در واقع چون $SL_n(F) = [SL_n(F), SL_n(F)] = [GL_n(F), GL_n(F)]$ (توجه کنید که اگر $n = ٢$، آنگاه F باید حداقل چهار عضو داشته باشد) و چون هومولوژی اول $GL_n(F)$ با ضرائب در $\mathbb{Z}$ به صورت زیر است (قضیه ٦.١.١١ از مرجع [١٠] را ببینید)،

$$H_١(GL_n(F), \mathbb{Z}) \simeq GL_n(F)/[GL_n(F), GL_n(F)] \simeq GL_n(F)/SL_n(F)$$

پس در واقع پایداری هومولوژی زیر را داریم که از $(**)$ نتیجه می‌شود.

$$H_١(GL_١(F), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} H_١(GL_٢(F), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} H_١(GL_n(F), \mathbb{Z}) \xrightarrow{\sim} \cdots$$

حال سوال این است که اگر میدان F را با یک حلقه دلخواه و یا هومولوژی اول را با هومولوژی n–ام جایگزین کنیم، پایداری هومولوژی بالا چه شکلی به خود می‌گیرد؟ به این مسئله، مسئله پایداری هومولوژی گویند.

مطالعه گروههای هومولوژی $H_l(GL_n(R), \mathbb{Z})$ که در آن $GL_n(R)$ گروه خطی عام از مرتبه n روی حلقه جابه‌جایی R می‌باشد، بسیار مهم است. متاسفانه محاسبه این گروهها به خاطر اندازه بزرگ آنها بسیار پیچیده و

تا حدی غیر ممکن است. بنابراین مقایسه گروههای $H_l(GL_n(R),\mathbb{Z})$ برای مقادیر متفاوت n اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند.

می‌گوییم یک زنجیر از گروهها $\cdots \subseteq G_n \subseteq \cdots \subseteq G_۱ \subseteq G_۰$ خاصیت پایداری همولوژی دارد اگر به ازای هر l و برای n به اندازه کافی بزرگ، $H_l(G_n,\mathbb{Z}) \longrightarrow H_l(G_{n+۱},\mathbb{Z})$ یک یکریختی باشد.

ایده پایداری همولوژی برای گروههای خطی عام اولین بار بوسیلۀ کویلن[۱] [۶] ارائه شد. بخاطر اهمیت این نتایج و قدرتمندی تکنیکهای به کار برده شده، کارهای کویلن علاقه‌مندان زیادی را برای مطالعه پایداری همولوژی برای گروههای خطی عام و گروههای کلاسیک دیگر جلب کرد. بعد از این مقالات بسیاری در زمینه پایداری همولوژی نوشته شد که هدف اصلی آنها اثبات نتیجه‌ای کلی‌تر با رتبه پایداری بهتر بود. بهترین و کلی‌ترین نتایج برای پایداری همولوژی گروههای خطی عام متعلق به ون در کالن[۲] [۹] می‌باشد. از مقالات جالب و بسیار مهم در این زمینه مقالات سوسلین[۳] [۸] و نسترنکو و سوسلین[۴] [۵] می‌باشند که مبنای این پایان‌نامه بر آنها استوار است. هدف اصلی ما در این پایان‌نامه اثبات پایداری همولوژی برای گروههای خطی عام روی حلقه‌های موضعی با میدان مانده نامتناهی است.

قضیه پایداری. *فرض کنید R یک حلقه موضعی با میدان مانده نامتناهی باشد. فرض کنید q و n اعداد صحیح مثبت باشند و $H_q(inc): H_q(GL_{n-۱}(R),\mathbb{Z}) \longrightarrow H_q(GL_n(R),\mathbb{Z})$ همریختی طبیعی القاء شده بوسیله تابع شمول $inc: GL_{n-۱}(R) \longrightarrow GL_n(R)$ با ضابطه $A \mapsto \begin{pmatrix} A & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{pmatrix}$ باشد. آنگاه برای $q \le n-۱$، $H_q(inc)$ پوشاست و برای $q \le n-۲$، $H_q(inc)$ دوسویی است.*

اثبات قضایای پایداری همولوژی معمولا بر اساس معرفی یک دنباله طیفی مناسب و تجزیه و تحلیل این دنباله طیفی و استفاده از استقراء می‌باشد. توجه شود که دنباله‌های طیفی از مفاهیم بسیار سخت جبر همولوژی و توپولوژی جبری می‌باشند. اکثر قسمتهای مهم این پایان‌نامه برگرفته از مرجع [۵] می‌باشد. فقط مرحله آخر اثبات یعنی بخش ۳ از فصل ۴، بر اساس روش به کار رفته در مرجع [۴] می‌باشد. ترکیب این دو روش در این

[۱] Quillen
[۲] Van der Kallen
[۳] Suslin
[۴] Nestrenko

پایان‌نامه، باعث شده است که اثبات قضیه پایداری کوتاهتر و بدون استفاده از استقراء باشد. این امر به نوعی جالب و جدید است.

این پایان‌نامه در چهار فصل تنظیم شده است.

در فصل اول به مطالعه مفاهیم و مطالب مورد نیاز همولوژی گروهها می‌پردازیم. این فصل را با تعریف دنباله‌ها شروع و در ادامه حلقه‌های گروهی و مدولهای روی این حلقه‌ها و همولوژی گروهها را معرفی می‌کنیم. همچنین بطور خلاصه به مفهوم حد مستقیم و قضایای مربوط به آن در ارتباط با همولوژی گروهها می‌پردازیم و در آخر همولوژی گروههای آبلی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

فصل دوم به دنباله‌های طیفی اختصاص داده شده است. دنباله‌های طیفی ابزاری مفید و قدرتمند در نظریه جبر همولوژی می‌باشند. در این فصل ما دنباله‌های طیفی ربع اول و همگرایی آنها را معرفی می‌کنیم. در ادامه روش ساخت یک دنباله طیفی از فیلترسازی کانونیک یک دنباله غیر منفی را معرفی و قضیه همگرایی کلاسیک را بیان می‌کنیم. سپس وجود دنباله‌های طیفی وابسته به یک دنباله مضاعف اثبات می‌شوند. در انتها قضیه مهم دنباله طیفی لیندن[۵] /هوشیلد[۶]—سِر[۷] را اثبات می‌کنیم.

فصل سوم به مطالعه همولوژی گروههای آفین روی حلقه‌های با بیشمار یکه می‌پردازد. پس ابتدا حلقه‌های با بیشمار یکه را معرفی خواهیم کرد و به بررسی همولوژی گروه ضربی این حلقه‌ها با ضرائب خاص می‌پردازیم. این مطالب و دنباله‌های طیفی برای مطالعه همولوژی گروههای آفین بسیار اساسی می‌باشند. قضایا و تکنیکهای بکار رفته در این فصل به خودی خود از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

فصل چهارم با مطالعه جبر خطی روی حلقه‌های موضعی شروع می‌شود. سپس دنباله طیفی مورد نیاز برای اثبات قضیه پایداری را معرفی و با جزئیات بررسی می‌کنیم. در آخر قضیه پایداری برای گروههای خطی عام روی حلقه‌های موضعی با میدان مانده نامتناهی را اثبات می‌کنیم که هدف نهایی این پایان‌نامه است.

در اینجا توضیح کوتاهی در مورد نمادهای استفاده شده در این پایان‌نامه می‌دهیم. اگر M یک مدول و N زیرمدول آن باشد، ما معمولاً عضو $m + N \in M/N$ را با $\overline{m}$ نمایش می‌دهیم. همچنین گروه $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ را با $\mathbb{Z}/n$ نمایش می‌دهیم. در بسیاری از مواقع ما مشخص نمی‌کنیم که یک مدول، مدول چپ است یا راست و این امر را

[۵] Lyndon

[۶] Hochschild

[۷] Serre

به تشخیص خواننده گرامی واگزار می‌کنیم. مثلاً در ضرب تانسوری $M \otimes_R N$ بدون اینکه ذکر شود همیشه فرض بر این است که M یک $R-$مدول راست و N یک $R-$مدول چپ است و غیره. توجه کنید که $M \otimes_R N$ در حالت کلی یک $\mathbb{Z}-$مدول است و اگر R جابجایی باشد، یک $R-$مدول نیز است. در این پایان‌نامه، چون گروه G معمولاً غیر آبلی است، پس حلقه گروهی $\mathbb{Z}G$ غیر جابه‌جایی است و بنابراین $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ فقط ساختار $\mathbb{Z}-$مدولی دارد. همچنین گروه متقارن با n عضو را با $\sum_n$ نمایش می‌دهیم.

فصل اول

همولوژی گروهها

ما در این فصل به طور خلاصه همولوژی گروهها را معرفی و مطالعه می‌کنیم. برای دیدن جزئیات بیشتر یا اثبات بعضی قضایا به مراجع [۲]، [۷] و [۱۰] رجوع شود. در این فصل سعی بر این است که مفاهیم مفید و مورد نیاز برای فهم بیشتر موضوع اصلی بیان گردد. در تمام این فصل G یک گروه دلخواه است و عنصر بدیهی G را با ۱ یا 1_G نمایش می‌دهیم.

۱.۱ دنباله‌ها

فرض کنید R حلقه‌ای یکدار است. یک دنباله (زنجیری نزولی) از R—مدولها، یک خانواده $K_\bullet := \{K_n, \partial_n^K\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از R—مدولهای K_n و R—همریختیهای $\partial_n^K : K_n \longrightarrow K_{n-1}$ می‌باشد بطوریکه به ازای هر n، $\partial_n^K \circ \partial_{n+1}^K = 0$. این دنباله زنجیری را معمولاً به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$K_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow K_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}^K} K_n \xrightarrow{\partial_n^K} K_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

همریختی ∂_n^K را دیفرانسیل n—ام دنباله $K_\bullet$ می‌نامیم. در صورتی که ابهامی پیش نیاید ∂_n^K را معمولا با ∂_n نمایش می‌دهیم. R—مدول $B_n(K_\bullet) := \operatorname{im}(\partial_{n+1}^K)$ را n—مرز دنباله و R—مدول $Z_n(K_\bullet) := \ker(\partial_n^K)$ را

n—دور دنباله می‌نامیم. از رابطه $\partial_n^K \circ \partial_{n+1}^K = ۰$، نتیجه می‌شود که $B_n(K_\bullet) \subseteq Z_n(K_\bullet)$. حال به ازای هر n همولوژی n—ام دنباله $K_\bullet$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$H_n(K_\bullet) := Z_n(K_\bullet)/B_n(K_\bullet)$$

دنباله $K_\bullet$ را دقیق می‌نامیم هر گاه به ازای هر n، $H_n(K_\bullet) = ۰$. خانوادهٔ $f_\bullet := \{f_n : K_n \longrightarrow L_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ از R—همریختی‌ها را یک ریخت از دنباله $K_\bullet$ به دنباله $L_\bullet$ می‌نامیم هرگاه به ازای هر n، $f_{n-۱} \circ \partial_n^K = \partial_n^L \circ f_n$، یا به عبارتی به ازای هر n، نمودار زیر جابه‌جایی شود.

$$\begin{array}{ccc} K_n & \xrightarrow{\partial_n^K} & K_{n-۱} \\ \Big\downarrow f_n & & \Big\downarrow f_{n-۱} \\ L_n & \xrightarrow{\partial_n^L} & L_{n-۱} \end{array}$$

ریخت $f_\bullet : K_\bullet \longrightarrow L_\bullet$، به ازای هر n، یک همریختی به صورت زیر القاء می‌کند.

$$H_n(f_\bullet) : H_n(K_\bullet) \longrightarrow H_n(L_\bullet)$$

با ضابطه $\overline{x} \mapsto \overline{f_n(x)}$. به آسانی دیده می‌شود که اگر $f_\bullet : K_\bullet \longrightarrow L_\bullet$ و $g_\bullet : L_\bullet \longrightarrow M_\bullet$ دو ریخت باشند، آنگاه خانواده $g_\bullet \circ f_\bullet := \{g_n \circ f_n : K_n \longrightarrow M_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک ریخت است و

$$H_n(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet)$$

همچنین اگر $\mathrm{id}_{K_\bullet} : K_\bullet \longrightarrow K_\bullet$ ریخت همانی باشد، آنگاه $H_n(\mathrm{id}_{K_\bullet}) = \mathrm{id}_{H_n(K_\bullet)}$. پس H_n در واقع یک تابعگون همورد از رسته دنباله‌های روی R به رسته R—مدولها است. ترکیب $K_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} H_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} L_\bullet$ از دو ریخت $f_\bullet$ و $g_\bullet$ را یک دنباله (از دنباله‌ها) نامیم هرگاه به ازای هر n، $g_n \circ f_n = ۰$.

دنباله $۰ \longrightarrow K_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} H_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} L_\bullet \longrightarrow ۰$ را دقیق نامیم هرگاه به ازای هر n، دنباله کوتاه $۰ \longrightarrow K_n \xrightarrow{f_n} H_n \xrightarrow{g_n} L_n \longrightarrow ۰$ دقیق باشد. توجه کنید دقیق بودن این دنباله ارتباطی به دقیق بودن دنباله‌های $K_\bullet$ ($H_\bullet$ یا $L_\bullet$) ندارد.

قضیه ۱.۱.۱ (دنباله بلند دقیق) فرض کنید دنباله $\circ \longrightarrow K_\bullet \xrightarrow{f_\bullet} H_\bullet \xrightarrow{g_\bullet} L_\bullet \longrightarrow \circ$ دقیق باشد. آنگاه به ازای هر n، همریختی $\delta_n : H_n(L_\bullet) \longrightarrow H_{n-۱}(K_\bullet)$ وجود دارد بطوریکه دنباله دقیق زیر را داریم.

$$\cdots \longrightarrow H_{n+۱}(L_\bullet) \xrightarrow{\delta_{n+۱}} H_n(K_\bullet) \xrightarrow{H_n(f_\bullet)} H_n(H_\bullet) \xrightarrow{H_n(g_\bullet)} H_n(L_\bullet) \xrightarrow{\delta_n} H_{n-۱}(K_\bullet) \longrightarrow \cdots$$

علاوه براین همریختی δ_n طبیعی است، بدین معنی که از نمودار جابجایی زیر از دنباله‌ها با سطرهای دقیق

$$\begin{array}{ccccccccc} \circ & \longrightarrow & K_\bullet & \xrightarrow{f_\bullet} & H_\bullet & \xrightarrow{g_\bullet} & L_\bullet & \longrightarrow & \circ \\ & & {\scriptstyle k_\bullet}\downarrow & & {\scriptstyle h_\bullet}\downarrow & & {\scriptstyle l_\bullet}\downarrow & & \\ \circ & \longrightarrow & K'_\bullet & \xrightarrow{f'_\bullet} & H'_\bullet & \xrightarrow{g'_\bullet} & L'_\bullet & \longrightarrow & \circ \end{array}$$

نمودار جابجایی زیر با سطرهای دقیق را بدست می آوریم.

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{n+۱}(L_\bullet) & \xrightarrow{\delta_{n+۱}} & H_n(K_\bullet) & \longrightarrow & H_n(H_\bullet) & \longrightarrow & H_n(L_\bullet) & \xrightarrow{\delta_n} & H_{n-۱}(K_\bullet) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{n+۱}(L'_\bullet) & \xrightarrow{\delta'_{n+۱}} & H_n(K'_\bullet) & \longrightarrow & H_n(H'_\bullet) & \longrightarrow & H_n(L'_\bullet) & \xrightarrow{\delta'_n} & H_{n-۱}(K'_\bullet) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

برهان. به قضیه ۱.۳.۱ از مرجع [۱۰] مراجعه کنید. □

مثال ۲.۱.۱ فرض کنید $K_\bullet$ یک دنباله از R−مدولها و M یک R−مدول باشد. آنگاه $K_\bullet \otimes M := \{K_n \otimes_R M, \partial_n^K \otimes \mathrm{id}_M\}_{n\in\mathbb{Z}}$ یک دنباله از $\mathbb{Z}$−مدولها است.

$$K_\bullet \otimes M : \quad \cdots \longrightarrow K_{n+۱} \otimes_R M \xrightarrow{\partial_{n+۱}^K \otimes id_M} K_n \otimes_R M \xrightarrow{\partial_n^K \otimes id_M} K_{n-۱} \otimes_R M \longrightarrow \cdots$$

اگر R جابه‌جایی باشد، آنگاه $K_\bullet \otimes M$ یک دنباله از R−مدولها نیز می‌باشد. △

مثال ۳.۱.۱ فرض کنید $F_\bullet$ و $C_\bullet$ دو دنباله غیر منفی از R−مدولها باشند.

$$F_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow F_۲ \xrightarrow{\partial_۲^F} F_۱ \xrightarrow{\partial_۱^F} F_\circ \longrightarrow \circ$$

$$C_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow C_۲ \xrightarrow{\partial_۲^C} C_۱ \xrightarrow{\partial_۱^C} C_\circ \longrightarrow \circ$$

دنباله مضاعف $D_\bullet := F_\bullet \otimes C_\bullet$ را به صورت زیر تعریف می کنیم،

$$D_\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow D_۲ \xrightarrow{\partial_۲^D} D_۱ \xrightarrow{\partial_۱^D} D_\circ \longrightarrow \circ$$

که به ازای هر n،

$$D_n := \bigoplus_{i+j=n} F_i \otimes_R C_j, \qquad \partial_n^D := (\partial_i^F \otimes id_{C_j} + (-1)^i id_{F_i} \otimes \partial_j^C)_{i+j=n}$$

به عبارتی ∂_n^D روی $f_i \otimes c_j \in F_i \otimes_R C_j$ به صورت زیر عمل می‌کند.

$$\partial_n^D(f_i \otimes c_j) = \partial_i^F(f_i) \otimes c_j + (-1)^i f_i \otimes \partial_j^C(c_j) \in F_{i-1} \otimes_R C_j \oplus F_i \otimes_R C_{j-1}$$

به آسانی دیده می‌شود که $\partial_{n-1}^D \circ \partial_n^D = 0$. پس $D_\bullet$ در واقع یک دنباله است. $\triangle$

تعریف ۴.۱.۱ یک تحلیل (چپ) از R−مدول M، یک دنباله دقیق از R−مدولها به صورت زیر است.

$$F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M : \qquad \cdots \longrightarrow F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

اگر همهٔ F_i−ها آزاد (تصویری) باشند، تحلیل را آزاد (تصویری) می‌نامیم.

قضیه ۵.۱.۱ هر R−مدول M، یک تحلیل آزاد (تصویری) دارد.

برهان. به لم ۲.۲.۵ از مرجع [۱۰] مراجعه کنید. $\square$

مثال ۶.۱.۱ فرض کنید X یک مجموعه ناتهی باشد. دنباله

$$C_\bullet(X) : \qquad \cdots \longrightarrow C_n(X) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow C_0(X) \longrightarrow 0$$

را به این صورت تعریف می‌کنیم: $C_n(X)$ را گروه آبلی آزاد تولید شده توسط همه $(n+1)$−تایی‌ها از عناصر X و تابع دیفرانسیل $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ را با ضابطه

$$\partial_n(x_0, \dots, x_n) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i (x_0, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n)$$

تعریف می‌کنیم. در اینجا $\widehat{x_i}$ به معنی حذف این عنصر است. ثابت می‌کنیم که $C_\bullet(X)$ یک دنباله است، یعنی به ازای هر n، $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$ و همچنین همولوژی $C_\bullet(X)$ بصورت زیر محاسبه می‌شود.

$$H_n(C_\bullet(X)) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & n = 0 \text{ اگر} \\ 0 & n \neq 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

برای اثبات دنباله بودن $C_\bullet(X)$، عنصر $(x_\circ,\dots,x_n)\in C_n(X)$ را در نظر بگیرید. با توجه تعریف ∂_n داریم،

$$\partial_n(x_\circ,\dots,x_n)=\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^i(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)$$

و با اثر دادن $\partial_{n-۱}$ روی عنصر $(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)$ داریم

$$\begin{aligned}\partial_{n-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)=&(\widehat{x_\circ},\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)+\cdots\\ &+(-۱)^{i-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_{i-۱}},\widehat{x_i},\dots,x_n)\\ &+(-۱)^{i}(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\widehat{x_{i+۱}},\dots,x_n)+\cdots\\ &+(-۱)^{n-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,\widehat{x_n})\end{aligned}$$

توجه کنید که وقتی $k\geq i+۱$ علامت $(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,\widehat{x_k},\dots,x_n)$، $(-۱)^{k-۱}$ است چون x_k، $(k-۱)$—امین جمله در لیست $x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_k,\dots,x_n$ است. پس

$$\begin{aligned}\partial_{n-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)=&\textstyle\sum_{j=\circ}^{i-۱}(-۱)^j(x_\circ,\dots,\widehat{x_j},\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)\\ &+\textstyle\sum_{k=i+۱}^{n}(-۱)^{k-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,\widehat{x_k},\dots,x_n)\end{aligned}$$

حال توجه کنید که $(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n)$ دوبار در بسط $\partial_{n-۱}\circ\partial_n(x_\circ,\dots,x_n)$ ظاهر می‌شود: یکبار در بسط $\partial_{n-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)$ و یکبار در بسط $\partial_{n-۱}(x_\circ,\dots,\widehat{x_j},\dots,x_n)$. در بسط اولی علامت آن $(-۱)^{i+j}$ است و در بسط دومی علامت آن $(-۱)^{i+j-۱}$ است. این جمله‌ها یکدیگر را حذف می‌کنند و بنابراین $\partial_{n-۱}\circ\partial_n=\circ$.

برای محاسبه همولوژی $C_\bullet(X)$، فرض کنید $C_{-۱}(X):=\mathbb{Z}$ و تابع $C_\circ(X)\xrightarrow{\partial_\circ}C_{-۱}(X)$ با ضابطه $\sum n_i(x_i)\mapsto\sum n_i$ را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که $\partial_\circ\circ\partial_۱=\circ$. می‌خواهیم ثابت کنیم که دنباله $\cdots\longrightarrow C_۱(X)\xrightarrow{\partial_۱}C_\circ(X)\xrightarrow{\partial_\circ}C_{-۱}(X)\longrightarrow\circ$ دقیق است. عنصر $\alpha:=\sum m(x_\circ,\dots,x_n)\in\ker(\partial_n)$ را در نظر بگیرید. پس

$$\circ=\partial_n(\alpha)=\sum m\partial_n(x_\circ,\dots,x_n)=\sum\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^i m(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n)\qquad(*)$$

حال اگر $x\in X$، آنگاه بنابر $(*)$، داریم

$$\sum\sum_{i=\circ}^{n}(-۱)^i m(x_\circ,\dots,\widehat{x_i},\dots,x_n,x)=\circ\qquad(**)$$

اگر $\beta := \sum m(x_\circ, \ldots, x_n, x) \in C_{n+1}(X)$، آنگاه با توجه به $(**)$ داریم

$$\begin{aligned}
\partial_{n+1}(\beta) &= \sum m \partial_{n+1}(x_\circ, \ldots, x_n, x) \\
&= \sum m \Big(\sum_{i=\circ}^{n} (-1)^i (x_\circ, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n, x) + (-1)^{n+1}(x_\circ, \ldots, x_n) \Big) \\
&= \sum \sum_{i=\circ}^{n} (-1)^i m(x_\circ, \ldots, \widehat{x_i}, \ldots, x_n, x) + (-1)^{n+1} \sum m(x_\circ, \ldots, x_n) \\
&= (-1)^{n+1}\alpha
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\partial_{n+1}((-1)^{n+1}\beta) = (-1)^{n+1}\partial_{n+1}(\beta) = (-1)^{n+1}(-1)^{n+1}\alpha = \alpha$$

پس $\alpha \in \mathrm{im}(\partial_{n+1})$ و لذا $\mathrm{im}(\partial_{n+1}) = \ker(\partial_n)$. حال اگر $n \neq \circ$ ، آنگاه $H_n(C_\bullet(X)) = \circ$. اگر $n = \circ$، آنگاه $H_\circ(C_\bullet(X)) = C_\circ(X)/im(\partial_1)$. اما چون دنباله $C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_\circ(X) \xrightarrow{\partial_\circ} \mathbb{Z} \longrightarrow \circ$ دقیق است، پس $H_\circ(C_\bullet(X)) \simeq \mathbb{Z}$.

بنابراین ما در واقع ثابت کردیم که $C_\bullet(X) \xrightarrow{\partial_\circ} \mathbb{Z}$ یک تحلیل آزاد از $\mathbb{Z}$، از $\mathbb{Z}$−مدولها است. $\triangle$

تعریف ۷.۱.۱ فرض کنید $C_\bullet$ و $D_\bullet$ دو دنباله باشند. ریخت $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ را هموتوپی پوچ گوییم هرگاه به ازای هر n، همریختی $S_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ وجود داشته باشد بطوریکه $f_n = S_{n-1} \circ \partial_n^C + \partial_{n+1}^D \circ S_n$.
دو ریخت $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet$ را هموتوپ گوئیم، و می‌نویسیم $f_\bullet \sim g_\bullet$، هرگاه $f_\bullet - g_\bullet$ یک هموتوپی پوچ باشد، یعنی به ازای هر n، همریختی $S_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ وجود داشته باشد بطوریکه $f_n - g_n = S_{n-1} \circ \partial_n^C + \partial_{n+1}^D \circ S_n$. خانواده $\{S_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ را یک هموتوپی از $f_\bullet$ به $g_\bullet$ گوئیم.

تعریف ۸.۱.۱ دو دنباله $C_\bullet$ و $D_\bullet$ را هم‌ارز هموتوپی گوئیم، و می‌نویسیم $C_\bullet \sim D_\bullet$، اگر ریختیهای $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet : D_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ وجود داشته باشند بطوریکه $g_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathrm{id}_{C_\bullet}$ و $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \mathrm{id}_{D_\bullet}$.

لم ۹.۱.۱ فرض کنید ریخت $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ هموتوپی پوچ باشد. آنگاه به ازای هر n، $H_n(f_\bullet) = \circ$.

برهان. چون $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ هموتوپی پوچ است، با توجه به تعریف ۷.۱.۱، به ازای هر n همریختی

$S_n : C_n \longrightarrow D_{n+1}$ وجود دارد بطوریکه

$$f_n = S_{n-1} \circ \partial_n^C + \partial_{n+1}^D \circ S_n$$

توجه کنید که ریخت $f_\bullet$، همریختی $H_n(f_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet)$ با ضابطه $\overline{x} \mapsto \overline{f_n(x)}$ را القاء می‌کند. حال اگر $\overline{x} \in H_n(C_\bullet)$، آنگاه $\partial_n^C(x) = 0$. لذا داریم

$$f_n(x) = S_{n-1} \circ \partial_n^C(x) + \partial_{n+1}^D \circ S_n(x) = \partial_{n+1}^D(S_n(x)) \in im(\partial_{n+1}^D) = B_n(D_\bullet)$$

بنابراین $H_n(f_\bullet)(\overline{x}) = \overline{f_n(x)} = 0$. □

نتیجه ۱۰.۱.۱ فرض کنید ریختهای $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet$ هموتوپ باشند. آنگاه به ازای هر n، $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet) : H_n(C_\bullet) \longrightarrow H_n(D_\bullet)$. همچنین اگر $C_\bullet \sim D_\bullet$، آنگاه $H_n(C_\bullet) \simeq H_n(D_\bullet)$.

برهان. چون $f_\bullet \sim g_\bullet$، پس $f_\bullet - g_\bullet$ هموتوپی پوچ است. لذا با توجه به لم قبل ۹.۱.۱ به ازای هر n، $H_n(f_\bullet - g_\bullet) = 0$. در نتیجه $H_n(f_\bullet) = H_n(g_\bullet)$. حال اگر $C_\bullet \sim D_\bullet$، آنگاه با توجه به تعریف ۷.۱.۱، ریختهای $f_\bullet : C_\bullet \longrightarrow D_\bullet$ و $g_\bullet : D_\bullet \longrightarrow C_\bullet$ وجود دارند بطوریکه $g_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathrm{id}_{C_\bullet}$ و $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \mathrm{id}_{D_\bullet}$. در نتیجه بنابر قسمت اول همین اثبات $H_n(g_\bullet \circ f_\bullet) = H_n(\mathrm{id}_{C_\bullet})$ و $H_n(f_\bullet \circ g_\bullet) = H_n(\mathrm{id}_{D_\bullet})$. چون همولوژی یک تابعگون است، پس $H_n(g_\bullet) \circ H_n(f_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(C_\bullet)}$ و $H_n(f_\bullet) \circ H_n(g_\bullet) = \mathrm{id}_{H_n(D_\bullet)}$. بنابراین
$H_n(C_\bullet) \simeq H_n(D_\bullet)$ □

قضیه ۱۱.۱.۱ (قضیه مقایسه) فرض کنید $f : M \longrightarrow N$ یک همریختی از R−مدولها و $P_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ یک تحلیل تصویری از M باشد. آنگاه برای هر تحلیل دلخواه $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} N$ ، یک ریخت $f_\bullet : P_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ وجود دارد که f را گسترش می‌دهد، یعنی $\mu \circ f_0 = f \circ \varepsilon$. (در اینجا منظور از $P_\bullet$، دنباله $\cdots \xrightarrow{\partial_3^P} P_2 \xrightarrow{\partial_2^P} P_1 \xrightarrow{\partial_1^P} P_0 \longrightarrow 0$ می‌باشد.) علاوه بر این، این ریخت در حد هموتوپی یکتا است.

برهان. به قضیه ۲.۲.۶ از مرجع [۱۰] مراجعه کنید. □

تعریف ۱۲.۱.۱ فرض کنید N یک R—مدول چپ و $F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ یک تحلیل تصویری از R—مدول راست M باشد. تعریف می‌کنیم

$$Tor_n^R(M,N) := H_n(F_\bullet \otimes_R N)$$

که در اینجا $F_\bullet$ دنباله تصویری $\cdots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \longrightarrow 0$ می‌باشد.

قضیه ۱۳.۱.۱ گروه $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ مستقل از انتخاب تحلیل تصویری $F_\bullet \xrightarrow{\varepsilon} M$ است.

برهان. فرض کنید $Q_\bullet \xrightarrow{\mu} M$ یک تحلیل تصویری به غیر از تحلیل تصویری $F_\bullet \xrightarrow{\epsilon} M$ باشد و فرض کنید که $f := \mathrm{id}_M : M \longrightarrow M$. با استفاده از قضیه مقایسه ۱۱.۱.۱، ریختهای $f_\bullet : F_\bullet \longrightarrow Q_\bullet$ و $g_\bullet : Q_\bullet \longrightarrow F_\bullet$ وجود دارند بطوریکه نمودارهای زیر جابه‌جایی هستند.

$$\begin{array}{ccccc} F_\bullet & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_M} & & \\ Q_\bullet & \xrightarrow{\mu} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccccc} Q_\bullet & \xrightarrow{\mu} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle g_\bullet}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_M} & & \\ F_\bullet & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

حال نمودارهای جابه‌جایی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{array}{ccccc} F_\bullet & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle g_\bullet \circ f_\bullet \,,\, id_{F_\bullet}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_M} & & \\ F_\bullet & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad , \quad \begin{array}{ccccc} Q_\bullet & \xrightarrow{\mu} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle f_\bullet \circ g_\bullet \,,\, id_{Q_\bullet}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id_M} & & \\ Q_\bullet & \xrightarrow{\mu} & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

با استفاده از قضیه مقایسه ۱۱.۱.۱، ریختهای $f_\bullet \circ g_\bullet$ و $g_\bullet \circ f_\bullet$ در حد هموتوپی یکتا هستند، پس $g_\bullet \circ f_\bullet \sim \mathrm{id}_{F_\bullet}$ و $f_\bullet \circ g_\bullet \sim \mathrm{id}_{Q_\bullet}$. بنابراین با ضرب تانسوری id_N در روابط بالا، داریم $(g_\bullet \otimes \mathrm{id}_N) \circ (f_\bullet \otimes \mathrm{id}_N) \sim \mathrm{id}_{F_\bullet \otimes N}$ و $(f_\bullet \otimes \mathrm{id}_N) \circ (g_\bullet \otimes \mathrm{id}_N) \sim \mathrm{id}_{Q_\bullet \otimes N}$. در نتیجه $Q_\bullet \otimes_R N \sim F_\bullet \otimes_R N$. حال بنابر نتیجه ۱۰.۱.۱، $H_n(Q_\bullet \otimes_R N) \simeq H_n(F_\bullet \otimes_R N)$. بنابراین تعریف $\mathrm{Tor}_n^R(M,N)$ مستقل از انتخاب تحلیل تصویری است. $\square$

مثال ۱۴.۱.۱ فرض کنید N و M همچون بالا باشند. چون ضرب تانسوری دقیق راست است، پس

$$F_1 \otimes_R N \xrightarrow{\partial_1^F \otimes id_N} F_0 \otimes_R N \xrightarrow{\varepsilon \otimes id_N} M \otimes_R N \longrightarrow 0$$

دقیق است. بنابراین $\mathrm{Tor}_{0}^{R}(M,N) = H_{0}(F_{\bullet} \otimes_R N) = (F_{0} \otimes_R N)/\mathrm{im}(\partial_{1}^{F} \otimes \mathrm{id}_N) \simeq M \otimes_R N$. $\triangle$

۲.۱ حلقه‌های گروهی و مدولهای روی آنها

فرض کنید G یک گروه باشد. حلقهٔ گروهی $\mathbb{Z}G$، گروه آبلی آزاد تولید شده بوسیلهٔ عناصر G می‌باشد و عمل ضرب روی $\mathbb{Z}G$ به صورت طبیعی تعریف می‌شود، یعنی $\sum n_g g \cdot \sum n_h h := \sum\sum n_g n_h gh$. توجه کنید که عناصر G، یک پایه برای $\mathbb{Z}G$ به عنوان $\mathbb{Z}-$مدول آزاد می‌باشند. یک مدول چپ (راست) روی $\mathbb{Z}G$، یک $G-$مدول چپ (راست) نامیده می‌شود. ساختار یک $G-$مدول چپ را می‌توان به صورت یک گروه آبلی جمعی دید که G از چپ روی آن عمل می‌کند و روی جمع خاصیت پخشی دارد. در یک $G-$مدول M اگر عمل G روی M بدیهی باشد، یعنی به ازای هر $g \in G$ و هر $m \in M$ داشته باشیم $gm = m$، آنگاه M را یک $G-$مدول بدیهی می‌نامیم. در این پایان نامه همیشه فرض می‌کنیم که $\mathbb{Z}$ یک $G-$مدول بدیهی است.

حاصلضرب تانسوری $M \otimes_R N$ وقتی تعریف می‌شود که M یک مدول راست و N یک مدول چپ روی یک حلقه مشترک R باشند. ما به حاصلضرب تانسوری $G-$مدولها روی حلقهٔ $\mathbb{Z}G$ نیاز داریم. توجه داشته باشید که بطور طبیعی با تعریف $m \cdot g := g^{-1}m$ که $g \in G$ و $m \in M$، هر $G-$ مدول چپ M را می‌توانیم به یک $G-$مدول راست تبدیل کنیم و برعکس. با ساختار تعریف شده در بالا می‌توانیم حاصلضرب تانسوری $M \otimes_{\mathbb{Z}G} N$ برای $G-$مدولهای چپ M و N را تعریف کنیم که معمولا آنرا با $M \otimes_G N$ نمایش می‌دهیم. در این حاصلضرب رابطه زیر را دنبال می‌کنیم.

$$gm \otimes gn = mg^{-1} \otimes gn = m \otimes g^{-1}gn = m \otimes n \qquad (۱.۱)$$

تعریف ۱.۲.۱ فرض کنید M یک $G-$مدول باشد. M^G و M_G را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$M^G := \{m \in M \mid gm = m, g \in G\}$$

$$M_G := M/\langle gm - m \mid g \in G, m \in M\rangle$$

به آسانی دیده می‌شود که M^G و M_G هر دو $G-$مدول بدیهی هستند.