دانشگاه پیام‌نور
مرکز شیراز
گروه ریاضی

نرم عملگرهای ترکیبی روی فضای توابع تحلیلی

پایان نامه
برای دریافت درجه کارشناسی ارشد
در رشته ریاضی

توسط
اکبر گودرزی

استاد راهنما
دکتر عبدالعزیز عبدالهی

شهریور ماه ۱۳۸۵

صورت جلسه دفاع از پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : **محاسبه نرم عملگرهای ترکیبی روی فضای توابع تحلیلی**
که توسط **اکبر گودرزی** دانشجوی دوره کارشناسی ارشد رشته ریاضی مرکز شیراز تهیه و به هیات داوران ارایه گردیده است، مورد تایید می باشد.

تاریخ دفاع: ۸۵/۶/۲۵ نمره: ۱۸/۲ درجه ارزشیابی: عالی

اعضای هیات داوران:

نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه علمی	امضاء
۱-عبدالعزیز عبدالهی	استاد راهنما	دانشیار	
۲-صدیقه جاهدی	استاد مشاور	استادیار	
۳-نرگس عباسی	استاد ممتحن	استادیار	
۴-احمد خاکساری	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تقدیم به:

برادر عزیزم زنده یاد مهندس اصغر گودرزی

سپاسگزاری

انسان چیزی جز نی‌لبک نیست، ولی نی‌لبکی که می‌اندیشد. برای اینکه او را شکست دهیم هیچ نیازی به تجهیز جهان نیست. برای نابودی او یک ذره بخاریا یک قطره آب کفایت می کند ولی اگر تمام عالم کمر به نابودی او ببندد، باز هم انسان از قاتل خود والاتر و گران‌بهاتر است، زیرا او مرگ خودش را می‌فهمد، در حالی که عالم، از برتری خودش نسبت به انسان آگاه نیست، به همین دلیل تمامی ارزش ما به اندیشه است ... بکوشیم تا خوب بیندیشیم.

بلز پاسکال

اندیشه‌ها می آیند و می‌روند، ولی تنها شمار اندکی به راستی مهم هستند و روش اندیشیدن و کار کردن ما را دگرگون می‌سازند، اکنون که گامی دیگر در راه کسب علم و معرفت برداشته‌ام بر خود لازم می‌دانم که از استاد بزرگوار جناب آقای دکتر عبدالهی که همواره راهنما و مشوق بنده بوده و همچنین برادر عزیزم جناب آقای مهندس عزیزاله گودرزی و همسر گرامیشان سرکار خانم ربابه آبسالان که یار و یاورم بوده‌اند نهایت تشکر و سپاسگزاری را داشته باشم.

با درود بی‌پایان الهی بر پدر و مادر عزیزم که با تمام وجود من را در راه تحصیل علم همراهی نموده‌اند.

فهرست

عنوان — **صفحه**

چکیده

نام خانوادگی دانشجو: گودرزی نام: اکبر

عنوان پایان نامه: **نرم عملگرهای ترکیبی روی فضاهای توابع تحلیلی**

استاد راهنما: **دکتر عبدالعزیز عبدالهی**

مقطع تحصیلی : کارشناسی ارشد رشته : ریاضی محض گرایش : آنالیز

دانشگاه : پیام نور—واحد شیراز

تاریخ فارغ التحصیلی : شهریورماه ۱۳۸۵ تعداد صفحه : ۱۰۳

کلید واژه‌ها: فضای توابع تحلیلی—عملگر ترکیبی—نرم عملگر ترکیبی

فرض کنید ϕ یک نگاشت تحلیلی باشد که دیسک واحد $\mathbb{D}$ را بتوی خودش می‌برد. عملگر ترکیبی C_ϕ که روی فضای هاردی H^2 عمل می‌کند به شکل زیر تعریف می‌شود

$$C_\phi(f) = fo\phi.$$

هر عملگر ترکیبی روی این فضا کراندار است.

ما در این پایان‌نامه ابتدا تاریخچه‌ای از شکل‌گیری روند محاسبه نرم عملگرهای ترکیبی روی فضای توابع تحلیلی به خصوص فضای کلاسیک هاردی را مورد بررسی قرار داده و نشان می‌دهیم که نرم عملگر ترکیبی روی فضای هاردی نمی‌تواند فقط با بکارگیری مجموعه توابع هسته مولد H^2 محاسبه گردد و با علم به اینکه محاسبه نرم این عملگرها روی فضای هاردی کاری دشوار است اما ما مقایسه‌ای بین این کمیت و شعاع طیفی و همچنین عمل این عملگر و الحاقی آن بر توابع هسته مولد انجام داده و رفتار این چهار کمیت را نسبت به نقاط ثابت نگاشت مولد عملگر ترکیبی بررسی می‌نماییم.

اما در فصل سوم روند بررسی موضوع را کمی تغییر داده و استراتژی خود را برای مطالعه $\|C_\phi\|$ حول تعیین طیف عملگر $C_\phi^*C_\phi$ متمرکز می‌کنیم و نتایج مهمی را در ارتباط با فضای هاردی $H^۲$ به دست می‌آوریم که به نحو موثری می‌تواند به ما در بررسی نرم عملگر ترکیبی روی فضای دیریکله کمک نماید. در این فصل ما بحثی را با عملگرها ترکیبی تولید شده به کمک نگاشتهای خطی کسری آغاز می‌کنیم و با استفاده از فرمول الحاقی کاون نمایش مفید و مناسبی برای عملگر ترکیبی $C_\phi^*C_\phi : H^۲ \longrightarrow H^۲$ بدست می‌آوریم و در نهایت $\|C_\phi\|$ را بر حسب صفرهای یک چندجمله‌ای بیان می‌کنیم. در فصل چهارم به بررسی ساختار عملگر ترکیبی روی فضای دیریکله و مقایسه یافته‌های خود روی فضای هاردی با فضای دیریکله می‌پردازیم.

۱ — ۰ مقدمه

فرض کنید T یک عملگر خطی کراندار از فضای هیلبرت H به توی خودش باشد. یادآوری می‌کنیم که نرم عملگر T به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup\{\|Tf\| : f \in H \;,\; \|f\| \leq ۱\} \\ &= \sup\{\|T^*f\| : f \in H \;,\; \|f\| \leq ۱\} \end{aligned}$$

که T^* نمایش الحاقی T می‌باشد.

محاسبه واقعی مقدار نرم یک عملگر پیوسته فضای هیلبرت کاری دشوار است. برای مثال در این راستا کاون و مک کلر تحقیقاتی را آغاز، و روشهایی را جهت محاسبه نرم عملگرهای ترکیبی روی فضاهای هاردی در چند مورد ویژه ارائه نمودند و در پایان این پرسش را مطرح کردند که آیا می‌توان نرم عملگرهای ترکیبی T را به کمک عمل T^* بر روی فقط یک زیرمجموعه کوچک از گویهای واحد $H^۲$ بدست آورد؟

هدف ما در ارائه این پایان‌نامه بررسی تحقیقات بعمل آمده در پاسخگویی به پرسش کاون و مک کلر همچنین ارائه نتایج این تحقیقات خواهد بود.

کار ما در این تحقیق به پنج بخش زیر تقسیم می‌شود:

فصل ۰: ارائه تعاریف، معرفی نمادها و بیان قضایای پیش‌نیاز

فصل ۱: بررسی پرسش کاون و مک کلر و پاسخگویی به آن

فصل ۲: محاسبه نرم عملگرهای ترکیبی در حالت کلی و مقایسه نرم عملگرها با سایر کمیتهای مربوط به عملگرها.

فصل ۳: نرم عملگرهای ترکیبی با نشان خطی کسری

فصل ۴: محاسبه نرم عملگرهای ترکیبی روی فضای دیریکله

فصل ۵

فضای هاردی H^2

۱ — فضای هاردی $H^۲$

۱—۰ فضای هاردی $H^۲$

فضای هاردی $H^۲$ یک فضای هیلبرت شامل کلیه توابع تحلیلی به شکل $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ بر روی $\mathbb{D}$ می‌باشد به طوری که:

$$\|f\|_۲^۲ = \sum_{n=۰}^{\infty} |a_n|^۲ < \infty.$$

جایی که حاصلضرب درونی دو تابع $g(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n z^n$ و $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle f, g\rangle = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n \overline{b_n}$$

چند روش دیگر جهت بیان کردن حاصلضرب درونی فضای هاردی نیز وجود دارد که عبارتند از:

$$\langle f, g\rangle = \lim_{r \longrightarrow ۱^-} \int_۰^{۲\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\frac{d\theta}{۲\pi}$$

یا

$$\langle f, g\rangle = \int_۰^{۲\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\frac{d\theta}{۲\pi}$$

جایی که f و g تقریباً هر جا روی ∂D تعریف می‌شوند.

۰—۲ (توابع هسته مولد)

فرض کنید H فضای هیلبرت غیربدیهی از توابعی بر روی یک مجموعه U باشد. به ازای هر نقطه $w \in U$ نگاشت $\lambda_w : H \longrightarrow \mathbb{C}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\lambda_w(f) = f(w) \qquad \text{تابعک محاسبه نقطه‌ای}$$

این نگاشت پیوسته است. ما H را فضای هیلبرت تابعی می‌نامیم اگر هر تابعک محاسبه نقطه‌ای بر روی H کراندار باشد.

در این مورد برای هر $w \in U$ قضیه نمایش ریس وجود یک عنصر منحصر به فرد مانند k_w در H را تضمین می‌کند به طوری که به ازای هر $f \in H$،

$$\langle f, k_w \rangle = f(w)$$

عناصر k_w را توابع هسته مولد برای H می‌نامیم. نرم توابع هسته مولد به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$\|K_w\| = \sqrt{\langle k_w, k_w \rangle} = \sqrt{k_w(w)}$$

تابع هسته نرمال شده را با $\mathcal{K}_w$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{K}_w = \frac{k_w}{\|k_w\|}$$

برای هر عنصر f از H که به ازای هر $w \in U$ بر k_w عمود باشد داریم:

$$f(w) = \langle f, k_w \rangle = ۰$$

و این یعنی f یکسان با ۰ است. به عبارتی دیگر توابع هسته مولد یک زیرمجموعه چگال از H را می‌پیمایند. عموماً برای یک زیرمجموعه W از U از نماد $\mathcal{K}_W$ جهت نمایش مجموعه $\{k_w : w \in W\}$ استفاده می‌نماییم. به این ترتیب $\mathcal{K}_{W}^{\perp}$ عبارت است از مجموعه همه توابعی از H که بر روی W صفر می‌شوند.

۰—۳ عملگر ترکیبی

فرض کنید H یک فضای هیلبرت تابعی بر روی یک مجموعه U باشد همچنین ϕ یک نگاشت از U به توی خودش باشد. عملگر C_ϕ بر روی H به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$C_\phi(f) = fo\phi.$$

برای $f \in H$ به قسمی که $fo\phi \in H$.

قضیه ۰.۱: هر عملگر ترکیبی که از H به توی H تعریف می‌شود کراندار می‌باشد.

برهان: [۱۵].

فرض می‌کنیم که C_ϕ روی فضای هیلبرت تابعی H کراندار باشد. آنگاه برای هر $f \in H$، توجه کنید که:

$$\langle f, C_\phi^*(k_w)\rangle = \langle C_\phi(f), k_w\rangle = \langle fo\phi, k_w\rangle = f(\phi(w)) = \langle f, k_{\phi(w)}\rangle$$

در نتیجه برای هر تابع هسته k_w، $C_\phi^*(k_w) = k_{\phi(w)}$.

تعریف ۰.۲: یک تابع داخلی[۱] به تابع تحلیلی کراندار ϕ روی $\mathbb{D}$ اطلاق می‌شود به طوری که $|\phi(w)| = ۱$، تقریباً هر جا نسبت به اندازه m.

تعریف ۰.۳: فضای برداری $\mathcal{A}$ روی F را یک جبر گویند اگر بتوان ضربی بر روی آن تعریف کرد که $\mathcal{A}$ را به یک حلقه تبدیل نماید به طوری که برای هر $a, b \in \mathcal{A}$ و هر اسکالر $\alpha \in F$،

$$\alpha(ab) = a(\alpha b)$$

تعریف ۰.۴: جبر $\mathcal{A}$ را یک جبر باناخ گویند در صورتی که به همراه یک $\|\cdot\|$ یک فضای باناخ بوده و برای هر $a, b \in \mathcal{A}$، $\|ab\| \leq \|a\|\|b\|$.

[۱] Inner function

تعریف ۰.۵: اگر $\mathcal{A}$ یک جبر باناخ با عنصر یکانی باشد و $a \in \mathcal{A}$، طیف a[2] که با $\sigma(a)$ نمایش داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma(a) = \{\alpha \in F : a - \alpha \text{ وارون‌ناپذیر باشد}\}$$

• در سرتاسر مطالب گفته شده D نمایش مجموعه $\{z \in C : |z| \leq ۱\}$ و U نمایش مجموعه $\{z \in C : |z| < ۱\}$ می‌باشد.

۰—۴ توابع هسته مولد روی فضای هاردی $H^۲$

توابع هسته مولد را برای فضای هاردی به صورت زیر تولید می‌نماییم.

فرض کنید $k_w(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} b_n z^n$ و $f(z) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n z^n$ آنوقت طبق تعریف داریم

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n \overline{b_n} = \langle f, k_w \rangle = f(w) = \sum_{n=۰}^{\infty} a_n w^n$$

بنابراین به ازای هر $n = ۰$، $b_n = \overline{w}^n$ و در نتیجه

$$\begin{aligned} k_w(z) &= \sum_{n=۰}^{\infty} \overline{w}^n z^n = \frac{۱}{۱ - \overline{w}z} && (I) \\ \|k_w\| = \sqrt{\langle k_w, k_w \rangle} &= \sqrt{k_w(w)} = \sqrt{\frac{۱}{۱ - \overline{w}w}} = \sqrt{\frac{۱}{۱ - |w|^۲}} && (II) \end{aligned}$$

و

$$\mathcal{K}_w = \frac{k_w(z)}{\|k_w\|} = \frac{\sqrt{۱ - |w|^۲}}{۱ - \overline{w}z} \qquad (III)$$

[2] The Spectrum of a

۵-۰ کمیتهای S_ϕ و S_ϕ^*

فرض کنید H یک فضای هیلبرت تابعی بر روی یک مجموعه U باشد و فرض می‌کنیم که ϕ یک مولد عملگر ترکیبی روی H باشد.

N را مجموعه عناصر w از U در نظر می‌گیریم که‌برای هر f متعلق به H، $f(w)=0$. کمیتهای S_ϕ و S_ϕ^* را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} S_\phi^* &= \sup_{w\in U\setminus N}\{\|C_\phi^*(\mathcal{K}_w)\|\} = \sup_{w\in U\setminus N}\left\{\frac{\|C_\phi^*(k_w)\|}{\|k_w\|}\right\} \\ &= \sup_{w\in U\setminus N}\left\{\frac{\|k_{\phi(w)}\|}{\|k_w\|}\right\} = \sup_{w\in U\setminus N}\left\{\sqrt{\frac{k_{\phi(w)}(\phi(w))}{k_w(w)}}\right\}. \end{aligned}$$

چون $C_\phi^*(k_w)=k_{\phi(w)}$، مجموعه $\{k_w : w\in\phi^{-1}(w)\}$ شامل آن دسته از توابع هسته مولد می‌باشد که متعلق به هسته C_ϕ^* هستند بنابراین:

$$\begin{aligned} S_\phi^* &= \sup_{w\in U\setminus N}\left\{\frac{\|C_\phi^*(k_w)\|}{\|k_w\|}\right\} = \sup_{w\in U\setminus\phi^{-1}(N)}\left\{\frac{\|C_\phi^*(k_w)\|}{\|k_w\|}\right\} \\ S_\phi &= \sup_{w\in U\setminus N}\{\|C_\phi(\mathcal{K}_w)\|\} = \sup_{w\in U\setminus N}\left\{\frac{\|C_\phi(k_w)\|}{\|k_w\}}\right\} \end{aligned}$$

فصل ۱

در این فصل با مطرح کردن سوالات کاون و مک کلر و پاسخگویی به آن‌ها روند محاسبه نرم عملگرهای ترکیبی را روی فضای توابع تحلیلی پایه‌گذاری می‌کنیم.

۱—۱ مقایسه کمیت‌های S_ϕ و S^*_ϕ با نرم عملگر ترکیبی روی فضای هاردی $H^۲$

سوال ۱: چه زمانی می‌توان نرم عملگر ترکیبی C_ϕ بر روی فضای کلاسیک هاردی $H^۲$ را به کمک عمل C_ϕ یا الحاقی آن، C^*_ϕ، بر روی مجموعه هسته‌های مولد نرمال $H^۲$ تعیین کرد.

سوال کاون و مک کلر می‌تواند به صورت زیر نیز مطرح شود.

فرض می‌کنیم که ϕ یک نگاشت تحلیلی از U به روی خودش باشد چه زمانی نرم عملگر ترکیبی C_ϕ با کمیتهای زیر معادل می‌باشد $S^*_\phi = \sup\{\|C^*_\phi(\mathcal{K}_\alpha)\| : \alpha \in U\}$ یا $S_\phi = \sup\{\|C_\phi(\mathcal{K}_\alpha)\| : \alpha \in U\}$، جایی که $\|\cdot\|$ نشانگر نرم فضای $H^۲$ می‌باشد.

سوال ۲: آیا نگاشت تحلیلی ϕ از دیسک یکه بتوی خودش وجود دارد به طوری که که بر روی $H^۲$

$$\|C_\phi\| > \sup \frac{\|k_{\phi(w)}\|}{\|k_w\|}$$

قضیه ۱.۱: برای هر نگاشت تحلیلی دلخواه ϕ از U بتوی خودش، $S^*_\phi \le S_\phi$

برهان: فرض کنید $\alpha \in U$، داریم

$$\begin{aligned}
\|C^*_\phi(\mathcal{K}_\alpha)\| &= \frac{\|C^*_\phi(k_\alpha)\|}{\|k_\alpha\|} = \frac{\|k_{\phi(\alpha)}\|}{\|k_\alpha\|}\\
&= \frac{\sqrt{۱-|\alpha|^۲}}{\sqrt{۱-|\phi(\alpha)|^۲}} = (\sqrt{۱-|\alpha|^۲})(\sqrt{۱-|\phi(\alpha)|^۲})\frac{۱}{۱-|\phi(\alpha)|^۲}\\
&= (\sqrt{۱-|\alpha|^۲})(\sqrt{۱-|\phi(\alpha)|^۲})|k_{\phi(\alpha)}(\phi(\alpha))|\\
&= \underbrace{(\sqrt{۱-|\alpha|^۲})(\sqrt{۱-|\phi(\alpha)|^۲}}_{A}\langle k_{\phi(\alpha)}, k_{\phi(\alpha)}\rangle = A(\langle k_{\phi(\alpha)}, C^*_\phi(k_\alpha)\rangle) = A(\langle C_\phi k_{\phi(\alpha)}, k_\alpha\rangle)\\
&\le A\|C_\phi k_{\phi(\alpha)}\|\|k_\alpha\| = \|C_\phi \mathcal{K}_{\phi(\alpha)}\|
\end{aligned}$$

چون $\alpha \in U$ دلخواه می‌باشد.

$\|C_\phi\|$ همواره بزرگتر یا مساوی S_ϕ^* می‌باشد. ما به دنبال این هستیم که یک مثال پیدا کنیم تا جواب سوال (۲) بله باشد.

لم ۲.۱: اگر $\phi : D \longrightarrow D$ یک نگاشت تحلیلی غیرثابت باشد بطوریکه $\phi(\circ) \neq \circ$ آنوقت داریم:

$$\|C_\phi : H^۲ \longrightarrow H^۲\| > \frac{۱}{۱ - |\phi(\circ)|^۲}$$

برهان:

اولاً فرضیات لم ضمانت می‌کند که $k_{\phi(\circ)} o \phi$ غیرثابت باشد. همچنین داریم:

$$k_\circ(z) = \frac{۱}{۱ - \circ z} = ۱ \quad , \quad \|k_\circ\| = \frac{۱}{\sqrt{۱ - |\circ|^۲}} = ۱$$

پس:

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۱ - |\phi(\circ)|^۲} &= |(k_{\phi(\circ)} o \phi)(\circ)| = \langle C_\phi(k_{\phi(\circ)}), k_\circ \rangle \\ &< \|C_\phi k_{\phi(\circ)}\| \|k_\circ\| \leq \|C_\phi\| \end{aligned}$$

قضیه ۳.۱: (لیتوود)[۱]

فرض کنیم ϕ یک نگاشت تحلیلی از U بر روی خودش باشد آنوقت C_ϕ یک عملگر کراندار بر روی $H^۲$ می‌باشد و $\|C_\phi\| \leq \sqrt{\frac{۱ + |\phi(\circ)|}{۱ - |\phi(\circ)|}}$

برهان: [۲۳].

حال با تلفیق لم ۲.۱ و قضیه ۳.۱ می‌توان یک قضیه به صورت زیر عنوان کرد.

قضیه ۴.۱: فرض کنیم ϕ نگاشتی از U بتوی خودش باشد در اینصورت داریم:

$$\frac{۱}{۱ - |\phi(\circ)|^۲} \leq \|C_\phi\|^۲ \leq \frac{۱ + |\phi(\circ)|}{۱ - |\phi(\circ)|}$$

قضیه قبل نشان می‌دهد که اگر $\phi(\circ) = \circ$ آنوقت $\|C_\phi\| = ۱$. چون زمانی که $\phi(\circ) = \circ$ داریم $\|k_\circ\| = \|k_{\phi(\circ)}\|$ بنابراین در جهت یافتن پاسخ مثبت برای سوال ۲ بایستی دنبال مثالهایی باشیم که

---

[۱] Littlewood's Theorem

$\phi(\circ) \neq \circ$ باشد.

قضیه ۵.۱: فرض کنید ϕ داخلی باشد آنوقت $\|C_\phi\|^{۲} = \frac{۱+|\phi(\circ)|}{۱-|\phi(\circ)|}$

برهان: [۲]

پس با توجه به مطلب گفته شد می‌توان نتیجه گرفت که برای بدست آوردن مثال نقض که بتواند به پرسش مطرح شده جواب آری بدهد بایستی بدنبال یک نگاشت غیریک به یک باشیم.

مثال زیر را در نظر می‌گیریم

$$\phi(z) = \Big(\frac{\frac{۱}{۲} - z}{۱ - \frac{۱}{۲}z}\Big)^{۲}$$

که غیر یک به یک و داخلی می‌باشد. پس داریم

$$\|C_\phi\|^{۲} = \frac{۱+|\phi(\circ)|}{۱-|\phi(\circ)|} = \frac{۵}{۳}$$

قضیه ۶.۱: برای $\phi(z) = \Big(\frac{\frac{۱}{۲} - z}{۱ - \frac{۱}{۲}z}\Big)^{۲}$ داریم $\|C_\phi\| > \sup_{w\in U} \frac{\|k_{\phi(w)}\|}{\|k_w\|}$.

برهان: اگر قرار دهیم $L_\phi(w) = \frac{\|k_{\phi(w)}\|}{\|k_w\|}$ آنوقت بایستی نشان دهیم که $\sup_{w\in U} L_\phi(w) < \frac{۵}{۳}$. فرض می‌کنیم $w = re^{i\theta}$ فرم قطبی w باشد، تعریف $L_\phi(w)$ را بکار برده و رابطه زیر را بدست می آوریم

$$L_\phi^{۲}(w) = \frac{۱ - |r|^{۲}}{۱ - \Big|\frac{\frac{۱}{۲} - re^{i\theta}}{۱ - \frac{۱}{۲}re^{i\theta}}\Big|^{۴}}$$

یادآوری می‌کنیم که $r \in [\circ, ۱)$ و در تساوی فوق r را ثابت در نظر می‌گیریم.

توجه کنید که نگاشت خطی کسری $z \longrightarrow \frac{\frac{۱}{۲} - z}{۱ - \frac{۱}{۲}z}$ دایره $\{re^{i\theta} : \theta \in [\circ, ۲\pi]\}$ را به دایره‌ای می‌برد که قطر آن بر روی محور حقیقی بین نقاط $\frac{\frac{۱}{۲} - r}{۱ - \frac{۱}{۲}r}$ و $\frac{\frac{۱}{۲} + r}{۱ + \frac{۱}{۲}r}$ قرار می‌گیرد پس ماکزیمم $L(re^{i\theta})$ برابر می‌شود با:

$$\frac{۱ - |r|^{۲}}{۱ - \Big|\frac{\frac{۱}{۲} + r}{۱ + \frac{۱}{۲}r}\Big|^{۴}} = \frac{(۲+r)^{۴}}{۳(۵ + ۸r + ۵r^{۲})}$$

سمت راست تساوی بالا تابعی صعودی از r بوده و زمانی که $r \longrightarrow ۱$ به مقدار $\frac{۳}{۲}$ افزایش می‌یابد پس:

$$\sup_{w\in U} L_\phi^{۲}(w) = \frac{۳}{۲} < \frac{۵}{۳} = \|C_\phi\|^{۲}$$

با اثبات قضیه فوق در واقع توانستیم پاسخی به سوال کاون و مک کلر بدهیم که بطور عمومی نمی‌توان نرم یک عملگر ترکیبی روی فضای کلاسیک هاردی را از عمل الحاقی عملگر بر روی هسته‌های مولد بدست آورد. اما این ما را ترغیب می‌کند که بدانیم تحت چه شرایطی و چه زمانی این کمیتها با هم برابر خواهند بود.

۱—۲ محاسبه نرم عملگر ترکیبی با نگاشت مولد داخلی

قبل از اینکه به بررسی شرایط تساوی مورد نظر بپردازیم قضیه‌ای را مطرح خواهیم کرد که به طور عمومی سوال ۲ کاون و مک کلر را پاسخ دهد.

قضیه ۷.۱: فرض کنید که ϕ یک تابع داخلی باشد که یک همریختی از U نیست و $\phi(0) \neq 0$. آنگاه:

$$\|C_\phi\| > S_\phi^*$$

برهان:

فرض کنید $\tau(z) = \dfrac{\phi(0) - z}{1 - \overline{\phi(0)}z}$ که τ همریختی از U است و خود برابر معکوسش می‌باشد و $\phi(0)$ را به ۰ می‌برد. توجه کنید که $\tau o \phi$ نگاشتی از U بتوی خودش می‌باشد که ۰ را ثابت نگه دارد. چون ϕ اتومورفیسم U نیست، $\tau o \phi$ نگاشت دوران نخواهد بود. حال داریم:

$$\liminf_{|z| \longrightarrow 1^-} \frac{1 - |\tau(\phi(z))|^2}{1 - |z|^2} = \liminf_{|z| \longrightarrow 1^-} \frac{1 - |\tau(\phi(z))|}{1 - |z|}$$

طبق لم شوارتز $|f(z)| \leq |z|$، $(z \in U)$ پس بطور کلی حد پایین بزرگتر یا مساوی با ۱ خواهد بود. بوسیله لم ۷.۳۳ از [۸] مقدار واقعی حد پایین ۱ خواهد شد. پس یک مقدار ثابت $C > 1$ وجود دارد و همچنین یک r که $0 < r < 1$ به قسمتی که برای کلیه zهایی که بین دو دایره هم‌مرکز قرار می‌گیرند $A := \{z : r < |z| < 1\}$، $C < \dfrac{1 - |\tau(\phi(z))|^2}{1 - |z|^2}$ با یک محاسبه استاندارد می‌توان نشان داد که:

$$1 - |\tau(\phi(z))|^2 = \frac{(1 - |\phi(z)|^2)(1 - |\phi(0)|^2)}{|1 - \overline{\phi(0)}\phi(z)|^2}$$