دانشگاه سیستان و بلوچستان

تحصیلات تکمیلی

**پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی- گرایش آنالیزعددی**

**عنوان:**

# موضع یابی مقادیر ویژه تعمیم یافته

**استاد راهنما:**

## دکتر پرویزسرگلزائی

**تحقیق و نگارش:**

## زکیه عباسی

**خرداد ۱۳۹۲**

بسم الله الرحمن الرحیم

بسمه تعالی

این پایان نامه با عنوان موضع یابی مقادیر ویژه تعمیم یافته قسمتی از برنامه آموزشی دوره کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی-آنالیزعددی توسط دانشجو زکیه عباسی تحت راهنمایی استاد پایان نامه دکتر پرویز سرگلزایی تهیه شده است. استفاده از مطالب آن به منظور اهداف آموزشی با ذکر مرجع و اطلاع کتبی به حوزه تحصیلات تکمیلی دانشگاه سیستان وبلوچستان مجاز می باشد.

**زکیه عباسی**

این پایان نامه واحد درسی شناخته می شود ودر تاریخ توسط هیئت داوران بررسی و درجه به آن تعلق گرفت.

استاد راهنما دکتر پرویز سرگلزایی

استاد مشاور -

داور ۱ دکتر مریم عرب عامری

داور ۲ دکتر حسن رضایی

نماینده تحصیلات تکمیلی دکتر اکبر گلچین

## تعهدنامه اصالت اثر

اینجانب زکیه عباسی تأیید می کنم که مطالب مندرج در این پایان نامه حاصل کار پژوهشی اینجانب است و به دستاوردهای پژوهشی دیگران که در این نوشته از آن استفاده شده است مطابق مقررات ارجاع گردیده است. این پایان نامه پیش از این برای احراز هیچ مدرک هم سطح یا بالاتر ارائه نشده است.

**کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به دانشگاه سیستان و بلوچستان می باشد.**

**نام و نام خانوادگی دانشجو: زکیه عباسی**
**امضا:**

تقدیم به دوست عزیزم:

# باران

## سپاس گزاری . . .

سپاس می گویم خداوند مهربان را که الطاف بیکرانش را از من دریغ نکرد و رهنمون هایش را در سایه ادب و کمالات اساتید و پیشکسوتان علم و معرفت به من ارزانی داشت. امید آن دارم که با لطف و عنایت خویش رهروی صادق برای راهش و خادمی برای خلقش باشم. در این میان شایسته و بایسته است که از حمایت ها و راهنمایی های استاد دانش و ادب جناب آقای دکتر پرویز سرگلزائی که قطعا مطمئن ترین تکیه گاه علمی در درج این پایان نامه بودند، قلبا کمال تشکر و عرض ارادت نمایم. هم اوست که در پیچ و خم مشکلات این پایان نامه و زندگانی سخنانش همواره چون دری غلتان، روشنگر و رهرو بوده است.
همچنین از اساتید محترم و ارجمند سرکار خانم دکتر عرب عامری و جناب آقای دکتر رضایی که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را برعهده گرفتند صمیمانه تشکر می کنم.
در نهایت سپاس و مراتب تشکر را نثار کلیه اساتید محترم گروه ریاضی دانشگاه سیستان و بلوچستان می کنم که در دوران تحصیل بنده زحمات فراوانی کشیده اند و برای این عزیزان آرزوی موفقیت می نمایم.

**زکیه عباسی خرداد ۱۳۹۲**

# چکیده

در این پایان نامه چندین روش موضع یابی مقادیر ویژه برای یک جفت ماتریس معرفی می شود و تعمیم یافته های مقادیر ویژه از راه معروف گرشگورین مینیمال و تعمیم یافته ی آن بدست می آید. بخصوص روش های محاسبه و رسم برای مجموعه های موضع یابی بدست آمده از یک جفت ماتریس نشان داده می شود. مطالبی که به آنها پرداخته می شود بیشتر در مورد ماتریس های نامنفی، ماتریس های اکیدا غالب قطری، $H$ ماتریس و $M$ ماتریس است و با مثال های عددی کاربرد نتایج بررسی می شود.

**واژگان کلیدی:** مجموعه گرشگورین، قضیه گرشگورین، مقادیر ویژه تعمیم یافته، موضع یابی مقادیر ویژه، ماتریس مداد

# فهرست مطالب

# فهرست شکل ها

# فصل اول

# تعاریف و قضایا

## ۱.۱ مقدمه

این فصل شامل تعاریف وقضایای لازم بردارها، ماتریس ها، روابط مربوط به آنها و مقادیر ویژه معمولی و مختلط است. در تعاریف این فصل از منابع [۱, ۲, ۵, ۶, ۱۰, ۱۱, ۱۷] استفاده شده است.

## ۲.۱ تعاریف

**تعریف ۱.۲.۱.** فرض کنیم $A$ یک ماتریس مربعی از مرتبه ی $n$ باشد. اسکالر مختلط $\lambda$ را مقدار ویژه ی $A$ گوییم اگر یک بردار مخالف صفر از $\mathbb{C}^n$ مانند $X$ موجود باشد به طوریکه $AX = \lambda X$. بردار $X$ را بردار ویژه $A$ نظیر مقدار ویژه $\lambda$ می نامند.

**تعریف ۲.۲.۱.** ماتریس $A = [a_{ij}]$ با ابعاد $n \times n$ را اکیداً غالب قطری گوییم هرگاه:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=۱ \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \quad \forall i = ۱, \ldots, n.$$

**تعریف ۳.۲.۱.** دو ماتریس $A$، $B$ را متشابه گوییم هرگاه ماتریس معکوس پذیری مانند $S$ موجود باشد بطوری که:

$$S^{-۱}AS = B$$

دو ماتریس متشابه، اثر و دترمینان یکسان دارند زیرا مقادیر ویژه ی یکسانی دارند. لازم به ذکر است اثر یک ماتریس برابر مجموع مقادیر ویژه است.

**تعریف ۴.۲.۱.** اگر $\sigma(A)$ مجموع همه مقادیر ویژه $A$ باشد شعاع طیفی ماتریس $A$ را با $\rho(A)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\rho(A) = max_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|.$$

**تعریف ۵.۲.۱.** ماتریس های $A, B \in \mathbb{C}^{n,n}$ با شرط $n \geq ۱$ داده شده است.
خانواده ماتریس های $A - zB$ با پارامتر مختلط $z$، یک دسته ماتریس نامیده می شود. همچنین

به عنوان جفت ماتریس نیز شناخته شده است. در فضای ماتریسی $\mathbb{C}^{n,n}\times\mathbb{C}^{n,n}$ مرتبه مجموعه همه جفت ماتریس های مربعی، $n$ است.

**تعریف ۶.۲.۱.** یک جفت ماتریس $(A,B)$ منظم گفته می شود اگر $det(A-zB)$ متحد با صفر نباشد و در سایر موارد منفرد نامیده می شود. یک شرط کافی برای منفرد بودن یک جفت ماتریس وجود یک بردار غیر صفر $x$ است بطوریکه برای هر $z\in\mathbb{C}$، $(A-zB)x=0$ شود. این شرط کافیست اما لازم نیست.

مثال زیر این مطلب را صریح تر نشان می دهد.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظه می شود که بردار غیر صفری وجود ندارد که $(A-zB)x=0$ شود اما جفت ماتریس $(A,B)$ منفرد است.

**تعریف ۷.۲.۱.** اگر جفت ماتریس $(A,B)$ مرتب باشد آنگاه:

$$det(A-zB)=P(z) \tag{1.1}$$

است که $P(z)$ یک چند جمله ای برحسب $z$ و از درجه حداکثر $n$ هست.

**تعریف ۸.۲.۱.** برای جفت ماتریس $(A,B)$ اگر $\lambda\in\mathbb{C}$ ای وجود داشته باشد بطوریکه $P(\lambda)=0$ باشد یعنی $det(A-\lambda B)=0$ شود آنگاه $\lambda$ را مقدار ویژه تعمیم یافته متناهی برای جفت ماتریس $(A,B)$ می نامیم و یک بردار غیر صفر $v\in\mathbb{C}$ وجود دارد که $Av=\lambda Bv$، در این جا $v$ بردار ویژه تعمیم یافته جفت ماتریس $(A,B)$ نامیده می شود، علاوه بر این اگر

$0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ وجود داشته باشد بطوریکه $Bv = 0$ اما $Av \neq 0$ باشد آنگاه $\lambda = \infty$ و طبق $Av = \lambda Bv$، $\lambda$ مقدار ویژه نامتناهی $(A,B)$ نامیده می شود و مجددا $v$ بردار ویژه متناظر آن است.

جمله مقدار ویژه هم برای مقادیر متناهی و هم برای مقادیر نامتناهی بکار می رود.
با داشتن جفت ماتریس منظم $(A,B)$، $\lambda$ مقدار ویژه متناهی $(A,B)$ است اگر و تنها اگر $A - \lambda B$ ماتریسی منفرد باشد یعنی $det(A - \lambda B) = 0$. برای جفت ماتریس منظم $(A,B)$ که $det(A - zB) = P(z)$ با $P(z) \neq 0$ است، درجه چند جمله ای $P(z)$، $n$ است اگر و تنها اگر $B$ نامنفرد باشد. این نتیجه می دهد که اگر $B$، منفرد باشد آنگاه درجه $P(z)$، $r$ است با $r < n$. بنابراین تعداد مقادیر ویژه متناهی $(A,B)$، $r$ است و مجددا قرارداد می کنیم که $n - r$ مقدار ویژه باقی مانده $\infty$ باشد. اگر $B = I_n$ که $I_n$ ماتریس همانی از مرتبه $n$ باشد، چند جمله ای $P(z)$ در (۱.۱) به صورت $P(z) = det(A - zI_n)$ است. پس همه $n$ تا صفرش مقادیر ویژه ی $A$ هستند. مقادیر ویژه جفت ماتریس ها را مقادیر ویژه تعمیم یافته و بردار های ویژه متناظر آنها را بردار های ویژه تعمیم یافته می نامیم.

**تعریف ۹.۲.۱.** مجموعه همه ی مقادیر ویژه جفت ماتریس $(A,B)$ (طیف دسته ماتریس نیز نامیده می شود) بصورت زیر نشان داده می شود:

$$\sigma(A,B) = \{z \in \mathbb{C}; \quad det(A - zB) = 0\} \tag{۲.۱}$$

به وضوح اگر $B = I_n \in \mathbb{C}^{n,n}$ آنگاه طیف جفت ماتریس $(A,B)$ به طیف استاندارد $A$ تبدیل می شود. همچنین اگر $B$ نامنفرد باشد به آسانی ملاحظه می شود که؛

$$det(A - B) = det(B^{-1}A - zI_n) = 0$$

بنابراین در این حالت طیف جفت ماتریس $(A,B)$ به طیف $B^{-1}A$ تبدیل می شود.
تعریف های بسیاری برای $M$ ماتریس ها وجود دارد اما تعریف زیر در اینجا مناسب ترین

است.

**تعریف ۱۰.۲.۱.** یک ماتریس حقیقی $n \times n$، $A$ بصورت $A = SI - B$ داده شده است به طوریکه $B$ در $\mathbb{R}^{n,n}$ همه ی درایه های غیر منفی را داراست. فرض کنید:

$$\rho(B) = max\{|\lambda|;\ \lambda \in \sigma(B)\}$$

که $\rho(B)$ نشان دهنده ی شعاع طیفی $B$ است. بنابراین ماتریس $A$، $M$ ماتریس نامیده می شود اگر $\rho(B) \leq S$ باشد و $A$ یک $M$ ماتریس نامنفرد است اگر $\rho(B) < S$ باشد.

**تعریف ۱۱.۲.۱.** یک ماتریس مختلط $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ داده شده است آنگاه ماتریس $< A >= [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n,n}$ ماتریس همسنجش برای $A$ نامیده می شود اگر برای هر $۱ \leq i, j \leq n$:

$$m_{ij} = \begin{cases} |a_{ii}| & i = j \\ -|a_{ij}| & i \neq j \end{cases} \tag{۳.۱}$$

**تعریف ۱۲.۲.۱.** ماتریس نامنفی ماتریس $A = [a_{ij}]$ مفروض است. اگر $O$ یک ماتریس صفر باشد و $A \geq O(> O)$ آنگاه گوییم $A$ یک ماتریس نامنفی (مثبت) است.

**تعریف ۱۳.۲.۱.** ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ مفروض است. فرض کنید $v_۱, v_۲, \ldots, v_n$، $n$ نقطه ی متمایز دلخواه باشد که آن ها را رئوس می نامیم. برای هر درایه غیرصفر $a_{ij}$ از $A$، اتصال رأس $v_i$ به رأس $v_j$ را با کمان جهت دار $\overrightarrow{(v_i, v_j)}$ نشان می دهیم. اگر $a_{ii} \neq ۰$ باشد، $\overrightarrow{(v_i, v_i)}$ یک حلقه نامیده می شود.

همه ی این کمان های جهت دار، گراف جهت دار نامیده می شود که با $G(A)$ نمایش می دهیم.

**تعریف ۱۴.۲.۱.** یک مجموعه از کمان های جهت دار به صورت

$$\overrightarrow{(v_i, v_{i+1})}, \overrightarrow{(v_{i+1}, v_{i+2})}, \ldots, \overrightarrow{(v_{j-1}, v_j)}$$

یک مسیر جهت دار در گراف $G(A)$ نامیده می شود که $v_i$، رأس اولیه و $v_j$، رأس انتهایی است.

**تعریف ۱۵.۲.۱.** گراف جهت دار $G(A)$ از ماتریس $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$، همبند قوی نامیده می شود اگر برای هر جفت از رأس های $v_j$ و $v_i$، با رأس اولیه ی $v_i$ و رأس انتهایی $v_j$، یک مسیر جهت دار در $G(A)$ وجود داشته باشد.

**تعریف ۱۶.۲.۱.** برای ماتریس داده شده ی $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n\times n}$، فرض کنید $\{v_n, \ldots, v_2, v_1\}$ نقاط رأسی باشند. برای هر درایه غیرصفر $a_{ij}$، رأس $v_i$ را به رأس $v_j$ وصل می کنیم.گراف حاصل را یک گراف دوری می نامند.

**تعریف ۱۷.۲.۱.** ماتریس $A \geq O$ مفروض است اگر گراف دوری ماتریس را تشکیل دهیم و تعداد دورهای آن را محاسبه کنیم، اگر بزرگترین مقسوم علیه مشترک تعداد دورها، عدد یک باشد ماتریس را اولیه گوییم.

**تعریف ۱۸.۲.۱.** فرض کنید $A$ و $B$ ماتریس های $m \times n$ با مرتبه ی یکسان باشند. یک مجموعه از ماتریس ها به صورت $A - \lambda B$ را ماتریس مداد یا بطور ساده مداد می نامیم. $\lambda$ یک عدد مختلط است. این مجموعه را جفت ماتریس های $(A, B)$ نیز می نامیم.

**تعریف ۱۹.۲.۱.** مجموعه $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ستاره گون گفته می شود اگر

۱. شامل مبدا باشد.

۲. برای هر خطی مانند $l$ گذرنده از مبدا، مجموعه $A \cap l$ یک بازه بسته باشد [۱۱].

**تعریف ۲۰.۲.۱.** اگر دورهای $G(A)$ را با $\gamma$ نشان دهیم، دور قوی $\gamma$ در $G(A)$ دنباله ای مانند $\{i_j\}_{j=1}^{p}$ از اعداد صحیح است بطوری که $p \geq 2$. اعضای $\{i_j\}_{j=1}^{p}$ متمایزند و $i_1 = i_{p+1}$.
همچنین $\overrightarrow{V_{l_1}V_{l_2}}$،...،$\overrightarrow{V_{l_p}V_{l_{p+1}}}$ کمان های $G(A)$ هستند.
نتیجه می گیریم همه ی درایه های متناظر ماتریس $A$ یعنی $a_{i_1i_2}$،...،$a_{i_pi_{p+1}}$ غیر صفرند. فرم استاندارد دور قوی نیز به صورت زیر بیان می شود:

$$\gamma = (i_1 i_2 \dots i_p)$$

که $i_1$،...،$i_p$ اعداد صحیح متمایزی از مجموعه $N$ هستند.

**تعریف ۲۱.۲.۱.** اگر راس $V_i$ ای از گراف $G(A)$ وجود داشته باشد به طوریکه هیچ دور قوی ای از آن نگذرد، دور $\gamma = (i)$ را یک دور ضعیف می نامیم.

**تعریف ۲۲.۲.۱.** ماتریس $A$ را نرمال گوییم هرگاه:

$$AA^* = A^*A$$

بطوریکه:

$$A^* = (\bar{A})^T.$$

## ۳.۱ قضایا

**قضیه ۱.۳.۱.** (شور[1]) *اگر $A$ ماتریسی مختلط با ابعاد $n\times n$ و مقادیر ویژه ی آن $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ باشد، آنگاه ماتریس یکانی $U$ موجود است بطوری که:*

$$U^*AU = T$$

*که در آن $T$ یک ماتریس بالا مثلثی می باشد که عناصر قطری آن را $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ تشکیل می دهد.*

[1] Schur

**برهان.** به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

**قضیه ۲.۳.۱.** *(پرون ـ فروبنیوس[۲]) اگر $A$ یک ماتریس حقیقی تحویل ناپذیر باشد به طوریکه $A \geq O$ باشد، آنگاه:*

۱. *ماتریس $A$ یک مقدار ویژه ی حقیقی مثبت برابر با شعاع طیفی اش $(\rho(A))$ دارد.*

۲. *یک بردار $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T > 0$ برای $\rho(A)$ وجود دارد.*

۳. *با افزایش درایه های ماتریس $A$، $\rho(A)$ نیز افزایش می یابد.*

۴. *$\rho(A)$ یک مقدار ویژه ی ساده ی $A$ است.*

۵. *مقدار ویژه ی $\rho(A)$ از ماتریس $A$ در رابطه ی زیر صدق می کند.*

$$\sup_{X>0}\left\{\min_{i\in N}\left[\frac{\sum_{j\in N} a_{i,j}x_j}{x_i}\right]\right\} = \rho(A) = \inf_{X>0}\left\{\max_{i\in N}\left[\frac{\sum_{j\in N} a_{i,j}x_j}{x_i}\right]\right\}$$

**برهان.** به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

**لم ۳.۳.۱.** *(نامساوی هولدر[۳]) اگر $1/p + 1/q = 1$ و $x_i, y_i \geq 0$ باشد، در این صورت:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^q\right)^{1/q}$$

**قضیه ۴.۳.۱.** *$A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n,n}$ یک $H$ ماتریس نامیده می شود، اگر همسنجش ماتریس $A$ یعنی $< A >$ یک $M$ ماتریس باشد و بطور مشابه $A$ یک $H$ ماتریس نامنفرد نامیده می شود اگر $< A >$ یک $M$ ماتریس نامنفرد باشد.*

[۲] Peron-Ferubinous
[۳] Holder

**برهان.** به مرجع [۱] صفحه ی ۲۰۳ مراجعه کنید. □

**قضیه ۵.۳.۱.** *(لوی دیز پلنکاس[۴]) فرض کنید $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}$ با $n\geq ۲$ باشد بطوری که:*

$$|a_{ii}|>r_i(A)\quad \forall i\in N=\{۱,\ldots,n\} \tag{۴.۱}$$

*که $r_i(A)$ مجموع سطر محذوف مطلق $i$–ام $A$ (حذف داریه $i$ام) تعریف می شود یعنی:*

$$r_i(A)=\sum_{j\in N/\{i\}}|a_{ij}|\quad \forall i\in N, \tag{۵.۱}$$

*آنگاه $A$ یک ماتریس نامنفرد است.*

**برهان.** به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

**قضیه ۶.۳.۱.** *(نامساوی شور) اگر $A$ ماتریس مختلط با ابعاد $n\times n$ باشد آنگاه:*

$$\sum_{i=۱}^{n}|\lambda_i|^{۲}\geq ||A||^{۲} \tag{۶.۱}$$

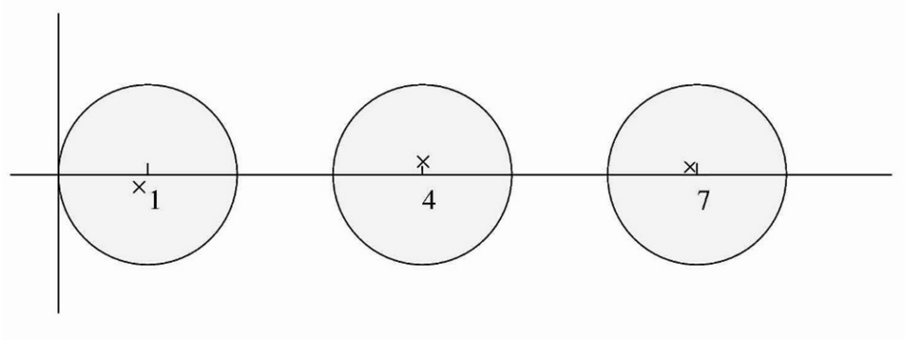
*تساوی برقرار است اگر و تنها اگر $A$ نرمال باشد.*

**برهان.** به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

**قضیه ۷.۳.۱.** *ماتریس $A=[a_{ij}]\in\mathbb{C}^{n,n}$ مفروض است. آنگاه ماتریس $A$ تحویل ناپذیر (ساده نشدنی) است اگر و تنها اگر گراف جهت دار $G(A)$ همبند قوی باشد.*

**برهان.** به مرجع [۱] مراجعه کنید. □

[۴] L' evy-Desplanqeus




شکل ۱.۱: دوایر گرشگورین

**مثال ۸.۳.۱.** برای ماتریس داده شده زیر داریم:

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & i & ۰ \\ \frac{۱}{۲} & ۴ & \frac{i}{۲} \\ ۱ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$r_۱ = ۱, \qquad r_۲ = ۱, \qquad r_۳ = ۱,$$

$$D_۱ = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - ۱| \leq ۱\},$$

$$D_۲ = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - ۴| \leq ۱\},$$

$$D_۳ = \{z \in \mathbb{C} : \quad |z - ۷| \leq ۱\}$$

مقادیر ویژه عبارتند از:

$$۹۶۴۱ - ۰/۱۶۲۰i, \quad ۴/۰۶۴۱ + ۰/۱۶۲۰i, \quad ۶/۹۷۱۸ - ۰/۰۰۰۸i$$

که دوایر بدست آمده در شکل ۱.۱ رسم شده اند.

**قضیه ۹.۳.۱.** *(گرشگورین[5] ۲) فرض کنیم $n \geq ۲$، $۱ \leq p \leq n - ۱$ و نیز دایره های گرشگورین ماتریس $A \in \mathbb{C}^{n,n}$ را بتوان به دو مجموعه ی جدا از هم $D^{(p)}$ و $D^{(q)}$ نوشت که*

[5] Gerschgorin