دانشگاه فردوسی مشهد

دانشکده مهندسی برق

پایان نامه دکتری در گرایش برق - کنترل

# تخمین و گسترش ناحیه جذب سیستمهای غیر خطی

اساتید راهنما:

آقای دکتر ناصر پریز

آقای دکتر حسن مدیر شانه چی

استاد مشاور:

آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد

تهیه کننده:

ریحانه کاردهی مقدم

دی ماه 1389

# سپاس و قدردانی

اکنون که به یاری پروردگار مهربانم توانسته ام نگارش این پایان نامه را به اتمام برسانم بر خود لازم میدانم از اساتید ارجمند و دوستان عزیزی که مرا یاری رسانده اند و همواره مشوق و راهنمایم بودهاند تشکر کنم.

از اساتید گرانقدرم آقای دکتر ناصر پریز و آقای دکتر حسن مدیر شانه چی که راهنماییهای ارزنده شان همواره روشنی بخش راه من بوده است بسیار سپاسگزارم و بسیار خشنودم که افتخار دانش آموزی در محضر علم و ادب این دو استاد فرهیخته را دارم. همچنین از آقای دکتر علی وحیدیان کامیاد استاد ارجمندم که همواره صبورانه و با خوشرویی مرا از راهنمایی های ارزنده شان بهره مند کردند خاضعانه قدردانی می کنم. بسیار مفتخرم که پایان نامه اینجانب توسط اساتید محترم و بزرگوارم آقای دکتر حائری (دانشگاه شریف)، آقای دکتر جاهد مطلق (دانشگاه علم و صنعت)، آقای دکتر اکبرزاده و آقای دکتر کریم پور (دانشکده مهندسی- فردوسی مشهد) مورد ارزیابی قرار گرفت و از ایشان برای راهنمایی های اندیشمندانه شان بسیار متشکرم. از خانم دکتر فاطمه هلن قانع (دانشکده ریاضی- دانشگاه فردوسی) برای راهنماییهای دلسوزانه شان و معرفی مراجع مناسب بسیار سپاسگزارم.

ازهمکاران و دوستان ارجمندم آقای محمد کاظم انوری، آقای ابراهیم حاجی آبادی، خانم نجمه اقبال، آقای محمد جوادی، آقای احسان رضوی، خانم فاطمه تحققی، آقای مهدی مقدم و خانم آتنا مقدم که از همفکری و نظرات ارزنده شان بهره فراوان بردم بسیار متشکرم.

از دو یار دلسوز و مهربانم، پدر و مادر عزیزم، که در تمام مراحل زندگی ام وجودشان به من دلگرمی، عشق و شهامت مقابله با مشکلات را میدهد سپاسگزارم.

در پایان از خالق یکتا برای تمامی این عزیزان موفقیت، سلامتی و آرامش را آرزو میکنم.

ریحانه کاردهی مقدم

# چکیده

با توجه به اینکه دنیای پیرامون ما مجموعه ای از سیستمهای غیر خطی میباشد، شناخت این سیستمها و بررسی رفتار آنها امری ضروری است. در بررسی اولیه پایداری یک سیستم غیر خطی تنها به پایداری مجانبی سیستم حول نقطه تعادل توجه میشود، اما در بررسی موشکافانهتر، تعیین ناحیه جذب یا به عبارتی تعیین قابلیت سیستم در مقابله با بروز خطا و بازگشت به حالت اولیه، بسیار مهم است. با توجه به اهمیت تعیین ناحیه جذب در کنترل سیستمهای غیر خطی، این مسئله از دیر باز مورد توجه قرار گرفته و علی رغم کوششهای فراوانی که در این زمینه انجام شده است، ارائه روشی دقیق، کارآمد و تا حد امکان ساده برای تخمین ناحیه جذب، همچنان مورد توجه مجامع علمی است.

در این رساله پس از مرور و مقایسه روشهایی که تا کنون برای تخمین یا توسیع ناحیه جذب ارائه شده، روشهایی نوین برای دستیابی به اهداف زیرمطرح خواهد شد:

۱ –ارائه روشی جدید برای تخمین ناحیه جذب که در مقایسه با روشهای قبل، شامل مزایایی چون قابلیت استفاده برای کلاس بزرگی از سیستمهای غیر خطی، ارائه روش در قالب یک الگوریتم عددی ساده و همگرا به ناحیه جذب واقعی و امکان محاسبه خطا می باشد.

۲ –بیان مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب در قالب یک مسئله کنترل بهینه و ارائه روشهایی ریاضی برای محاسبه پاسخ بهینه این مسئله

در مراجعی که تا کنون به مسئله توسیع ناحیه جذب پرداختهاند کنترل کننده با هدف توسعه یکنواخت ناحیه جذب حول نقطه تعادل طراحی میشود. در این رساله مسئله توسعه با دیدی متفاوت بررسی می شود و راستاهای انحراف سیستم از نقطه تعادل پس از بروزخطا شناسایی می شود و توسعه در این راستاها صورت می گیرد. در این صورت سیستم غیر خطی ضمن تحمل اختلالهای بزرگتر، فرصت بیشتری برای رفع اختلال خواهد داشت و این امر موجب صرف هزینه کنترلی کمتری است.

۳ –استفاده از گسترش جهت دار ناحیه جذب برای افزایش زمان بحرانی رفع خطای سیستمهای قدرت

٤ –تخمین ناحیه جذب مقاوم با استفاده از اندازه پایا. در این رساله با مدلسازی مارکوف سیستمهای غیر خطی و استفاده از اندازه پایا به عنوان معیار پایداری سیستم، مسئله گسترش ناحیه جذب و تخمین ناحیه جذب مقاوم در قالب مسائل بهینه سازی استاندارد بیان و حل شده است. از آنجا که اغلب سیستمهای غیرخطی با عدم قطعیت مواجه اند، تخمین ناحیه جذب مقاوم (ناحیه ای که در آن پایداری، علی رغم تغییر پارامترهای غیر قطعی، تضمین می شود) در بررسی این سیستمها از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

**واژه گان کلیدی:**

تخمین ناحیه جذب، گسترش جهت دار ناحیه جذب، ناحیه جذب مقاوم، افزایش زمان بحرانی، مدلسازی مارکوف، اندازه پایا.

**پیوستها**

## فهرست شکلها

### فصل اول



### فصل دوم 8



### فصل سوم 29



### فصل چهارم



### فصل پنجم

## فهرست جداول

### فصل دوم



### فصل سوم



### فصل چهارم

# فصل اول

## مقدمه

## ۱ـ مقدمه

سیستم‌های فیزیکی پیرامون ما دارای رفتار پیچیده بوده و اغلب با مدل غیر خطی قابل توصیف میباشند. با توجه به پیچیدگی مسایل غیرخطی و اینکه روش کلی برای تحلیل رفتار سیستمهای غیر خطی وجود ندارد، عموماً سیستم غیرخطی حول نقطه کار خطی‌سازی می‌شود و سپس با توجه به رفتار سیستم خطی شده حول نقطه کار، رفتار محلی سیستم غیرخطی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بررسی موشکافانه‌تر سیستم‌های غیرخطی، توجه به این نکته ضروری است که تنها تعیین پایداری مجانبی[1] (پیوست۲–تعریف۷) سیستم خطی شده حول نقطه تعادل (پیوست۲–تعریف۱)، برای بررسی رفتار یک سیستم غیرخطی کافی نیست، چرا که وجود اغتشاش و نویز باعث می‌شود سیستم از نقطه تعادل منحرف شود و به نقطه‌ای دیگر از فضای حالت حرکت کند. در این صورت پاسخ بدین مسئله که آیا سیستم پس از برطرف شدن اغتشاش به حالت پایدار اولیه خود باز می‌گردد یا خیر؟ امری ضروری است و اهمیت محاسبه ناحیه جذب[2] یا حداقل تخمینی از ناحیه جذب حول نقطه تعادل سیستم را آشکار می‌کند [۱].

اهمیت مسئله تعیین ناحیه جذب با مثال ساده زیر روشن می گردد [۱،۲] . فرض کنید مطابق شکل ۱–۱ سیستمی غیرخطی دارای نقطه تعادلی با نام $\overline{x}_{pr}$ است و در لحظه $t_0$ بدلیل بروز نوعی خطا در سیستم (مثلاً اتصال کوتاه در یک مدار الکتریکی)، ساختار سیستم تغییر می‌کند. چنانچه سیستم جدید (در معرض خطا) نقطه تعادلی در نزدیکی $\overline{x}_{pr}$ نداشته باشد، حالت سیستم از $\overline{x}_{pr}$ دور خواهد شد. فرض کنید در لحظه‌ای مانند $t_1$ خطا از بین برود و سیستم پس از خطا دارای نقطه تعادلی به نام $\overline{x}_{ps}$ باشد که یا دقیقاً منطبق بر $\overline{x}_{pr}$ است یا بسیار نزدیک به آن می‌باشد. در هر حال، چنانچه $x(t_1)$ متعلق به محدوده جذب $\overline{x}_{ps}$ باشد سیستم به حالت دائمی[3] خواهد رسید. پس از بررسی این روند، پاسخگویی بدین پرسش ضروری است که $x(t_1)$ تا چه حدی می‌تواند از $\overline{x}_{ps}$ دور شود تا پایداری سیستم پس از رفع خطا تضمین شود؟ به بیان دیگر بیشترین زمان مجاز برای رفع خطای ایجاد شده $(t_1 - t_0)$ چقدر است؟

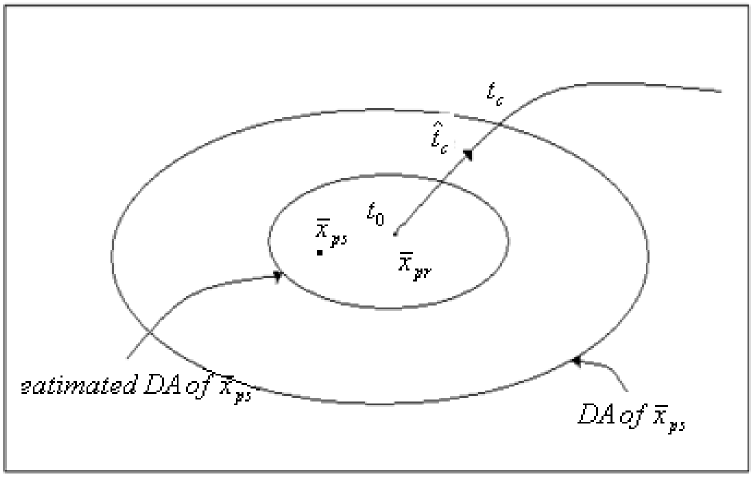
---

[1] - *Asymptotically stable*

[2] - *Region of attraction، domain of attraction*

[3] -*steady state*

در پاسخ بدین سوال می‌توان گفت سیستم تا زمان $t_1 = t_c$ فرصت اصلاح و تعقیب خطا را دارد که محاسبه زمان $t_c$ با انتگرال‌گیری از سیستم در معرض خطا با حالت اولیه $\overline{x}_{pr}$ امکان‌پذیر است. در طراحی سیستم‌های غیرخطی زمان $t_c - t_0$ را اصطلاحاً زمان اصلاح بحرانی [4] می‌نامند [1].




**شکل ۱-۱- زمان اصلاح بحرانی**

در اکثر مواقع تعیین دقیق ناحیه جذب حول نقطه تعادل $\overline{x}_{ps}$ ممکن نیست ومطابق شکل ۱-۱ تخمینی از ناحیه جذب را می‌یابیم و براساس آن، زمان اصلاح بحرانی به صورت $\hat{t}_c - t_0$ به دست می‌آید. بنا به آن چه گفته شد میتوان ناحیه جذب را برای سیستم زیر تعریف کرد.

فرض کنید که $x = 0$، نقطه تعادل پایدار مجانبی برای سیستم زیر باشد.

$$\dot{x} = f(x) \tag{۱-۱}$$

که در آن $f : D \rightarrow R^n$ در $D \subset R^n$ لیپ شیتز [5] (پیوست ۲- تعریف ۸) است. چنانچه $\varphi(t, x_0)$ پاسخ سیستم برای حالت اولیه $x_0$ باشد، ناحیه جذب سیستم (که در این رساله با $DA$ نشان داده میشود)، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$DA = \{x_0 \in D \mid \varphi(t; x_0) \rightarrow 0 \ \text{هنگامیکه}\ t \rightarrow \infty\} \tag{۱-۲}$$

با توجه به اهمیت تعیین منطقه جذب در بررسی و کنترل سیستم‌های غیرخطی، تاکنون روش‌های زیادی برای محاسبه و تخمین ناحیه جذب ارائه شده است که در فصل بعد به اختصار مرور خواهد شد. در

[4] - *Critical clearing time*
[5] - *Lipschitz*

فصل دوم پس از بیان روشهای ارائه شده برای تخمین و توسعه ناحیه جذب، به بررسی معایب و مزایای هر یک از این روشها پرداخته می شود. در فصل سوم تا پنجم ایده های نوینی برای تخمین ناحیه جذب، گسترش جهتدار ناحیه جذب و تخمین ناحیه جذب مقاوم ارائه شده است. در فصل سوم روشی جدید برای تخمین ناحیه جذب ارائه میشود که در مقایسه با روشهای بیان شده در فصل دوم، شامل مزایایی چون قابلیت استفاده برای کلاس بزرگی از سیستمهای غیر خطی، ارائه روش در قالب یک الگوریتم عددی ساده و همگرا به ناحیه جذب واقعی و امکان محاسبه خطا می باشد. در فصل چهارم مسئله گسترش جهت دار ناحیه جذب در قالب یک مسئله کنترل بهینه بیان میشود و روشهای ریاضی نوینی برای محاسبه پاسخ بهینه این مسئله ارائه میشود. در این رساله مسئله توسعه ناحیه جذب با دیدی متفاوت بررسی می شود و راستاهای انحراف سیستم از نقطه تعادل پس از بروزخطا شناسایی می شود و توسعه در این راستاها صورت می گیرد. یکی از کاربردهای مهم این دستاورد کنترل کارآمد تر ابر سیستمهایی همچون سیستمهای قدرت است و در قسمت شبیه سازی این فصل با استفاده از گسترش جهت دار ناحیه جذب، زمان بحرانی رفع خطای سیستمهای قدرت افزایش میابد.

از آنجا که اغلب سیستمها با عدم قطعیت مواجه اند، تخمین ناحیه جذب مقاوم ( ناحیه ای که در آن پایداری، علی رغم تغییر پارامترهای غیر قطعی، تضمین می شود) از اهمیت ویژه ای برخوردار است. درفصل پنجم این رساله با مدلسازی مارکوف سیستمهای غیر خطی واستفاده از اندازه پایا به عنوان معیار پایداری سیستم، مسئله توسیع ناحیه جذب و تخمین ناحیه جذب مقاوم بصورت مسائل بهینه سازی استاندارد بیان میشود.

برای بیان شیواتر مطالب، تعاریف ریاضی و قضایای مورد نیاز در پیوستهای ۱و ۲ آمده است ودر متن پایان نامه بجای استفاده از کلمات پیوست، تعریف و قضیه از حروف اختصاری پ،ت وق استفاده شده است. از آنجا که اکثر مسائل تخمین و توسعه ناحیه جذب در قالب یک مسئله کمینه سازی بیان و حل می شود در پیوست ۳ به روشهای رایج در حل مسائل کمینه سازی نیز اشاره شده است.

# فصل دوم

## مروری بر روش‌های تخمین و توسیع ناحیه جذب

## ۲-۱- مروری بر روش‌های تخمین ناحیه جذب

اگرچه تعیین دقیق ناحیه جذب در سیستم‌های غیرخطی امری مشکل و در برخی موارد امکان ناپذیر است [۱]، با توجه به اهمیت مسئله تاکنون روش‌های زیادی برای تخمین ناحیه جذب (پ۱- ت۹) ارائه شده است، که در این بخش مورد مطالعه قرار می گیرند.

روش‌های تخمین ناحیه جذب را می‌توان در دو دسته روش‌های مبتنی بر توابع لیاپانوف (پ۱- ت۸) [۳-۶] و روش‌های غیر لیاپانوفی [۷-۱۰] قرار داد. تخمین ناحیه جذب براساس توابع لیاپانوف یکی از رایج‌ترین روش‌های تعیین محدوده جذب می‌باشد. روشهای لیاپانوفی به دو زیر مجموعه زیر تقسیم می - شوند [۱۱]:

الف- روشهای مبتنی بر نظریه مجموعه های پایا (لیاپانوفی غیر مستقیم)

ب-روشهای لیاپانوفی مستقیم که به دلیل مزایایی از قبیل سهولت تحلیل ناحیه جذب و تطابق با ابزارهای طراحی کنترل کننده، کاربرد بیشتری دارند. این روشها عموماً شامل سه مرحله زیر اند:

۱ـ پیشنهاد یک تابع لیاپانوفی خاص براساس صورت مسئله (به عنوان مثال استفاده از تابع لیاپانوف مربعی [۳و۱۲]، تابع لیاپانوف لاره[۶] [٤و۵]، توابع لیاپانوف کراسوفسکی [۷] [۱۳]، توابع لیاپانوف ماکزیمال [١٤]، یا دیگرتوابع لیاپانوف غیرمربعی [۳و۱۳]

۲ـ استفاده از قضایایی همچون پاپوف[۸] [١٤]، قضیه دایره [٤١]، رویه $S$ [٥]، قضیه زیلر [۹] [۱۵،۱٦]، قضیه توالیپز[۱۰] [۱۷] و روش میشل[۱۱] [۱۸] برای تخمین ناحیه جذب بر اساس توابع لیاپانوف

۳ـ تبدیل مسئله تخمین ناحیه جذب به یک مسئله بهینه سازی محدب یا غیرمحدب و حل آن با روش‌های عددی چون مشبک‌سازی[۱۲] [١٦]، نامساوی‌های ماتریسی خطی[۱۳] [۳-٦]، نامساوی ماتریسی دو خطی[۱٤] [۱۹] و قضیه مومنت[۱۵] [۲۰]

---

[6]- *Lur'e*
[7]- *Krasovskii*
[8] - *Popove*
[9] - *Zeller*
[10] - *Toellipse*
[11] - *Michel*
[12] - *Girding*
[13] - *Linear Matrix Inequalities (LMI)*
[14] - *Bilinear Matrix Inequalities (BMI)*
[15] - *Moment*

تنوع مقالات  مبتنی بر روشهای لیاپانوف مستقیم، عموماً بدلیل تفاوت در دو مرحله اول و دوم است و مرحله سوم که حل مسئله کمینه‌سازی است در اکثر موارد به طور یکسان و براساس روش‌هایی چون مشبک‌سازی یا نامساوی‌های ماتریسی خطی انجام می‌شود [۳] و چنانچه تابع لیاپانوف چند جمله ای باشد از قضیه مومنت نیز می توان استفاده کرد [۲۰].

درروشهای تخمین غیر لیاپانوفی ساختار توپولوژیک سیستم بررسی می شود واز روشهایی همچون تعیین سیکل حدی[۱۶] به عنوان مرز محدودکننده ناحیه جذب [۷]،  تعیین مانیفلدهای [۱۷] ناپایدار و معرفی فضای محصور شده در آن به عنوان ناحیه جذب [۷]، معکوس سازی مسیر [ ۷،۹] یا مدلسازی مارکوف [۲۱-۲۳] استفاده شده است.

## ۲-۱-۱- روش‌های تخمین مبتنی بر توابع لیاپانوف

### ۲-۱-۱-۱- تخمین ناحیه جذب با توابع لیاپانوف مربعی

قبل از شرح روش‌های مبتنی بر توابع لیاپانوف،  ارائه مسئله‌ای اساسی و ساده براساس تابع لیاپانوفی مربعی برای تخمین ناحیه جذب در قالب یک مسئله بهینه‌سازی،  می‌تواند در معرفی شفاف این روش‌ها گامی مؤثر باشد.

از آن جا که تخمین دقیق ناحیه جذب کاری مشکل است،  عموما زیرمجموعه‌ای از ناحیه جذب تخمین زده می شود و تا جای ممکن برای رسیدن به بزرگترین ناحیه جذب تخمینی [۱۸] *(LEDA)* ،  آن را توسعه می دهند.

در روشهای مبتنی برتوابع لیاپانوفی عموما روند زیر برای محاسبه ناحیه جذب به کار می رود.  ابتدا تابع لیاپانوفی  مربعی $V(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V(x) = x^T px \quad ; \qquad p = p^T \in R^{n\times n},\ \ p > 0 \qquad (۲-۱)$$

چنانچه در $\Omega_c$ که  به صورت زیر تعریف میشود،  $V(x)$  یک تابع لیاپانوفی برای سیستم ( ۱-۱) باشد، $\Omega_c$زیر مجموعه ای از ناحیه جذب خواهد بود .

$$\Omega_c = \{x \in R^n \mid V(x) \le c\} \qquad c > 0 \qquad (۲-۲)$$

[16] - *Limit cycle*
[17] - *Manifold*
[18] - *Largest Estimated Domain of Attration*

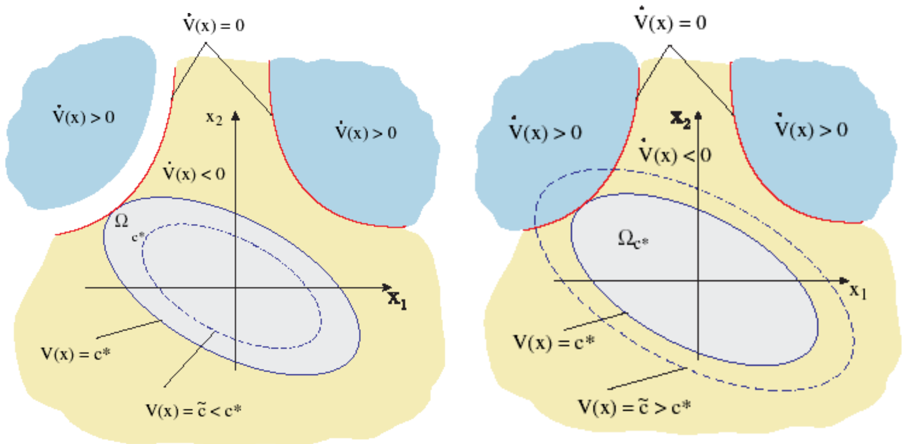
با فرض $D^- = \{x \in R^n | \ \dot{V}(x) < 0\}$، هر عضومانند $x$ روی مرز ناحیه $D^-$ در رابطه $\dot{V}(x) = 0$ صادق است. بنابراین اعضایی از مجموعه $\Omega_c$ که عضو $D^-$ نیز باشند، یک مجموعه پایا را تشکیل میدهند و بنا به تعریف این مجموعه، هر مسیر رها شده در آن به مبدا همگرا خواهد شد. واضح است که با توجه به مطالب فوق، تخمین مناسب بزرگترین مجموعه $\Omega_c$ واقع در $D^-$ است. چنانچه این تخمین مناسب با $\hat{D}$ نشان داده شود رابطه ریاضی زیر برقرار است:

$$\hat{D} = Sup_{\Omega_c \in D^-} \Omega_c \qquad (۲-۳)$$

چنانچه $V(x)$ به صورت مربعی (۲-۱) انتخاب شود، فضای $\Omega_c$ ساختار بیضوی خواهد داشت. بنابراین هدف توسعه ناحیه جذب تخمین زده شده یا به عبارتی یافتن $c^*$ (مقدار بیشینه $c$) به گونه‌ای است که $\Omega_{c^*}$، بزرگترین قسمت ممکن از فضای $\dot{V}\ (x) < ۰$ را در بر گیرد. بنابراین محاسبه $c^*$ به صورت مسئله بهینه‌سازی زیر محاسبه می‌شود [۱۰]:

$$\begin{aligned} c^* &= \max V(x) \\ s.t.\ \ \dot{V}(x) &= 0, \quad x \neq 0 \end{aligned} \qquad (۲-٤)$$

تصویر شماتیک مسئله فوق که در شکل ۲-۱ نمایش داده شده است، نمایانگر این نکته است که تخمین ناحیه جذب در حقیقت جستجوی کمینه همه جایی تابع لیاپانوف $V(x)$ در سطح یا مجموعه $(x \neq ۰\ ,\ \dot{V}(x) = ۰)$ می‌باشد [۱٤].




**شکل ۲-۱- تخمین ناحیه جذب در قالب یک مسئله بهینه‌سازی**

اگر چه اکثر روشهای مبتنی بر توابع لیاپانوف روند یکسانی برای تخمین ناحیه جذب دارند، استفاده از قضایای متفاوت برای بررسی پایداری، این مقالات را از نظر کارآیی و بهینگی مجزا می کند. یکی از روشهایی که برای محاسبه حوزه جذب مورد استفاده قرار گرفته، ضابطه پایداری دایره است که برای بررسی پایداری سیستمهای خطی نامتغیر با زمان با فیدبک استاتیک، به کار می رود. ساختاراین سیستمها به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \\ u &= -\psi(t, y) \end{aligned} \qquad (۲-۵)$$

که در آن $x \in R^n$، $y, u \in R^P$ و $(A,B)$ کنترل‌پذیر و $(A,C)$ مشاهده پذیر و $\psi : [0,\infty] \times R^P \rightarrow R^P$ یک عنصر غیرخطی بدون حافظه که می تواند متغیر با زمان نیزباشد، هستند. در این صورت $\psi$ برحسب $t$ به طور قطعه‌ای پیوسته[19] و بر حسب $y$ لیپ شیتز (پ۱- ت۸) محلی می‌باشد.

سیستم (۲-۵) با شرایط مذکور را در نظر بگیریدو فرض کنید $\psi(.,.)$ در شرایط قطاعی (پ ۱- ت۱۰) صدق می کند، آن گاه سیستم پایدار مطلق است هرگاه $Z(s) = I + kG(s)$ اکیداً مثبت باشد (پ ۱- ق۲). در تحلیل ضابطه دایره می توان گفت علی رغم سادگی این روش، یکی از کاستی های مهم آن محافظه کاری و کارآیی برای دسته محدودی از سیستمهای غیر خطی می باشد.

روش دیگری که برای بررسی پایداری سیستمها و به نوعی تخمین ناحیه جذب به کار رفته است ضابطه پاپوف (پ۱- ق٤) میباشد. این روش نیز مانند روش دایره محافظه کارانه است و از تحلیل پایداری دسته بزرگی از سیستم های غیر خطی ناتوان است [۱۵]. با توجه به محدودیتهای ضوابطی همچون پاپوف و دایره در تعیین ناحیه جذب، از سال ۲۰۰۰ به بعد روشهای متفاوتی جهت تعیین پایداری لیاپانوفی و تخمین ناحیه جذب مطرح شد که یکی از آنها نامساوی الیچ زیلر[20] (پ۱- ق۵) است [ ۱۳،۱۵،۱٦]. در این روش فرض می شود $V(x) = x^T Px$، تابع لیاپانوفی برای سیستم $\dot{x} = f(x)$ باشد. چنانچه $\dot{V}$ در رابطه(۲-۷) صدق کند ، $\Omega_c$ که در روابط زیر تعریف شده می تواند تخمینی از ناحیه جذب سیستم باشد.

$$\Omega_c = \{x | V(x) \le c\}, \quad c > 0 \qquad (۲-٦)$$

$$\dot{V} = f^T(x)Px + x^T Pf(x) < 0 \qquad \forall x \in \Omega_c \qquad (۲-۷)$$

[19] - *Piece wise continuous*
[20] - *Elich Zeller*

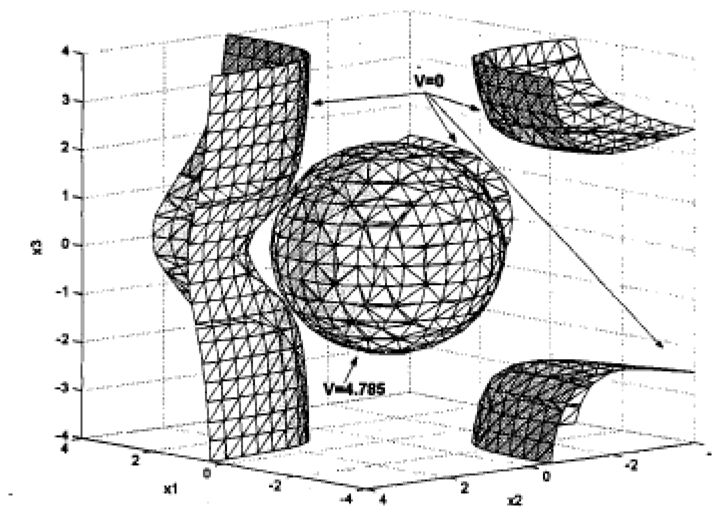
بنا براین مسئله تخمین ناحیه جذب هم ارز با پیدا کردن بیشینه متغیر $c$ است به طوری که روابط فوق بر قرار باشند. مسلما $V(x)=x^T Px=c$ یک تابع بیضوی در فضای $n$ بعدی است و افزایش $c$ به معنای پیدا کردن بزرگترین زیرمجموعه بیضوی از ناحیه جذب است. چگونگی محاسبه بیشینه متغیر $c$ در (پ۱- ق٦) شرح داده شده است.

شکل (۲-۲) ناحیه جذب تخمین زده شده بر اساس تئوری زیلر، برای سیستمی با ۳ متغیر حالت را نشان می دهد [۱۵]. مدل فضای حالتی این سیستم عبارت است از

$$\begin{cases}\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 x_3^2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = -x_3\end{cases} \qquad (۲-۸)$$

و تابع پیشنهاد شده دارای ساختار زیر است:

$$V = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \qquad (۲-۹)$$




**شکل ۲-۲- تخمین ناحیه جذب با روش زیلر**

برخی از کاستی های روش زیلر عبارتند از:

۱- از آنجا که تئوری زیلر بر اساس تخمین تابع غیر خطی سیستم با یک چند جمله ای، استوار است (پ۱- ق ٥و٦)، از تخمین ناحیه جذب سیستمهای دارای مشتقات نسبی نا پیوسته و غیر قابل بیان بوسیله چند جمله ای ها، ناتوان است [۱۵].

۲- روند تبدیل مختصات دکارتی به قطبی در زیلر، اگر چه محاسبات را ساده تر می کند اما مسئله را به مجموعه های صرفاً کروی محدود می کند حال آن که شاید بتوان زیر فضای غیر کروی بزرگتری را به کمک این تئوری محاسبه کرد [١٤،١٦].

۳- علی رغم اینکه در برخی مقالات کارآیی روش زیلر برای سیستمهای با ابعاد وسیع، به عنوان یکی از مزایای این روش بر شمرده شده است [ ١٣]، عملا برای سیستمهایی با بیش از ۳ بعد پیاده سازی نشده است.

٤- استفاده از نقاط چبی شف[21] برای درونیابی و تخمین سیستم غیر خطی با چند جمله ای، تولید خطا می کند(پ١- ت٢١) و از طرفی کاهش خطا مستلزم افزایش تعداد نقاط چبی شف و در نتیجه پیچیدگی محاسبات خواهد بود [١٥،٢٤].

بنا به آنچه در بررسی روش هایی چون زیلر، پاپوف و... گفته شد، روش های مذکور زیر مجموعه ای محدود (بیضوی یا کروی) از ناحیه جذب را می یابند. در سال های اخیر دستاوردهای نوینی برای تکمیل روش های لیاپانوفی ارایه شده است که به میزان قابل قبولی وسعت ناحیه جذب تخمین زده شده به سبک کلاسیک را توسعه می دهند. در ادامه به برخی از این روشها اشاره می شود.

یکی از این روشها، نظریه توالیپزاست که اولین بار توسط تیبکن[22] به طور خاص برای محاسبه ناحیه جذب ارایه شد [١٤و١٧]. ایده اولیه این نظریه دقیقاً مشابه روش زیلر است و تابع لیاپانوف $V(x)$ و تعریف اولیه ناحیه جذب( $\Omega_c$) به همان شکل تعریف می شوند (پ٢- ق٦). مزیت این روش نسبت به زیلر، محاسبه چندین ناحیه جذب تخمینی $\Omega_{c_i}$ برای مجموعه ای از ماتریس های مثبت معین $P_i$ می باشد و تخمین نهایی ناحیه جذب( $M_{\Omega_c}$) بر اساس اجتماع کلیه $\Omega_{c_i}$ ها محاسبه می گردد. هر چند پاسخ حاصل از این روش نیز زیرمجموعه ای از ناحیه جذب است، اما در مقایسه، روش توالیپز قسمت بسیار وسیع تری از ناحیه جذب را نسبت به زیلر در بر می گیرد [ ١٧و١٩]. نحوه تخمین ناحیه جذب بر اساس تئوری توالیپز در(پ١- ق٧) آمده است. در شکل ٢-٣ ناحیه جذب حاصل از اجتماع دو زیر مجموعه از ناحیه جذب بر اساس تئوری توالیپز نشان داده شده است.

---

[21] - *Chebyshev*
[22] - *Tibken*