بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

**پایان‌نامه**

**برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته**
**ریاضی محض، گرایش جبر**

**عنوان**

# مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های یک گروه متناهی

استاد راهنما

**دکتر رضا عرفی**

پژوهشگر

**فاطمه پوریوسفی**

تابستان ۱۳۹۲

بسم ا... الرحمن الرحیم

عنوان پایان نامه

# مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های یک گروه متناهی

توسط:


فاطمه پوریوسفی


پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی محض گرایش نظریه‌ی گروهها

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با درجه: بسیار خوب

دکتر رضا عرفی(استاد راهنما)..... عرفی ........ استادیار

دکتر شیرین فولادی(دانشگاه خوارزمی) ......................استادیار

دکتر عزیزاله آزاد(دانشگاه اراک) ..................................... استادیار

تابستان ۹۲

نام خانوادگی دانشجو: پوریوسفی نام: فاطمه

عنوان: مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های یک گروه متناهی

استاد راهنما: دکتر رضا عرفی

مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد رشته: ریاضی محض گرایش: جبر

دانشگاه: اراک دانشکده علوم پایه

تاریخ فارغ‌التحصیلی: تابستان ۱۳۹۲ تعداد صفحات: ۸۸

واژگان کلیدی: خودریختی‌های مرکزی، $p$- گروههای متناهی، $N.I$ گروهها و گروههای خطی عام.

**چکیده**

فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد بعلاوه تعداد عوامل اول موجود در مرتبه‌ی $G$ با تکرار کوچکتر یا مساوی ۵ باشد بطوری که مرتبه‌ی $G$ بصورت $p^5$ برای $p > ۳$ نباشد در این رساله ابتدا نشان می‌دهیم مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های $G$ عددی زوج است. علاوه بر این فرض کنیم $G$ یک $p$- گروه متناهی باشد $Aut(G)$ و $GL(n,p)$ به ترتیب بیان کننده‌ی گروه خودریختی‌های گروه و گروه خطی عام از درجه‌ی $n$ روی $\mathbb{Z}_p$ باشند. اگر $Aut(G) \cong GL(n,p)$ آنگاه نشان می‌دهیم $G$ یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی $p^n$ می‌باشد. همچنین از تساوی $|Aut(G)| = |GL(d,p)|$ که درآن $d$ تعداد مولد منیمال $G$ می‌باشد، نتایجی در مورد ساختار گروه $G$ بیان می‌کنیم، و در آخر با استفاده از نرم‌افزار $GAP$ به رده‌بندی و مشخص کردن $N.I$ گروه‌های از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰۰ می‌پردازیم که در آن گروه $G$ را $NI$ گروه نامند، هرگاه هیچ عنصر غیر بدیهی آن توسط خودریختی‌های $G$ به معکوسش برده نشود.

تقدیم به قطب عالم امکان

مهدی فاطمه (عج)

# خدایا...[1]

خداوندا، درود بفرست بر محمد و خاندان او و ما را به توبه‌ای که پسند می‌داری راه بر و از اصرار بر گناهان که ناپسند می‌داری دور فرمای. خداوندا، چون میان دو نقصان یکی در دین ویکی در دنیا، قرار گرفتیم، نقصان را در آن قرار ده که زودگذر است و توبه را در آن قرار ده که بقایش بیشتر است. و چون آهنگ دو کار کردیم که یکی تو را خشنود می‌سازد و دیگر تو را به خشم می‌آورد، ما را بدان سوی که سبب خشنودی توست روانه دار و عزم ما را در آنچه سبب خشم توست سست نمای. و در آن هنگام نفس‌های ما را به اختیار خود وا مگذار، که نفس‌های ما اگر توفیق خویش رفیق نگردانی راه باطل گزینند و نفس آدمی را به بدی فرمان دهد مگر آن که تو رحمت آوری.

بار خدایا ما را از ناتوانی آفریده‌ای و بنیان ما بر سستی نهاده‌ای و از آبی پست و بی‌ارج صورت بسته‌ای، ما را هیچ جنبشی نیست مگر به توانی که تو ارزانی داری و نیرویی نیست مگر به مددی که تو رسانی، پس به توفیق خود یاریمان بخش و به راه راست خویش ارشاد فرمای و دیده‌ی دل ما را از آنچه خلاف دوستی توست کور گردان و چنان کن که نافرمانی را در هیچ از یک از اعضای ما راه نباشد.

بار خدایا، درود بفرست بر محمد خاندانش و رازهای دل ما را و جنبش‌های اندام‌های ما را و نگاه دیدگان ما را و سخن زبان‌های ما را چنان گردان که موجب ثواب تو باشد، تا حسنه‌ای که سزاوار پاداش نیک توست از دست نشود وسیله‌ای که که موجب کیفر بد توست بر جای نماند.

[1]فرازی از صحیفه‌ی سجادیه.

# سپاس‌گزاری...[۲]

حمد بی‌حد؛ سزاوار خداوندی است که منت دانش و نگارش را از میان تمام مخلوقات بر ابنای بشر نهاد و از ورطه‌ی ظلمانی جهل بر عرصه‌ی نورانی دانش و شاه‌نشین بینش کشاند.

مراتب سپاسگذاری خود را تقدیم می‌دارم به استاد راهنمای فرزانه و ارجمندم جناب آقای دکتر عرفی و بر خود واجب می‌دانم از زحمات بی‌دریغ، تلاش‌های بی‌وقفه و راهنمایی ایشان قدردانی کنم؛ باشد که در پناه الطاف باری تعالی روزگار را با سلامتی و سربلندی سپری نمایند.

همچنین از محضر اساتید محترم سرکار خانم دکتر فولادی و جناب آقای دکتر آزاد که داوری و مطالعه‌ی این پایان نامه را به عهده داشتند کمال تشکر و قدردانی را دارم.

والاترین سپاس را به مادرم تقدیم می‌کنم که در تمام طول زندگی از آسایش خود کاسته و بر آرامش من افزوده و در پیشبرد اهداف یاریگرم بود.

از خواهر و برادران عزیزم به خاطر اینکه در سختی‌های راه کنارم بودند و مرا یاری دادند، سپاسگزارم.

به امید آنکه بتوانم ذره‌ای از این محبت‌ها را جبران کنم.

فاطمه پوریوسفی
تابستان ۱۳۹۲

---
۲

# چکیده

فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد بعلاوه تعداد عوامل اول موجود در مرتبه‌ی $G$ با تکرار کوچکتر یا مساوی ۵ باشد بطوری که مرتبه‌ی $G$ بصورت $p^5$ برای $p > 3$ نباشد در این رساله ابتدا نشان می‌دهیم مرتبه‌ی گروه خودریختی‌های $G$ عددی زوج است. علاوه بر این فرض کنیم $G$ یک $p$- گروه متناهی باشد $Aut(G)$ و $GL(n,p)$ به ترتیب بیان کننده‌ی گروه خودریختی‌های گروه و گروه خطی عام از درجه‌ی $n$ روی $\mathbb{Z}_p$ باشند. اگر $Aut(G) \cong GL(n,p)$ آنگاه نشان می‌دهیم $G$ یک گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی $p^n$ می‌باشد. همچنین از تساوی $|Aut(G)| = |GL(d,p)|$ که درآن $d$ تعداد مولد منیمال $G$ می‌باشد، نتایجی در مورد ساختار گروه $G$ بیان می‌کنیم، و در آخر با استفاده از نرم‌افزار $GAP$ به رده‌بندی و مشخص کردن $N.I$ گروه‌های از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰۰ می‌پردازیم که در آن گروه $G$ را $NI$ گروه نامند، هرگاه هیچ عنصر غیر بدیهی آن توسط خودریختی‌های $G$ به معکوسش برده نشود.

# واژگان کلیدی

خودریختی‌های مرکزی، $p$- گروههای متناهی، $N.I$ گروهها و گروههای خطی عام.

# پیشگفتار

بررسی مرتبه‌ی خودریختی‌های یک گروه با استفاده از خواص گروه یکی از مسائل جالب و مشکل در نظریه‌ی گروههای متناهی می‌باشد در این رساله به مطالعه‌ی بیشتر خواص مرتبه‌ی گروه خودریختی و مطالعه‌ی ساختاری آن می‌پردازیم.

فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد بطوری که تعداد عوامل اول موجود در مرتبه‌ی $G$ (با تکرار) کوچکتر یا مساوی ۵ باشد و مرتبه‌ی $G$ بصورت $p^۵$ برای $p > ۳$ نباشد، در این صورت نشان می‌دهیم مرتبه‌ی گروه خودریختی‌ها عددی زوج است. همچنین یک قضیه‌ی اساسی بیان می‌کند گروه خودریختی‌های $p$- گروه آبلی مقدماتی از رتبه‌ی $n$ یکریخت با $GL(n,p)$ می‌باشد که در آن $GL(n,p)$ بیان کننده‌ی گروه خطی عام از درجه‌ی $n$ روی $\mathbb{Z}_p$ می‌باشد. در این رساله درستی عکس قضیه‌ی فوق را اثبات می‌کنیم و نشان می‌دهیم که اگر $Aut(G) \cong GL(n,p)$ آنگاه $G$ یک $p$- گروه آبلی مقدماتی از مرتبه‌ی $p^n$ می‌باشد. همچنین در ادامه به مطالعه‌ی گروههای $d$- مولدی که در تساوی $|Aut(G)| = |GL(d,p)|$صدق می‌کند می‌پردازیم و مطالب کلی و اساسی در مورد ساختار این گروهها ارائه می‌کنیم.

این رساله مشتمل بر سه فصل است.

در فصل اول به بیان تعاریف و مفاهیم و قضایای اولیه می‌پردازیم که در فصل‌های دیگر مورد نیاز می‌باشد.

در فصل دوم به بیان و بررسی این مطالب می‌پردازیم که اگر تعداد عوامل اول(با تکرار) در مرتبه‌ی گروه $G$ کوچکتر یا مساوی ۵ بود و مرتبه‌ی $G$ بصورت $p^۵$ برای $p > ۳$ نباشد آنگاه $|Aut(G)|$ عددی زوج است. همچنین در ادامه‌ی این فصل با ارائه‌ی برنامه‌ای در زبان $GAP$ به رده‌بندی $N.I$ گروههای از مرتبه‌ی کمتر از ۱۰۰۰ می‌پردازیم. سپس به بررسی زوج یا فرد بودن $|Aut(G)|$ برای $|G| = p^۵$ می‌پردازیم و در انتهای این فصل حدس زیر را بیان می‌کنیم:

**حدس :** اگر $G$ یک $p$- گروه باشد بطوری که مرتبه‌ی خودریختی‌های آن فرد باشد، آنگاه $Aut(G)$ پوچتوان است.

و درستی حدس فوق را با $GAP$ برای گروه‌های از مرتبه‌ی $p^۶$ که در آن $p = ۳, ۵, ۷$ بررسی می‌کنیم.

در فصل سوم به بررسی درستی عکس یک قضیه‌ی معروف و قدیمی می‌پردازیم.

و نشان می‌دهیم اگر $Aut(G) \cong GL(n,p)$ آنگاه $G$ یک $p$- گروه آبلی مقدماتی از رتبه‌ی $n$ می‌باشد و در ادامه به بررسی ساختار و مطالعه‌ی $p$- گروه‌های $d$ مولدی مانند $G$ می‌پردازیم که در تساوی $|Aut(G)| = |GL(n,p)|$ صادق است.

این رساله شرح مبسوط مقالات زیر می‌باشد:

[1] M. J. Curran and R. Higgs, *On minimal of order groups with odd order automorphisms groups*, Comm. Algebra, 2011(39) , 199-208.

[2] S. Fouladi and R. Orfi, *Gerneral linear groups as automorphism groups*, Int. Journal of Algebra, 2011(27), 1327- 1335.

# فهرست مطالب

# فصل ۱
# تعاریف، مفاهیم و قضایای مقدماتی

در این فصل مطالبی را که در این پایان نامه به آن نیازمندیم به اختصار توضیح می‌دهیم.

## ۱.۱ مطالب مقدماتی

**تعریف:** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$. زیرگروه $H$ را یک زیرگروه مشخّص $G$ می‌نامیم در صورتی که به ازای هر خودریختی از $G$ مانند $\alpha$، داشته باشیم $H^{\alpha} \leq H$ که در آن $H^{\alpha} = \{h^{\alpha} \mid h \in H\}$.

**تعریف:** فرض کنیم $H \leq G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر به ازای هر $g \in G$ ، $g^{-1}\ h\ g \in H$.

**تذکر:** فرض کنیم $H \leq G$. در این صورت $H \trianglelefteq G$ اگر و تنها اگر به ازای هر $g \in G$، $g^{-1}Hg = H$، یعنی اگر و تنها اگر $H$ با تمام مزدوجهایش در $G$ منطبق باشد.

**تذکر:** اگر $G$ یک گروه آبلی باشد، هر زیرگروه $G$ در $G$ نرمال است.

**قضیه ۱.۱.۱.** (قضیه نرمالساز- مرکزساز). فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $H \leq G$. در این صورت

(آ) $C_G(H) \trianglelefteq N_G(H)$،

(ب) $N_G(H)/C_G(H) \hookrightarrow Aut(H)$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۶.۳.۲، از [۲۸] مراجعه شود. $\square$

**تعریف:** فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی از مرتبه‌ی $n$ باشد، و $n = p^{\alpha}.n'$ که در آن $\alpha$ یک عدد صحیح نامنفی است و $p$ عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت هر زیرگروه $G$ از مرتبه‌ی $p$ را یک $p$- زیرگروه سیلوی $G$ می‌نامند.

**قضیه ۲.۱.۱.** (قضیه‌ی سیلو). فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی از مرتبه‌ی $n$ باشد که در آن $n = p^{\alpha}.n'$، $\alpha \geq ۰$، و $p$ عدد اولی است که $p \nmid n'$ . در این صورت،

(آ) $G$ حداقل یک $p$- زیرگروه سیلو دارد،

(ب) هر $p$- زیرگروه $G$ جزء یک $p$- زیرگروه سیلوی $G$ است،

(ج) هر دو $p$- زیرگروه $G$ مزدوج‌اند،

(د) عده‌ی همه‌ی $p$- زیرگروههای سیلوی $G$ همنهشت ۱ به پیمانه $p$ است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۷.۱.۴، از [۲۸] مراجعه شود. □

**قضیه ۳.۱.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد و $p$ عدد اولی باشد که $p \mid |G|$. به علاوه فرض کنیم $P \in Syl_p(G)$. در این صورت

(آ) $n_p(G) = |G : N_G(P)|$،

(ب) $n_p(G) \mid |G : P|$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۰.۱.۴، از [۲۸] مراجعه شود. □

**قضیه ۴.۱.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی، و $p$ یک عدد اول باشد. به علاوه فرض کنیم $P \in Syl_p(G)$ و $N \trianglelefteq G$. در این صورت، $P \cap N$ یک $p$- زیرگروه سیلوی $N$ است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۸.۱.۴، از [۲۸] مراجعه شود. □

**لم ۵.۱.۱.** $H \times K$ آبلی است اگر وتنها اگر $H$ و $K$ هر دو آبلی باشند.

**برهان.** مقدماتی است. □

**تعریف:** جابه‌جاگر یک زوج مرتب $g_۱$ و $g_۲$ از اعضای $G$ عبارت است از عضو

$$[g_۱, g_۲] = g_۱^{-۱} g_۲^{-۱} g_۱ g_۲ \in G.$$

**تعریف:** فرض کنیم $H, K \leq G$. در این صورت زیرگروه جابه‌جاگر متناظر با $H$ و $K$ عبارت از

$$[H, K] = \langle [h, k] | h \in H, k \in K \rangle \leq G.$$

**لم ۶.۱.۱.** فرض کنیم $H \trianglelefteq G$ و $K \trianglelefteq G$ در این صورت $[H, K] \leq H \cap K$. بویژه اگر $H \cap K = ۱$ آنگاه هر عضو $H$ با هر عضو $K$ جابه‌جا می شود.

**برهان.** به لم ۵۳.۳، از [۲۵] مراجعه شود. □

**تعریف:** کوچکترین مضرب مشترک مرتبه های اعضای گروه $G$ را توان $G$ می‌نامیم و آن را با $exp(G)$ نمایش می‌دهیم. واضح است که $exp(G) \mid |G|$.

**تعریف:** فرض کنیم $m$ یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی مانند $m$ را که $n < m$ و $m$، $n$ متباین‌اند $U(m)$ می‌نامیم. مجموعه‌ی $U(m)$ با عمل ضرب اعداد طبیعی به پیمانه‌ی $m$ یک گروه آبلی تشکیل می‌دهد. این گروه را با علامت $U(m)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف:** فرض کنیم $(a, m) = ۱$، در این صورت مرتبه‌ی $a$ کوچکترین عدد طبیعی مانند $d$ است که $a^d \equiv ۱ \ (mod\, m)$ و آنرا با علامت $ord(a)$ نشان می‌دهیم.

**تعریف:** فرض کنیم $(a \, , m) = ۱$ و $ord(a) = \phi(m)$ در این صورت $a$ را ریشه‌ی اولیه به پیمانه‌ی $m$ می‌نامیم که در آن $\phi$ تابع ضربی اویلر است.

**قضیه ۷.۱.۱.** فرض کنیم $x \in G$. در این صورت اندازه‌ی کلاس مزدوجی $x$ در $G$ عبارت از

$$|cl(x)| = |G : C_G(x)|$$

لذا $|cl(x)|$ مرتبه‌ی گروه $G$ را عاد می‌کند.

**برهان.** به قضیه‌ی ۲.۳.۲، از [۲۸] مراجعه شود. □

**تعریف:** گروه نابدیهی $G$ را مشخصاً ساده گوییم اگر ۱و $G$ تنها زیرگروههای مشخصه‌ی آن باشند.

**قضیه ۸.۱.۱.** فرض کنیم $A$ یک گروه آبلی متناهی باشد، $A \neq ۱$. در این صورت $A$ مشخصاً ساده است اگر وتنها اگر مقدماتی باشد.

**برهان.** به قضیه‌ی ۴۱.۷، از [۲۵] مراجعه شود. □

## ۲.۱ گروه‌های پوچتوان، فراتینی و گروه‌های حلپذیر

**تعریف:** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد. یک سری نرمال $G$، زنجیری متناهی از زیرگروه‌های نرمال $G$ مانند $۱ = G_. \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_r = G$ که در آن هر $G_i$ را یک جمله‌ی سری و $r$ را طول سری می‌نامند.
سری نرمال $۱ = G_. \leq G_۱ \leq \cdots \leq G_r = G$ را یک سری مرکزی گوییم در صورتی که به ازای هر $i$ که $۱ \leq i \leq r$، $\frac{G_i}{G_{i-۱}} \leq Z(\frac{G_i}{G_{i-۱}})$.

**تعریف:** گروه $G$ را پوچتوان نامند در صورتی که یک سری مرکزی داشته باشد. طول کوتاهترین سری مرکزی $G$ را رده‌ی پوچتوانی $G$ گویند و آن را با $cl(G)$ نشان می‌دهند.

**مثال:**

(آ) هر گروه آبلی یک گروه پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی ۱ است.

(ب) هر $p$- گروه متناهی پوچتوان است.

**نتیجه ۱.۲.۱.** اگر گروه پوچتوان $G$ زیرگروه ماکسیمالی مانند $M$ داشته باشد، آنگاه $M \trianglelefteq G$ و $G/M$ یک گروه دوری از مرتبه‌ی یک عدد اول است.

**برهان.** به نتیجه‌ی ۷.۱.۱۰، از [۲۸] مراجعه شود □

**تعریف:** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد. مقطع همه‌ی زیرگروهای ماکسیمال $G$ را زیرگروه فراتینی $G$ گویند و آن را با علامت $\Phi(G)$ نشان می‌دهند. هرگاه که $G$ فاقد زیرگروه ماکسیمال باشد، بر طبق

قرار داد $\Phi(G) = G$.

**لم ۲.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد. در این صورت $G$ پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی حداکثر ۲ است اگر وتنها اگر $G' \leq Z(G)$.

**برهان.** فرض کنیم $G$ پوچتوان از رده‌ی پوچتوانی حداکثر۲ باشد، در این صورت اگر $cl(G) = ۱$ آنگاه حکم واضح است زیرا $G = Z(G) \leq G' = ۱$ و اگر $cl(G) = ۲$ آنگاه سری مرکزی $۱ \leq G_۱ \leq G$ را داریم و این یعنی $G_۱ \leq Z(G)$ و $G/G_۱ \leq Z(G/G_۱)$ لذا $G/G_۱ = Z(G/G_۱)$ پس $G/G_۱$ آبلی است بنابراین $G' \leq G_۱$ در نتیجه $G' \leq G_۱ \leq Z(G)$ و حکم نتیجه می‌شود. و بر عکس، اگر $G' \leq Z(G)$ آنگاه سری $۱ \leq Z(G) \leq G$ یک سری مرکزی است در نتیجه $cl(G) \leq ۲$. $\square$

**قضیه ۳.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی باشد. در این صورت $G$ پوچتوان است اگر و تنها اگر $G' \leq \Phi(G)$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۵.۳.۱۰، از [۲۸] مراجعه شود. $\square$

**قضیه ۴.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک $p$- گروه متناهی باشد. در این صورت $\Phi(G) = G'G^p$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۶.۳.۱۰، از [۲۸] مراجعه شود. $\square$

**لم ۵.۲.۱.** اگر $G$ یک گروه متناهی و $N \trianglelefteq G$، آنگاه $\Phi(G)N/N \leq \Phi(G/N)$.

**برهان.** داریم $\Phi(G/N) = \cap(M/N) = \cap M/N$ که $M$ ماکسیمال در $G$ است و $N < M$، از طرفی داریم $\Phi(G) \leq \cap M$ که $M$ ماکسیمال در $G$ است و $N < M$، لذا $\Phi(G)N/N \leq \cap M/N$ و یا $\Phi(G)/N \leq \Phi(G/N)$. $\square$

**لم ۶.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه باشد و $N \trianglelefteq G$. در این صورت اگر $N \leq \Phi(G)$ آن گاه $\Phi(G/N) = \Phi(G)/N$.

**برهان.** فرض کنید $M$ یک زیرگروه ماکسیمال دلخواه $G$ باشد، داریم $N \leq \Phi(G) < M$، چون $N \trianglelefteq G$ لذا می‌توانیم $M/N$ را تشکیل دهیم. از طرفی اگر $M$ زیرگروه ماکسیمال $G$ باشد، آنگاه $M/N$ زیرگروه ماکسیمال $G/N$ است. بنابراین $\Phi(G/N) = \cap(M/N) = \cap M/N = \Phi(G)/N$ که $M$ در $G$ ماکسیمال است. □

**نتیجه ۷.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک $p$- گروه متناهی باشد. در این صورت $\Phi(G/G') = \Phi(G)/G'$.

**برهان.** از قضیه‌ی ۳.۲.۱، و لم ۶.۲.۱، نتیجه می‌شود. □

**قرارداد:** علامت $d(G)$ را برای نمایش کوچکترین عدد طبیعی $d$ به کار می‌بریم که گروه $G$ با $d$ عضو تولید می‌شود.

**قضیه ۸.۲.۱.** (قضیه‌ی پایه‌ی برنساید) فرض کنیم $G$ یک $p$- گروه متناهی و $|G/\Phi(G)| = p^r$. در این صورت هر مجموعه‌ی مولد $G$ با $t$ عضو، زیرمجموعه‌ای با $r$ عضو دارد که $G$ را تولید می‌کند، و $d(G) = r$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۸.۳.۱۰، از [۲۸] مراجعه شود. □

**تعریف:** فرض کنیم $G$ یک گروه متناهی و $G'$ زیرگروه مشتق آن باشد. در این صورت رتبه‌ی $G$ برابر با تعداد مولدهای مینیمال $G/G'$ می‌باشد که آن را با $rank(G)$ نشان می‌دهیم، و به عبارتی یعنی $rank(G) = d(G/G')$.

**لم ۹.۲.۱.** فرض کنیم $G$ یک $p$- گروه متناهی باشد، در این صورت $rank(G/G') = d(G)$.

**برهان.** طبق نتیجه‌ی ۷.۲.۱، داریم $\Phi(G/G') = \Phi(G)/G'$ بنابراین

$$|G/\Phi(G)| = |G/G'/\Phi(G/G')|$$

لذا طبق قضیه‌ی پایه‌ی برنساید نتیجه حاصل می‌شود. □

**لم ۱۰.۲.۱.** اگر $N \trianglelefteq G$، آنگاه $(\frac{G}{N})' = \frac{G'N}{N}$.

**برهان.** مقدماتی است. □

**تعریف:** گروه $G$ را حلپذیر می نامیم در صورتی که یک سری زیرنرمال مانند

$$۱ = G_۰ \trianglelefteq G_۱ \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_r = G$$

داشته باشد به طوری که به ازای هر $i$ که $۱ \leq i \leq r$، گروه $G_i/G_{i-۱}$ آبلی باشد. اگر $G$ حلپذیر باشد، طول کوتاهترین سری با خاصیت مذکور را طول حلپذیری $G$ می‌نامند. گروه $G$ را حل‌ناپذیر گویند هر گاه حلپذیر نباشد.

**قضیه ۱.۲.۱۱.** فرض کنیم $G$ یک گروه حلپذیر باشد. دراین صورت اگر $H \leq G$ و $\theta$ یک همریختی $G$ باشد آنگاه $H$ و $Im\ \theta$ نیز حلپذیرند.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱.۱.۱۱، از [۲۸] مراجعه شود. □

## ۳.۱ نمایش آزاد گروه‌ها

**تعریف:** فرض کنیم $F$ یک گروه، $X$ یک مجموعه و $\theta : X \longrightarrow F$ تابعی باشد. در این صورت $(F, \theta)$ را بر $X$ آزاد گوییم، هر گاه به ازای هر گروه مانند $G$ و هر تابع مانند $\alpha : X \longrightarrow G$ یک همریختی منحصر بفرد مانند $\beta : F \longrightarrow G$ موجود باشد به طوری که $\alpha = \beta\theta$.

**نتیجه ۱.۳.۱.** هرگروه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.

**برهان.** به نتیجه ۴.۱.۷، از [۲۸] مراجعه شود. □

**قرارداد:** فرض کنیم $F(X)$گروه آزاد ساخته شده بر مجموعه‌ی $X$ باشد.

**تعریف:** فرض کنیم $X$ یک مجموعه و $R \subseteq F(X)$. در این صورت گروه خارج قسمتی $F(X)/\overline{R}$ را با علامت $\langle X|R \rangle$ نشان می‌دهیم و آن را یک نمایش آزاد گروه $F(X)/\overline{R}$ می‌گوییم. ($\overline{R}$ یعنی بستار نرمال $R$ در $F(X)$.)

**قضیه ۲.۳.۱.** هرگروه متناهی، متناهی نمایش است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱.۲.۷، از [۲۸] مراجعه شود. □

**قضیه ۳.۳.۱.** (قضیه‌ی جایگذاری). فرض کنیم $G = \langle X|R \rangle$، $H$ یک گروه، $\theta : X \longrightarrow H$ نگاشتی مفروض باشد. دراین صورت اگر به ازای هر $x$ از $X$ و هر $r$ از $R$ حاصل جایگذاری $x\theta$ به جای $x$ در $r$ عضو همانی $H$ باشد آنگاه یک همریختی مانند $\gamma : G \longrightarrow H$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $x$ از $X$، $(\overline{R}x)\gamma = x\theta$. به علاوه هر گاه $H = \langle X\theta \rangle$ آنگاه $\gamma$ بروریختی است.

**برهان.** به قضیه‌ی ۵.۲.۷، از [۲۸] مراجعه شود. □

**قضیه ۴.۳.۱.** فرض کنیم $G = \langle X|R \rangle$ و $H = \langle Y|S \rangle$. در این صورت

$$G \times H \cong \langle X \cup Y | R \cup S \cup [X, Y] \rangle$$

که درآن $[X, Y] = \{[x, y] | x \in X, y \in Y\}$.

**برهان.** به قضیه‌ی ۶.۲.۷، از [۲۸] مراجعه شود. □

## ۴.۱ همریختی‌ها،خودریختی‌ها و حاصلضرب نیم‌مستقیم

**قرارداد:** در این رساله اثر همریختی $f$ روی عضو $x$ را با $xf$ یا $x^f$ نشان می‌دهیم.

**قضیه ۱.۴.۱.**

(آ) هر گاه $\varphi : G \longrightarrow H$ یک همریختی یک به یک باشد، آنگاه $G \cong G\varphi$، و به ازای هر زیرگروه $K$ از $G$، $K \cong K\varphi$.

(ب) $G$ را می‌توان در $H$ نشانید اگر و تنها اگر $G$ با یک زیرگروه $H$ یکریخت باشد.

**برهان.** به قضیه‌ی ۱۰.۲، از [۲۵] مراجعه شود. □