دانشگاه زنجان

دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

عنوان:

گراف‌های دوبخشی با جورسازی‌های کامل و کاربرد در آجربندی

نگارش:

فاطمه چهاردولی

استاد راهنما:

دکتر محمدرضا قائمی

آبان ۱۳۹۰

بسم الله الرحمن الرحیم

چکیده

فرض کنید G گراف دوبخشی مسطح باشد که دارای جورسازی‌های کامل است. یک گراف همبند، مقدماتی نامیده می‌شود اگر اجتماع همه جورسازی‌های کامل آن یک زیرگراف همبند را تشکیل دهد. در این رساله شرایط مختلف مقدماتی بودن گراف‌های دوبخشی را بیان می‌کنیم. فرض کنید $\mathcal{M}_G$ گراف جورسازی‌های کامل G است که رئوس آن متناظر با جورسازی‌های کامل G می‌باشند. در این‌جا بعضی از ویژگی‌های $\mathcal{M}_G$ مطالعه شده است. یکی از اهداف این رساله مطالعه شرایط لازم و کافی، برای این‌که دو جورسازی کامل از G متعلق به یک مؤلفه همبند از $\mathcal{M}_G$ باشند و همچنین بررسی شرط همبند بودن $\mathcal{M}_G$ است. در ادامه به معرفی چندسلولی‌ها می‌پردازیم. مشاهده می‌شود که در چندسلولی‌ها با جورسازی‌های کامل نیز می‌توان گراف $\mathcal{M}_G$ را به‌دست آورد، به این ترتیب که در $\mathcal{M}_G$ دو رأس مجاور هستند اگر تفاضل متقارن دو جورسازی کامل متناظر آن‌ها دقیقاً شامل یک دور باشد. همچنین به ویژگی همبندی گراف $\mathcal{M}_G$ در چندسلولی‌ها توجه شده است. ثابت می‌شود که همبندی گراف $\mathcal{M}_G$ در چندسلولی‌ها، به‌جز در دو مورد برابر با درجه مینیمم آن است. در پایان، به‌عنوان یک کاربرد به آجربندی چندسلولی‌ها می‌پردازیم.

واژه‌های کلیدی: *جورسازی کامل، گراف مسطح، گراف مقدماتی، چندسلولی، آجربندی.*

فهرست مطالب

پیش گفتار

تحقیق درباره گراف‌های دوبخشی مقدماتی دارای تاریخ طولانی است. در سال ۱۹۱۵ کوینگ[۱] [۲۳] این مفهوم را در مطالعه تجزیه یک دترمینان رایج کرد. بعد از نیم قرن، هتیی[۲] [۱۷] از اصطلاح "مقدماتی" برای مفهوم گرافی که در آن همه یال‌های پذیرفته شده یک زیرگراف همبند را القا می‌کنند، استفاده کرد و ویژگی‌های متفاوتی درباره گراف‌های دوبخشی مقدماتی به‌دست آورد.
پلامر[۳] و لواس[۴] [۲۶] با مطالعه گراف‌های دوبخشی مقدماتی مینیمال نتایج بیشتری را به‌دست آوردند. برای جزئیات بیشتر در این زمینه به کتاب "نظریه جورسازی[۵]" از پلامر و لواس [۲۷] مراجعه کنید. در این رساله گراف‌های دوبخشی مقدماتی مسطح را مطالعه می‌کنیم و برخی از ویژگی‌ها که قبلاً برای سیستم‌های شش‌ضلعی و گراف‌های چندسلولی و غیره، به دست آمده است را در یک راستا مورد بررسی قرار می‌دهیم. در همه موارد گراف‌های دوبخشی مسطح بیش‌تر از دو رأس دارند و با دو رنگ سیاه و سفید رنگ شده‌اند به‌طوری‌که رئوس پایانی هر یال رنگ‌های متفاوتی را دریافت می‌کنند. یکی از اقدامات انجام شده تجزیه گراف G به مؤلفه‌های مقدماتی آن و به‌دست آوردن یک مشخصه برای یال‌هایی که به هیچ جورسازی کاملی تعلق ندارند، که این مشخصه با یک برش یالی در G به‌دست می‌آید. مشاهده می‌کنیم که گراف‌های دوبخشی فاکتورپذیر را می‌توان با کمک یک دنباله از عملگرها که "اجتماع تک‌رده" گراف‌های مقدماتی می‌نامیم، ساخت. سپس گراف‌های دوبخشی "حفره‌دار" را معرفی می‌کنیم. گراف دوبخشی مقدماتی مسطح G و گراف جورسازی‌های کامل که رئوس آن جورسازی‌های کامل G هستند و با $\mathcal{M}_G$ نشان می‌دهیم را درنظر بگیرید. در فصل دوم برخی از ویژگی‌های گراف $\mathcal{M}_G$ را بیان می‌کنیم. در فصل سوم، گراف دوبخشی مسطح "منسجم" را معرفی می‌کنیم. ویژگی انسجام یک رده از گراف‌های دوبخشی مسطح را نشان می‌دهد

[۱] Koing
[۲] *Hetyei*
[۳] *Plummer*
[۴] *Lovasz*
[۵] *Matching Theory*

که در واقع تعمیمی برای رده‌ای از گراف‌های دوبخشی وابسته به چندسلولی‌ها است. درفصل چهارم چندسلولی‌ها را معرفی می‌کنیم و چند مورد از ویژگی‌های گراف جورسازی‌های کامل چندسلولی‌ها را بیان می‌کنیم و نشان می‌دهیم که در چندسلولی‌ها، همبندی گراف $\mathcal{M}_G$ همواره با درجه مینیمم این گراف برابر نیست. فرآیند آجربندی که در فصل پنجم آمده است در واقع تعمیمی برای آجربندی دومینو است که توسط سالدان‌ها[۱] و همکاران [۳۱] بیان شده است و برای این تعمیم از ویژگی انسجام گراف استفاده می‌شود. گیریم P یک هم‌جواری همبند متناهی از مربع‌های واحد در صفحه است. در فصل پنجم به‌عنوان یک کاربرد از چندسلولی‌ها، به آجربندی P توسط دومینوها می‌پردازیم.

[۱] $Saldanha$

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم مقدماتی

تعریف ۱.۰.۱. *گراف G یک سه‌تایی از مجموعه راس‌های $V(G) = \{v_۱, \ldots, v_n\}$ و مجموعه یال‌های $E(G) = \{e_۱, \ldots, e_n\}$ و رابطه‌ای است که به هر یال دو رأس نه لزوماً مجزا را نسبت می‌دهد.*

تعریف ۲.۰.۱. *یک گراف دوبخشی است اگر مجموعه رأسی آن قابل افراز به دو مجموعه A و B باشد به‌طوری‌که هر یال در $E(G)$ یک نقطه پایانی در A و یک نقطه پایانی در B داشته باشد. گراف دوبخشی G را با $G = (A, B)$ نشان می‌دهیم.*

تعریف ۳.۰.۱. *H را یک زیرگراف از گراف G می‌گوییم اگر $V(H) \subseteq V(G)$ و $E(H) \subseteq E(G)$. همچنین نقاط پایانی یال‌ها در H و G یکسان هستند. می‌نویسیم $H \subseteq G$ و می‌گوییم "G شامل H" است.*

تعریف ۴.۰.۱. *گراف G همبند است اگر بین هر جفت از رئوس G یک مسیر وجود داشته باشد، در غیر این‌صورت گراف را ناهمبند می‌نامیم.*

تعریف ۵.۰.۱. *مؤلفه‌های گراف G، زیرگراف‌های همبند ماکسیمال آن هستند.*

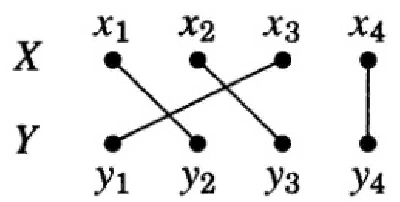
تعریف ۶.۰.۱. *جورسازی M در G مجموعه‌ای از یال‌های دوبه‌دو نامجاور در G است.*

تعریف ۷.۰.۱. *جورسازی M از گراف G را درنظر بگیرید. منظور از یک مسیر M-متناوب مسیری است که یال‌های آن به‌طور متناوب متعلق به M باشند.*

تعریف ۱.۰.۸. *اگر M یک جورسازی باشد، $V(M)$ نشان دهنده زیرمجموعه‌ای از رئوس G است که توسط یال‌های M القا شده است. این رئوس را آلوده و رئوس باقی‌مانده را ناآلوده می‌نامیم.*

تعریف ۱.۰.۹. *یک جورسازی کامل در گراف جورسازی است که همه رأس‌ها را آلوده می‌کند.*

مثال. جورسازی‌های کامل در $K_{n,n}$. مجموعه‌های بخشی گراف $K_{n,n}$ را به‌صورت $X = x_{۱}, \ldots, x_n$ و $Y = y_{۱}, \ldots, y_n$ درنظر بگیرید. یک جورسازی کامل یک نگاشت دوسویی از X به Y است. با یافتن جفت برای هر x_i $(۱ \leq i \leq n)$، $n!$ جورسازی کامل به‌دست می‌آید. هر جورسازی با یک جایگشت از $[n]$، هنگامی که x_i با y_j جور می‌شود، i را به j متصل می‌کند. می‌توان جورسازی‌ها را با یک ماتریس نشان داد. کافی است سطرها و ستون‌ها را با X و Y اندیس‌گذاری کرد. به این ترتیب که اگر یال x_iy_j متعلق به جورسازی M موجود باشد آن‌گاه در سطر i، ستون j ماتریس متناظر عدد ۱ و در غیر این‌صورت ۰ را قرار می‌دهیم. در هر سطر و در هر ستون تنها یک ۱ وجود دارد.



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

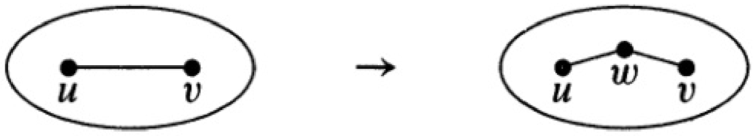
شکل ۱.۱:

تعریف ۱.۰.۱۰. *دو جورسازی مجزا- یال هستند اگر دارای هیچ یال مشترکی نباشند.*

تعریف ۱.۰.۱۱. *گراف G را* **۱-فاکتورپذیر** *می‌گوییم، اگر دارای یک جورسازی کامل باشد.*

تعریف ۱.۰.۱۲. *در گراف G منظور از زیرتقسیم یک یال uv، درنظر گرفتن مسیر uwv با استفاده از رأس جدید w به جای یال uv است.*

تعریف ۱.۰.۱۳. *یک مجموعه جداساز یا یک برش رأسی در گراف G، مجموعه $S \subseteq V(G)$ است به‌طوری‌که $G - S$ بیشتر از یک مؤلفه دارد. همبندی رأسی گراف G برابر با مینیمم اندازه یک مجموعه رأسی S است در حالی که $G - S$ ناهمبند نیست یا دارای یک رأس تنها است. یک گراف k- همبند است اگر همبندی آن حداقل k باشد.*



شکل ۲.۱: زیرتقسیم یک یال

فرع ۱۴.۰.۱. *اگر G، ۲-همبند باشد آن‌گاه گراف G' حاصل از زیرتقسیم یک یال از G نیز ۲-همبند است.*

برهان. فرض کنید G' گراف حاصل از زیرتقسیم یال uv با استفاده از رأس جدید w در G است. برای این که نشان دهیم G'، ۲-همبند است کافی است یک دور شامل یال‌های دلخواه e و f در G' بیابیم (فرض کنید، $e = uw$ و $f = wv$ است). چون G، ۲-همبند است هر دو یال از G روی یک دور مشترک قرار دارند. یال‌های مذکور e و f از G' واقع در G را درنظر بگیرید. یک دور در G شامل آن‌ها در G' نیز یک دور است. مگر این‌که از یال uv استفاده کنیم، در حالی‌که دور تغییر یافته است. منظور از "دور تغییر یافته" درنظر گرفتن uv-مسیر به طول ۲ از طریق رأس w، به جای یال uv است. هنگامی که $e \in E(G)$ و $f \in \{uw, wv\}$، دور را با عبور از e و یال uv تغییر می‌دهیم. اگر $\{e, f\} = \{uw, wv\}$، آن‌گاه دور از طریق uv تغییر یافته است. ■

حدس ۱۵.۰.۱. (*حدس ۱-فاکتورپذیری*): *هر گراف منتظم از مرتبه $2n$ و درجه $d \geq n$، ۱-فاکتورپذیر است.*

برهان. به منبع [۶] رجوع شود. ■

قضیه ۱۶.۰.۱. (*قضیه هال* [۱]) *گیریم $G = (A, B)$ یک گراف دوبخشی باشد، آن‌گاه G دارای یک جورسازی از A به B است اگروتنهااگر برای هر $X \subseteq A$، داشته باشیم $|N(X)| \leq |X|$.*

برهان. به منبع [۲۶] رجوع شود. ■

قضیه ۱۷.۰.۱. (*قضیه ازدواج* [۲]) *گراف دوبخشی $G = (A, B)$ دارای جورسازی کامل است اگروتنهااگر $|A| = |B|$ و برای هر $X \subseteq A$، داشته باشیم $|N(X)| \leq |X|$.*

[۱] $Hall$

[۲] $Marriage$

برهان. به منبع [۲۶] رجوع شود. ■

تعریف ۱.۰.۱۸. *یال e را در گراف G* **پذیرفته شده** *می‌گوییم، اگر جورسازی کامل M از G شامل یال e موجود باشد. در غیر این‌صورت این یال را غیرمجاز می‌نامیم.*

مثال . در شکل ۱.۳، یال‌های کم‌رنگ متعلق به جورسازی کامل M هستند و لذا پذیرفته شده می‌باشند.

شکل ۱.۳: مثال برای یال پذیرفته شده

تعریف ۱.۰.۱۹. *گراف G را* **مقدماتی** *گوییم، اگر زیرگراف حاصل از یال‌های پذیرفته شده آن همبند باشد. به بیان دیگر، گراف دوبخشی G با افراز رأسی (A, B) که به صورت $G = (A, B)$ نشان داده می‌شود، مقدماتی است اگر G همبند باشد و همه یال‌های آن پذیرفته شده باشند.*

تذکر ۱.۰.۲۰. *اگر G هر گرافی به جز K_2 و G' گراف حاصل از زیرتقسیم یال e در G با دو نقطه باشد، آن‌گاه G' مقدماتی است اگروتنهااگر یال e در G پذیرفته شده باشد.*

تعریف ۱.۰.۲۱. *در گراف دوبخشی G که دارای جورسازی کامل است با حذف همه یال‌های غیرمجاز، هر مؤلفه از گراف حاصل مقدماتی است. به‌عبارت دیگر، مؤلفه‌های همبند در زیرگراف حاصل از یال‌های پذیرفته شده G،* **مؤلفه‌های مقدماتی** *G نامیده می‌شوند.*

تذکر ۱.۰.۲۲. *یک مؤلفه مقدماتی می‌تواند به کوچکی یک رأس تنها در G باشد. به این مؤلفه‌های مقدماتی* **منحط** [1] *می‌گویند.*

تذکر ۱.۰.۲۳. *اگر G مقدماتی باشد با افزودن چند یال به آن باز هم گراف حاصل مقدماتی است.*

برهان. با فرض مقدماتی بودن گراف G بنابر تعریف، زیرگراف حاصل از یال‌های پذیرفته شده آن همبند است. لذا با افزودن چند یال به آن باز هم این ویژگی حفظ می‌شود. ■

[1] Degenerate

تعریف ۲۴.۰.۱. فرض کنید P نشان دهنده مجموعه رئوس گراف G است. گراف G به ازای $n \leq (P-۲)/۲$، n-توسعه‌پذیر گفته می‌شود اگر هر جورسازی شامل n یال درون یک جورسازی کامل باشد [۳۰]. پلامر نشان داد که یک گراف n-توسعه‌پذیر، $(n+۱)$-همبند است. به عبارت دیگر، گراف همبند G با جورسازی کامل روی $۲k$ رأس وقتی $۱ \leq n \leq k-۱$، n-توسعه‌پذیر گفته می‌شود، اگر برای هر جورسازی M از اندازه n در G یک جورسازی کامل در G شامل همه یال‌های M وجود داشته باشد [۴۰].

تعریف ۲۵.۰.۱. اگر G دارای یک جورسازی کامل باشد همبند است و همه یال‌های آن پذیرفته شده هستند در این صورت می‌گوییم گراف G، ۱-توسعه‌پذیر است. لذا هر گراف ۱-توسعه‌پذیر مقدماتی است.

تذکر ۲۶.۰.۱. در گراف مقدماتی یال‌های پذیرفته شده یک زیرگراف ۱-توسعه‌پذیر فراگیر را تشکیل می‌دهند.

تذکر ۲۷.۰.۱. گیریم G گرافی به جز $K_۲$ و G' گراف حاصل از زیرتقسیم یال e در G با دو نقطه است، آن‌گاه G' مقدماتی است اگروتنهااگر یال e در G پذیرفته شده باشد.

تعریف ۲۸.۰.۱. پوشش رأسی گراف G، مجموعه $Q \subseteq V(G)$ است که شامل حداقل یک نقطه پایانی از هر یال است. مجموعه Q، $E(G)$ را می‌پوشاند.

لم ۲۹.۰.۱. فرض کنید G یک گراف دوبخشی با افراز (A,B) است. شرایط زیر هم‌ارز هستند:

۱. G مقدماتی است،

۲. G دقیقاً دو پوشش رأسی مینیمم دارد،

۳. $|A|$=$|B|$ و برای هر زیرمجموعه سره X از A داریم: $|X| < |N(X)|$ ($N(X)$ مجموعه همسایه‌های X است)،

۴. $G = K_۲$ یا $|V(G)| \geq ۴$ و برای هر $a \in A$ و $b \in B$، $G-a-b$ دارای یک جورسازی کامل است،

۵. G همبند است و هر یال از G در یک جورسازی کامل قرار دارد.

شرایط فوق گراف‌های دوبخشی مقدماتی را تعیین می‌کنند.

برهان. (۲ $\rightarrow$ ۱) گیریم G دارای پوشش رأسی مینیمم K است به‌طوری‌که

$K_B = K \cap B \neq \emptyset \neq K \cap A = K_A.$

بنابراین K زیرمجموعه‌ای از رئوس G است به‌طوری‌که $K_B \subseteq B$ و $K_A \subseteq A$، یعنی K حداقل یک نقطه پایانی از هر یال را شامل است. زیرگراف القایی $G[K]$، شامل یال پذیرفته شده ab را درنظر بگیرید. فرض کنید M یک جورسازی کامل از G شامل یال ab است. از آن‌جا که M جورسازی کامل است باید همه رئوس G را آلوده کند. لذا با توجه به تعریف جورسازی کامل و پوشش رأسی مینیمم M، $B - K_B$ را به K_A و $A - K_A$ را به K_B متصل می‌کند. از طرفی K_A دارای یال e متصل به K_B نیز هست، یعنی یک رأس متصل به جایی به‌جز $B - K_۲$ دارد. بنابراین $|B - K_B| < |K_A|$. اما B یک پوشش است و $|B| = |K_B| + |B - K_B| < |K_B| + |K_A| = |K|$، که با مینیمال بودن K در تناقض است. در نتیجه همه یال‌های $G[K]$ غیرمجاز هستند. اما حذف همه یال‌ها در $G[K]$، G را ناهمبند می‌کند و بنابراین G مقدماتی نیست.

(۳ $\rightarrow$ ۲) با توجه به این‌که گراف دوبخشی مقدماتی می‌باشد بدیهی است که $|B| = |A|$ می‌باشد. گیریم مجموعه $B \neq X \neq \emptyset$، $X \subseteq B$ موجود است به‌طوری‌که $|N(X)| \leq |X|$. حال $(B - X) \cup N(X)$، G را می‌پوشاند و $|(B - X) \cup N(X)| = |B - X| + |N(X)| \leq |B - X| + |X| = |B|$ بنابراین $(B - X) \cup N(X)$ یک پوشش رأسی مینیمم برای G است. اما $B - X \neq \emptyset$ (X زیرمجموعه سره برای B است) پس با فرض $N(X) = \emptyset$ یعنی X مجموعه‌ای از رئوس تنها است. که نتیجه می‌دهد $B - X$، G را می‌پوشاند و $|B - X| < |B|$ که تناقض است.

(۴ $\rightarrow$ ۳) فرض کنید $G \neq K_۲$. چون $|A| = |B|$، پس $|V(G)| \geq ۴$. گیریم $b \in B$ و $a \in A$ و همچنین $H = G - a - b$. حال با استفاده از قضیه ازدواج ثابت می‌کنیم H دارای یک جورسازی کامل است. مجموعه $X \subseteq B - b$، $X \neq \emptyset$ را درنظر می‌گیریم. فرض کنید $|N_H(X)| < |X|$، بنابراین $|N_G(X)| \leq |N_H(X)| + ۱ \leq |X|$. به‌علاوه $X \neq B$ و با (۳) در تناقض است.

(۵ $\rightarrow$ ۴) اگر $G = K_۲$ حکم برقرار است. پس فرض کنید $|V(G)| \geq ۴$ و G ناهمبند است. گیریم $G_۱$ یک مؤلفه از G است به‌طوری‌که $|V(G_۱) \cap B| \leq |V(G_۱) \cap A|$. فرض کنید $b \in V(G_۱) \cap B$ و $a \in A - V(G_۱)$. پس $G - a - b$ دارای هیچ جورسازی کاملی نیست که تناقض است. بنابراین G همبند است و هر یال G پذیرفته شده است.

(۱ $\rightarrow$ ۵) با توجه به تعریف گراف مقدماتی بدیهی است. ■

فرع ۱.۰.۳۰. *یک گراف دوبخشی مقدماتی است اگر وتنها اگر $X \subseteq A$ وجود نداشته باشد به‌طوری‌که $X \neq \emptyset$ و $X \neq A$ و $|N(X)| = |X|$.*

برهان. فرض کنید G یک گراف دوبخشی مقدماتی است. آن‌گاه بنابر لم ۱.۰.۲۹، مجموعه‌های بخشی گراف هم اندازه هستند و برای هر زیرگراف سره X از A داریم $|N(X)| > |X|$ که این مطلب با شرایط دیگر هم‌ارز است. برعکس، اگر $X \subset A$ وجود داشته باشد که $|N(X)| = |X|$ با شرط ۳ لم ۱.۰.۲۹، به تناقض می‌رسیم. ∎

قضیه ۱.۰.۳۱. *(پلامر[1] و لواس[2]) فرض کنید $G = (A, B)$ یک گراف دوبخشی و دارای یک جورسازی کامل است، آن‌گاه G مقدماتی است اگر وتنها اگر برای هر $A \supset X \neq \emptyset$ داریم $|N_G(X)| > |X|$.*

برهان. به منبع [۲۶] رجوع شود. ∎

تذکر ۱.۰.۳۲. *یک گراف دوبخشی مقدماتی یا ۲-همبند است یا یک یال ساده با دو رأس پایانی (به شکل K_2) است. در واقع یک رأس برشی نمی‌تواند موجود باشد زیرا داریم، گراف دوبخشی همبند G مقدماتی است اگر وتنها اگر ۱-توسعه‌پذیر باشد یعنی هر یال به یک جورسازی کامل از G تعلق داشته باشد. پس گراف دوبخشی مقدماتی G، ۲-همبند است.*

تعریف ۱.۰.۳۳. *فرض کنید G یک گراف دوبخشی ۱-فاکتورپذیر است، A مجموعه‌ای از یال‌های پذیرفته شده G و H زیرگراف القایی G به وسیله A است، مؤلفه‌های همبند H گراف‌های دوبخشی مقدماتی هستند که مؤلفه‌های مقدماتی G نامیده می‌شوند و با هم* **تجزیه مقدماتی** *G را تشکیل می‌دهند.*

لم ۱.۰.۳۴. *هر مؤلفه مقدماتی در G یک زیرگراف القایی برای G است. تجزیه مقدماتی G تنها تجزیه از G به زیرگراف‌های مقدماتی القایی است به‌طوری‌که هر جورسازی کامل G به جورسازی‌های کامل این زیرگراف‌ها تفکیک می‌شود.*

برهان. فرض کنید C یک مؤلفه مقدماتی برای G و یک مؤلفه همبند برای H است. لذا C گراف دوبخشی مقدماتی است و شرایط لم ۱.۰.۲۹ را دارد. برای هر یال G داریم، $e = xy$ به طوری‌که

[1] Plummer

[2] Lóvasz

$x, y \in C$. با توجه به شرط (۴) از لم ۲۹.۰.۱، یک جورسازی کامل از $C - x - y$ وجود دارد، آن را M می‌نامیم، پس $M + e$ یک جورسازی کامل برای C است. به همین ترتیب هر مؤلفه مقدماتی دارای یک جورسازی کامل است. همراه با هر جورسازی کامل از دیگر مؤلفه‌های مقدماتی همبند G، $M + e$ تشکیل یک جورسازی کامل را برای G می‌دهد در حالی که شامل یال e است. همچنین e متعلق به C است و C یک زیرگراف القایی از G است. با فرض این‌که G دارای جورسازی کامل است، منظور از تجزیه مقدماتی G یعنی تجزیه G به زیرگراف‌های مقدماتی القایی آن به‌طوری‌که هر جورسازی کامل G به جورسازی‌های کامل این زیرگراف‌ها تقسیم می‌شود. در واقع با حذف یال‌های غیرمجاز، G را به مؤلفه‌های مقدماتی آن تجزیه می‌کنیم که با توجه به تعریف مؤلفه مقدماتی این تجزیه منحصربه‌فرد است. ■

حال بررسی می‌کنیم که چه چیزی را دیگراف مؤلفه‌های مقدماتی G می‌نامیم: برای ساختن دیگراف، متناظر با هر مؤلفه مقدماتی G، یک رأس قرار می‌دهیم. دو تا از مؤلفه‌ها که C_1 و C_2 می‌نامیم را درنظر بگیرید. (رأس c_1 را متناظر با مؤلفه C_1 و رأس c_2 را متناظر با مؤلفه C_2 درنظر می‌گیریم) اگر در G یالی باشد که رأس $x_1 \in A \cap C_1$ و رأس $x_2 \in B \cap C_2$ را متصل کند آن‌گاه این دو مؤلفه توسط یک یال جهت‌دار از C_1 به C_2 متصل می‌شوند. در این حالت می‌توانیم از c_1 به c_2 یک یال جهت‌دار رسم کنیم. یادآوری می‌کنیم که (A, B) یک افراز برای G است. نتیجه به‌دست آمده برای توصیف ساختار گراف‌های دوبخشی فاکتورپذیر مفید خواهد بود.

لم ۳۵.۰.۱. *دیگراف مؤلفه‌های مقدماتی بی‌دور است.*

برهان . گیریم یک مدار در دیگراف مؤلفه‌های مقدماتی G وجود دارد. چنین مداری در G مانند یک دنباله به‌صورت $(C_1, a_1, C_2, a_2, ..., C_k, a_k, C_1)$ است که $C_1, ..., C_k$، مؤلفه‌های مقدماتی G هستند و برای هر $i = 1, ..., k - 1$، a_i یال جهت‌دار (x_i, y_i) است به‌طوری‌که $x_i \in C_i \bigcap A$ و $y_i \in C_{i+1} \bigcap B$. همچنین a_k یال جهت‌دار (x_k, y_k) می‌باشد به‌طوری‌که $x_k \in C_k \bigcap A$ و $y_k \in C_1 \bigcap B$. توجه کنید که یال‌های بدون جهت G، $x_i y_j$ $(i = 1, ..., k)$ پذیرفته شده نیستند. مطابق با شرط (۴) در لم ۲۹.۰.۱، یک جورسازی کامل در هر $C_i - x_i - y_i$ $(i = 2, ..., k)$ وجود دارد، آن را M_i می‌نامیم و در $C_1 - x_1 - y_k$ یک جورسازی کامل وجود دارد که آن را M_1 می نامیم. آن‌گاه $M = M_1 \cup M_2 \cup ... \cup M_k \cup \{x_1 y_1, ..., x_k y_k\}$ یک جورسازی کامل از $C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_k$ است. هم‌زمان با هر جورسازی کامل از دیگر مؤلفه‌های مقدماتی G، یک جورسازی کامل برای G

به‌دست می‌آوریم که شامل یال‌های x_iy_j است و به این ترتیب به تناقض می‌رسیم. ■

تعریف ۳۶.۰.۱. *فرض کنید G یک گراف دوبخشی فاکتورپذیر با افراز (A, B) است. تجزیه برش- یال G را یک مجموعه از یال‌های G که متصل کننده یک رأس از $N(S)$ و یک رأس از $A \setminus S$ هستند، تعریف می‌کنیم که در این‌جا S یک زیرمجموعه از A است به‌طوری‌که $|S| = |N(S)|$.*

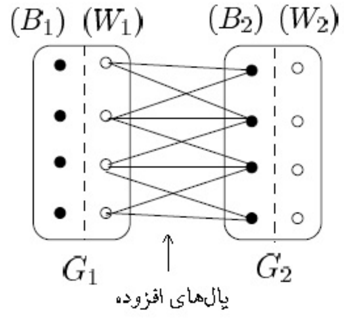
لم ۳۷.۰.۱. *در گراف دوبخشی فاکتورپذیر G یک یال پذیرفته شده است اگروتنهااگر متعلق به تجزیه برش- یال از G نباشد.*

برهان. به منبع [۱۲] رجوع شود. ■

قضیه ۳۸.۰.۱. *مؤلفه‌های مقدماتی گراف دوبخشی فاکتورپذیر G، مؤلفه‌های همبند در گرافی هستند که با حذف یال‌های متعلق به یک تجزیه برش- یال از G به‌دست آمده‌اند.*

برهان . بنابر لم ۳۷.۰.۱، هر یال در گراف دوبخشی فاکتورپذیر یا پذیرفته شده است یا متعلق به تجزیه برش-یال است. پس با حذف یال‌های برش-یال، یال‌های باقی مانده همه پذیرفته شده هستند و مؤلفه‌های همبند را تشکیل می‌دهند که این مؤلفه‌ها گراف‌های دوبخشی مقدماتی می‌باشند و مؤلفه‌های مقدماتی G نامیده می‌شوند و با توجه به تعریف مؤلفه مقدماتی حکم بدیهی است. ■

تذکر ۳۹.۰.۱. *یک مؤلفه مقدماتی می‌تواند به کوچکی یک یال ساده با رئوس پایانی باشد. در واقع، این حالت متناظر با یالی است که به همه جورسازی‌های کامل گراف تعلق دارد.*



شکل ۴.۱: اجتماع تک‌رده دو گراف دوبخشی

تعریف ۴۰.۰.۱. *دو گراف دوبخشی همبند $G_۱$ با افراز $(A_۱, B_۱)$ و $G_۲$ با افراز $(A_۲, B_۲)$ را درنظر بگیرید. یک اجتماع تک‌رده از $G_۱$ و $G_۲$ هر گراف همبندی است که با قرار دادن هر دوی $G_۱$ و $G_۲$ و یال‌های افزوده (حداقل یکی) به‌دست می‌آید. یال‌های افزوده رئوس یک رده از $G_۱$ را به رئوس یک رده از $G_۲$ متصل می‌کنند (شکل ۱. ۴ را ببینید). در این‌جا دو رده مورد توجه از $G_۱$ و $G_۲$ به ترتیب $A_۱$ و $B_۲$ هستند.*

لم ۴۱.۰.۱. *اجتماع تک‌رده G از $G_۱$ و $G_۲$ یک گراف دوبخشی است و اگر $G_۱$ و $G_۲$ دارای جورسازی کامل باشند، آن‌گاه G نیز جورسازی کامل دارد.*

برهان . دوبخشی بودن واضح است. وجود جورسازی کامل در G با توجه به لم ۳۴.۰.۱، بدیهی است. در واقع اجتماع جورسازی‌های کامل $G_۱$ و $G_۲$ یک جورسازی کامل برای G است. ■

عملگر اجتماع تک‌رده تعمیم بازسازی گراف‌های دوبخشی ۱-فاکتورپذیر را با شروع از یک گراف دوبخشی مقدماتی مجاز می‌کند.

تعریف ۴۲.۰.۱. *در دیگراف G یک رأس را منبع می‌گوییم اگر همه یال‌های متصل به آن رأس، یال خروجی باشند (درجه رأس ورودی آن صفر باشد)، و یک رأس را چاهک می‌نامیم اگر همه یال‌های متصل به آن رأس، یال ورودی باشند (درجه خروجی آن صفر باشد).*

لم ۴۳.۰.۱. *فرض کنید G یک دیگراف همبند بی‌دور است که رئوس آن به‌صورت $s_۱, s_۲, \cdots, s_n$ مرتب شده‌اند به‌طوری‌که برای $i = ۱, ۲, \cdots, n$:*

۱. *زیرگراف G القا شده توسط $s_۱, s_۲, \cdots, s_i$ که با G_i نشان می‌دهیم، همبند است،*

۲. *رأس s_i یک رأس منبع یا چاهک برای G_i است.*

برهان. اثبات را با استقراء روی تعداد رأس‌های G انجام می‌دهیم. گوییم یک رأس **اکسترمال** است اگر منبع یا چاهک باشد. فرض کنید بتوانیم نشان دهیم که یک رأس s_n وجود دارد که اکسترمال است ولی رأس برشی نیست، آن‌گاه $G\backslash s_n$ یک دیگراف همبند بی‌دور خواهد بود که بنابر استقراء رئوس آن با $s_۱, s_۲, \cdots, s_{n-۱}$ قابل برچسب‌گذاری است. حال کافی است نشان دهیم که G شامل یک رأس است که اکسترمال است ولی رأس برشی نیست. فرض کنید v یک رأس دلخواه از G است و x رأس اکسترمال G است که دورترین رأس از v است. ادعا می‌کنیم که x رأس برشی نیست.

فرض کنید x رأس برشی است. بدون کاستن از کلیت، فرض کنید که x منبع است. حال $G\backslash x$ شامل حداقل دو مؤلفه است، پس فرض کنید T یک مؤلفه از $G\backslash x$ است که شامل رأس v نیست. گیریم w یک چاهک برای T است. توجه کنید که w لزوماً یک چاهک برای G نیز هست. اما فاصله w از v بیشتر از فاصله x تا v است، زیرا طبق فرض x رأس برشی است و با حذف آن گراف حداقل به دو مؤلفه مجزا تبدیل می‌شود. از طرفی رأس w و v در دو مؤلفه مجزا هستند یعنی برای رفتن از w به v مسیری وجود ندارد و هر مسیر از w به v باید از x بگذرد. این یک تناقض است و حکم برقرار است. ■

می‌توانیم یک برهان دیگر برای این لم ارائه دهیم. فرض کنید $t_۱, t_۲, \cdots, t_n$، رأس‌های G در یک ترتیب بی‌دور باشند. رئوس G را در دنباله $s_۱, s_۲, \cdots, s_n$ با الگوریتم زیر مرتب می‌کنیم، که در آن S نشان دهنده یک مجموعه از رئوس G_i و $N^+(S)$ نشان دهنده مجموعه رئوس تالی S و $N^-(S)$ نشان دهنده مجموعه رئوس ماقبل S است:

$s_1 := t_1; S = s_1;$

for $i = 2 \ldots n$ do

{if $N^+(S)\backslash S \neq \emptyset$

then set $s_i = t_j$ where $t_j \in N^+(S)\backslash S$ with j minimum;

else set $s_i = t_j$ where $t_j \in N^-(S)\backslash S$ with j maximum;

end if;}

add s_i to S;

end for;

در زیر یک قضیه مهم را ارائه می‌دهیم:

قضیه ۴۴.۰.۱. *فرض کنید G گراف دوبخشی همبند است. گراف G، ۱-فاکتورپذیر است اگر و تنها اگر دنباله $G_۰, G_۱, \cdots, G_p = G$ از گراف‌های دوبخشی موجود باشد به‌طوری‌که:*

۱. *$G_۰$ مقدماتی باشد،*

۲. *برای $i = ۱, \cdots, p$، G_i یک اجتماع تک‌رده از $G_{i-۱}$ و گراف دوبخشی مقدماتی H_i است.*

که در این‌جا، $H_۰ = G_۰, H_۱, H_۲, \cdots, H_p$ مؤلفه‌های مقدماتی G هستند.

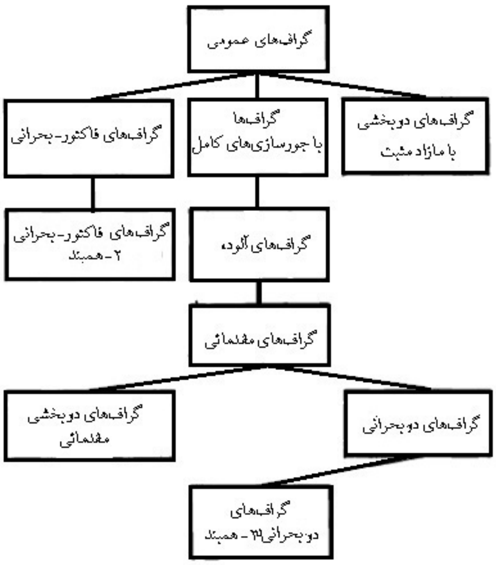
برهان . گیریم G گرافی است که در شرایط قضیه صادق است. با توجه به لم ۴۱.۰.۱ و با استفاده از استقراء روی i می‌بینیم که G_i گراف دوبخشی ۱-فاکتورپذیر است، پس $G = G_p$ گراف دوبخشی ۱-فاکتورپذیر است. با استفاده از استقراء روی i ثابت می‌کنیم که مؤلفه‌های مقدماتی G_i، $H_0, H_1, \cdots, H_i$ هستند. این ویژگی برای $i = 0$ واضح است چون G_0 مقدماتی است. فرض کنید $i > 0$. گراف G_i اجتماع تک‌رده G_{i-1} و H_iاست. در این اجتماع یال‌های افزوده یک تجزیه برش یال را برای G_i شکل می‌دهند. در واقع، گیریم (W_{i-1}, B_{i-1}) افرازی برای G_{i-1} و (W_i', B_i') افراز ی برای H_i است. فرض کنید یال‌های افزوده در این اجتماع رئوس W_{i-1} و رئوس B_i' را به هم متصل کنند. توجه کنید که $(W_i = W_{i-1} \cup W_i', B_i = B_{i-1} \cup B_i')$ افرازی برای G_i است. پس با داشتن $S = W_i'$ داریم: $|B_i'| = |W_i'|$ مقدماتی است داریم H_i چون) $|S| = |N(S)|$ و با استفاده از همبندی $N(W_i') = B_i'$)، یال‌های افزوده در این اجتماع آن‌هایی هستند که یک رأس از $N(S)$ و یک رأس از $W_i \backslash S$ را متصل می‌کنند. با توجه به این که H_i مقدماتی است، با به کار بردن فرض استقراء روی G_{i-1} و با استفاده از منحصربه‌فرد بودن تجزیه مؤلفه‌های مقدماتی نتیجه می‌گیریم که H_i و مؤلفه‌های مقدماتی G_{i-1} مؤلفه‌های مقدماتی G هستند.

برعکس، فرض کنید G گراف ۱-فاکتورپذیر است. دیگراف مؤلفه‌های مقدماتی آن را درنظر بگیرید. چون این دیگراف بی‌دور است (لم ۳۴.۰.۱) می‌توانیم لم ۴۱.۰.۱، را برای به‌دست آوردن دنباله $G_0, G_1, \cdots, G_p = G$ همان‌طور که در قضیه تعیین شده بود، به کار ببریم. در واقع یک افزایش مؤلفه مقدماتی منبع متناظر با یک اجتماع تک‌رده است. ■

فصل ۲

گراف‌های دوبخشی مقدماتی مسطح

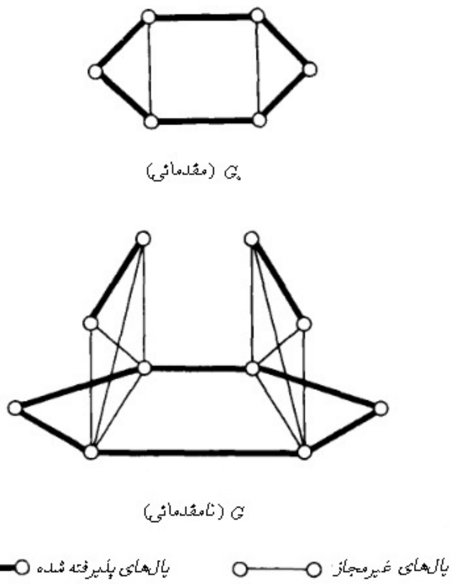
این بخش را با ارائه یک دسته‌بندی از گراف‌های عمومی آغاز می‌کنیم. جهت آشنایی با هر یک از گراف‌های ذکر شده در این تقسیم‌بندی، به یک تعریف مختصر از گراف در هر دسته بسنده کرده‌ایم. سپس توجه خودمان را به گراف‌های دوبخشی مقدماتی محدود کرده و بخشی از اهداف این رساله را دنبال می‌کنیم.



شکل ۱.۲: روند تجزیه $Brick$

تعریف ۴۵.۰.۲. *یک گراف ساده با جورسازی کامل را آلوده می‌گوییم، اگر با افزودن هر یال به آن*

تعداد جورسازی‌های کامل گراف افزایش یابد. در شکل ۲.۲ دو مثال از گراف‌های آلوده را مشاهده می‌کنید.



شکل ۲.۲: دو مثال از گراف‌های آلوده

تعریف ۴۶.۰.۲. *گراف G را فاکتور- بحرانی می‌نامیم، اگر به ازای هر $v \in V(G)$، $G - v$ دارای یک جورسازی کامل باشد (گالای[1] (۱۹۶۳)).*

تعریف ۴۷.۰.۲. *می‌گوییم گراف دوبخشی $G = (A, B)$ دارای مازاد مثبت است اگر به ازای هر زیرمجموعه ناتهی X از A، تعداد همسایه‌های X بزرگ‌تر از اندازه X باشد.*

تعریف ۴۸.۰.۲. *گراف G را دوبحرانی می‌گوییم، اگر شامل یک یال و به ازای هر جفت از رئوس متمایز x و y در G، $G - x - y$ دارای یک جورسازی کامل باشد.*

۱.۲ تعاریف و ویژگی‌ها

تعریف ۱.۱.۲. *یک گراف را مسطح می‌گوییم اگر بتوان آن را بدون این که یال‌ها همدیگر را قطع کنند در صفحه رسم کرد.*

[1] $Gallai$