دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده مهندسی مکانیک

پایان نامه دوره کارشناسی ارشد

" گرایش طراحی جامدات "

مسیرهای تنش اصلی در اجسام

زیر نظر :

دکتر محمود همامی

توسط :

فرزاد آریانا

اردیبهشت ۱۳۷۰

۱۵۲

۱۶۶۵۲

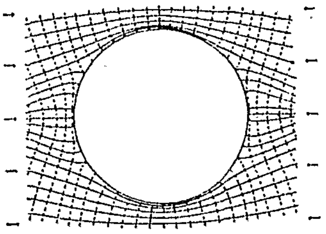
" بسم الله الرحمن الرحیم "

پایان نامه آقای فرزاد آریانا درجلسه مورخ ۷۰/۲/۲۴ کمیته پایان نامه متشکل از اساتید ذیل مورد بررسی وتائید قرار گرفت.

۱- آقای دکتر محمود همامی ، استاد راهنمای رساله

۲- آقای دکتر حسن خادمی زاده ، استاد کمیته تخصصی

۳- آقای دکترابراهیم شیرانی مسئول کمیته کارشناسی ارشد دانشکده



مسیرهای تنش اصلی در اجسام

فهرست مطالب

فهرست مطالب

- خلاصـــــه :

هدف از این پروژه ارائه مفاهیمی است که با بهره گیری از آنها بطور کیفی مسیرهای تنش اصلـــی دراجسام راحدس زده وباتوجه به آنهاجریان تنش مشخص گـردد . بدین منظور ابتدا در حالاتی کــه میدان تنش مشخص است بـــطور آنالیتیـــك مسیرهای تنش اصلی مشخص می‌شوند . حالاتی هم کـــه میدان تنش مشخص اســت ولی بطور آنالیتیـــك مسیرهای اصلی قابل تعیین نباشند بصورت عددی مورد بررسی قرارخواهند گرفت. در مرحله بعد بررسی خود رابصورت لـوکـال درآورده و اثرتوزیعات تنـــــش گوناگون برروی مسیرهای تنش اصلی مورد توجه و بررسی قرارمی‌گیرند و نهایتا" بامعرفی اصولی ســـاده و روشن روش تعیین مسیرهای تنش اصلی در حالاتی که بارگذاری و هندسهٔ جسم پیچیده باشد (بدون دردست داشتن میدان تنش) ارائه می‌گردد و نقاط ضعف این روش نیز مشخص می‌شود . درقسمـــــــت آخر پـروژه‌نحوهٔ تعیین مسیرهای تنش اصلی بااستفاده از روش فتو الاستیسیتـــی آمده است. وبـــرای آنکه بحث فتوالاستیسیتـــی بطور نسبتا" جامع ارائه شود نکـــات و مفاهیم کلی فتو الاستیسیتـــی نیـــز ارائه شده است .

بســم اللــه الرحمــن الـرحيــم

مقــدمــه :

مـلـل قدیم اثرات اعجاب آوری از معماری‌وساختمان از خود بجای گذاشته اندکه از آن میــــان بنــاهای رومیــان و یونانیــان بیشتر جلب توجه می‌کند . با توجه به اینکه در آن اعصار محاسبــات مهندسی در طرح ســازه ها تقریبا" موجود نبوده است این سؤال مطرح می‌شودکه چگونه آنان بناهای عظیم راهمراه باظرافت (که امروزه ملـحوظ داشتن آن بدون محاسبات مهندسی غیرممکن بنظرمی‌آید) اجرامی‌کرده‌اند . جواب این سوءال رامی‌توان بصورت زیـرتشریح نمـود :

ترکیبی از نبـوغ ذاتی و ایده‌های ریاضی ـ فلسفی که دراثر تجربه در ذهن یك مهندس ایجـــاد می‌گردد .

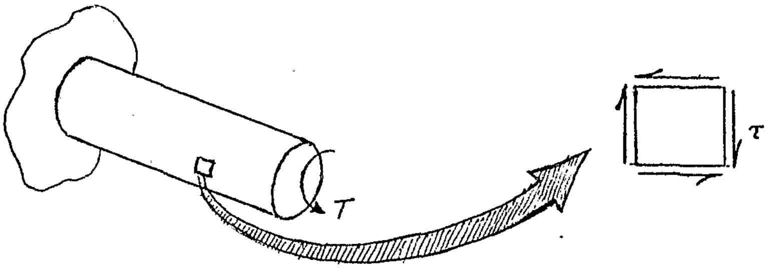
منظور از صورت فلسفی این ایده هاعمدتا" حس زیبائی شناسی درفرم فلسفی آن است.

زیبائـی باتعریف :ترکیبی از تناسب و سادگی . از دیدگاه فیزیکی یکی از قالبهای این ایده‌هـا جریان تنش دراجسام است که نشان می‌دهد در چه نواحی تنش شدیدترخواهد بود .

البته بحث درمورد اینکه آیاجریان تنش ریشهٔ آن ایده‌های ذهنی است و یاخیرمشکل است ولــی درهر صورت وجوه اشتراکی میان آنهابرقراراست زیراشکست اجسام عموما" دراثرافزایش تنش درنقــاط شروع شکست است که برای مـواد تـرد تنــش قائــم (فشاری یاکششی)وبرای مواد نرم تنش برشی ملاك

خواهد بود . (صور دیگر مسائل تحلیل شکست، برای مثال افزایش دانسیته انرژی کرنشی مورد بحث ما نیست) . برای تحلیل دقیق تر، جریان تنش رادرفرم مسیرهای تنش اصلی بررسی می‌کنیم. مسیرهای تنش اصلی درهرنقطه جهاتی رانشان می‌دهند که تنش برشی درآن جهات صفراست وتنشهای قائم ماکزیمم و می‌نیمم خود رااختیارمی‌نمایند . درمسائل دوبعدی جهات تنشهای اصلی از فرمول $tg2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$ بدست می‌آیند که درآن σ_x و σ_y مؤلفه های تنش قائم و τ_{xy} مؤلفه تنش برشی دریک نقطه مشخص و دریک دستگاه مختصات معین کارتزین x و y می‌باشند . درصورتیکه میدان تنش مشخص باشد در هر نقطه جهات تنش اصلی محاسبه می‌گردد و از وصل این جهات به یکدیگر مسیرهای تنش اصلی حاصل می‌گردند ، واضح است که از فرمول مذکور، درهرنقطه دو جهت عمود برهم حاصل می‌گردد . بنابراین مسیرهای تنش اصلی دودسته منحنی متعامد راتشکیل می‌دهند .

به عنوان مثال میله ای بامقطع دایره‌ای یکنواخت که تحت پیچش خالص قرارگرفته باشد رادرنظر می‌گیریم .

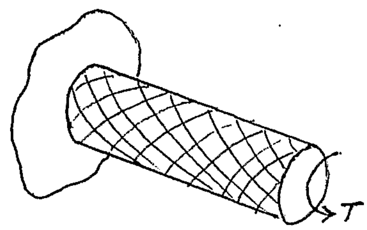


برای المان نشان داده شده درشکل حالت تنش بصورت برش خالص است .

بنابراین در هرنقطه روی شفت جهات اصلی بامحور شفت زاویه $45°$ می‌سازند و مسیرهای اصلی تنش شبکه‌ای متعامد از هلیکس های $45°$ خواهند بود .

$$tg\ 2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{\pm 2\tau}{0} = \pm\infty$$

$$\Longrightarrow 2\theta = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{4}$$



بطور شهودی اگر استوانه‌ای گچی راتحت پیچش قراردهیم چون ماده ترداست وتحت تنش قائم می‌شکند ،شکست برروی یکی از هلیکس های مزبور اتفاق می‌افتد آزمایش ساده تری رامی‌توان برروی سیگار انجام داد . باتعویض جهت کوپل پیچشی روی سیگار ، هردو ستهٔ مسیرهای تنش اصلی قابل مشاهده اند (چون کاغذ تنش فشاری راتحمل نمی‌کند) . بادردست داشتن میدان تنش دربعضی موارد می‌توان معادله مسیرهای تنش اصلی رابطور آنالیتیک بدست آورد . دراین مورد از فرمول تانژانت نصف قوس و شیب یك منحنی در مختصات x و y استفاده می‌شود .

$$dy/dx = tg\theta$$

$$tg2\theta = \frac{2tg\theta}{1-tg^2\theta} = \frac{2(dy/dx)}{1-(dy/dx)^2} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

از حل معادلهٔ دیفرانسیـل زیر معادله مسیرهای اصلی بدست می‌آید .

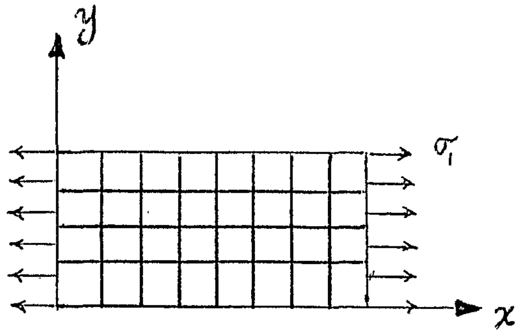
$$\frac{dy/dx}{1-(dy/dx)^2} = \frac{\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

در مواردی که حل معادله دیفرانسیل فوق ممکن نباشد بااستفاده از جهات اصلی بدست‌آمـده در هرنقطه و وصل آنها به یکدیگر مسیرهای تنش‌اصلی بطور ترسیمی حاصل می‌شوند .

$\sigma_x = \sigma_1$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = 0$



$$tg2\theta = 2tg\,\theta / 1 - tg^2\theta = 2\tau_{xy}/\sigma_x - \sigma_y === (dy/dy)/1-(dy/dx)^2 = 0$$

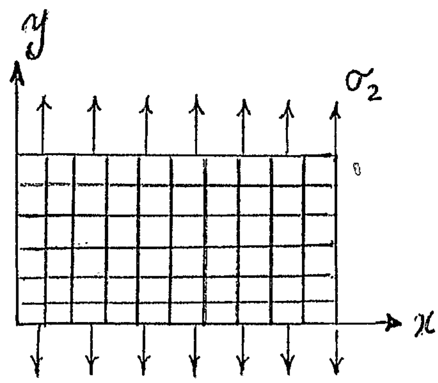
$\Longrightarrow dy/dx = 0 \Longrightarrow y = constant$

$\Longrightarrow dy/dx = \infty \quad \Longrightarrow dx/dy = 0 \Longrightarrow x = constant$

$\sigma_x = 0$

$\sigma_y = \sigma_2$

$\tau_{xy} = 0$



$$tg2\theta = dy/dx/1-(dy/dx)^2 = 0$$

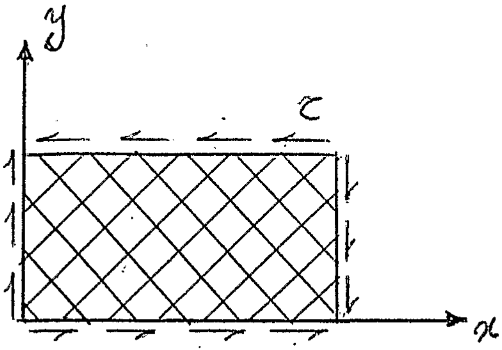
$\Longrightarrow \quad dy/dx = 0 \quad \Longrightarrow \quad y = constant$

$dy/dx = \infty \Longrightarrow dx/dy = 0 \Longrightarrow x = constant$

$\sigma_x = 0$

$\sigma_y = 0$

$\tau_{xy} = \tau$



$$tg2\theta = 2(dy/dx)/1-(dy/dx)^2 = \tau/0 = \infty$$

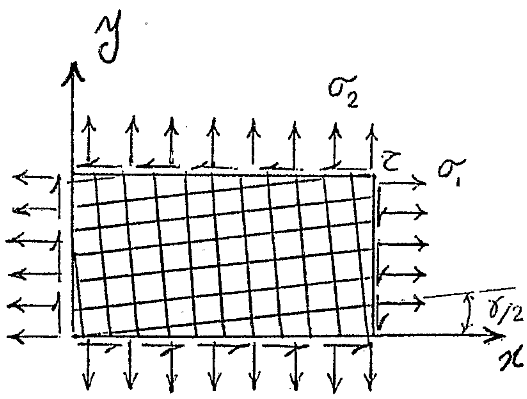
$$\Longrightarrow \quad 1-(dy/dx)^2/dy/dx = 0$$

$$\Longrightarrow \quad dy/dx = \pm 1 \quad \Longrightarrow \quad y = \pm x + constant$$

$\sigma_x = \sigma_1$

$\sigma_y = \sigma_2$

$\tau_{xy} = \tau$



$$tg2\theta = 2\tau_{xy}/\sigma_x - \sigma_y = 2\tau/\sigma_1 - \sigma_2 = constant = tg\gamma$$

$$\Longrightarrow \quad 2\theta = \gamma \pm k\pi$$

$$\Longrightarrow \theta = \gamma/2 \pm k\pi/2 \Longrightarrow \begin{array}{l} \theta = \gamma/2 \\ \quad = \gamma/2 + \pi/2 \end{array}$$

$$\gamma = tg^{-1}(2\tau/\sigma_1 - \sigma_2)$$

$$tg2 = 2\tau / \sigma_1 - \sigma_2 = 2(dy/dx) / (1-(dy/dx)^2)$$

$\Longrightarrow$

$$(dy/dx)/\ 1-(dy/dx)^2 = 1/2c$$

$$2c = \sigma_1 - \sigma_2 / \tau \quad === \quad c = \sigma_1 - \sigma_2 \ / \ 2\tau$$

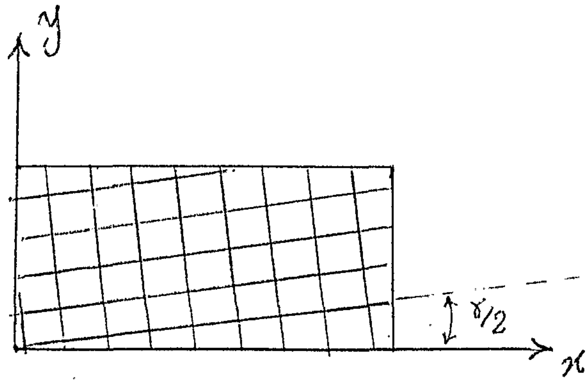
$$\Longrightarrow (dy/dx)^2 + 2c(dy/dx) - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow dy/dx = -c \pm \sqrt{c^2+1} \Rightarrow y = (-c \pm \sqrt{c^2+1})X + constant$$

$$y = (-c + \sqrt{c^2+1})\ X + constant$$

$$y = (-c - \sqrt{c^2+1})\ X + constant$$

$$m.m' = (-c - \sqrt{c^2+1})(-c - \sqrt{c^2+1}) = c^2 - c^2 - 1 = -1$$



$$c=1/tg\gamma \Longrightarrow -c+\sqrt{c^2+1} = -1/tg\gamma+\sqrt{1/tg^2\gamma+1}$$

$$=-1/tg\gamma+\sqrt{1+tg^2\gamma}\,/tg\gamma \Longrightarrow -c+\sqrt{c^2+1} = -1+1/\cos\gamma/\ tg\gamma$$

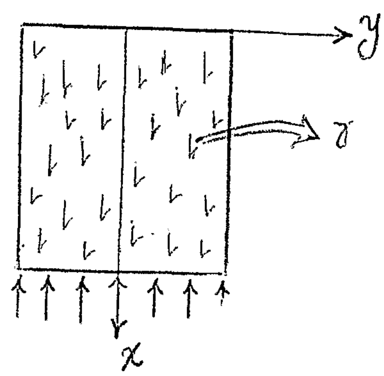
$$= -\cos\gamma+1/\cos\gamma/(\sin\gamma/\cos\gamma)=1-\cos\gamma\,/\,\sin\gamma=2\sin^2(\gamma/2)/(2\sin(\gamma/2)\cos(\gamma/2))$$

$$=tg\,\gamma/2$$

$\sigma_x = -\gamma x$

$\sigma_y=0$

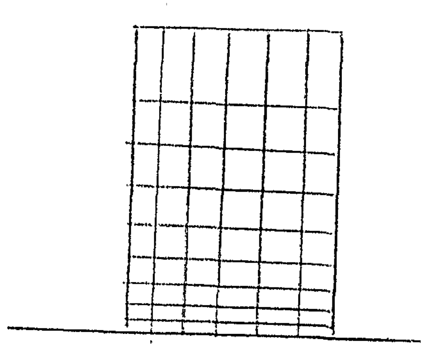
$\tau_{xy}=0$



$$tg2\theta = 2dy/dx\ /\ 1-(dy/dx)^2 = 0/-\gamma_x$$

$dy/dx=0 \Longrightarrow y = constant$

$dy/dx = \infty \Longrightarrow dy/dx = 0 \Longrightarrow x = constant$



مســائــل متقــارن

با توجه به اینکه روی محورهای تقارن هندسی و بارگذاری تنش برشی صفر است، محورهــــای تقارن مذکور خود مسیرهای تنش اصلی می‌باشند .