وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه شهید مدنی آذربایجان
دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی محض

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

اصل بازتابی موضعی و کاربردها

استاد راهنما
دکتر محمد حسین ستاری

استاد مشاور
دکتر شهرام رضاپور

پژوهشگر
زهرا اسدی

اسفند/۱۳۹۳
تبریز/ایران

بسم الله الرحمن الرحیم

تقدیم به

پدرم که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، ایستادگی را تجربه نمایم

به مادرم، دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر

و به برادرانم که در سایه همیاری و همدلی آن‌ها به این جایگاه منظور شدم.

ای خدا

ای خدا ای فضل تو حاجت روا
با تو یاد هیچ کس نبود روا
این همه ارشاد تو بخشیده ای
تا بدین بس عیب ما پوشیده ای
قطره علمی که بخشیدی ز پیش
متصل گردان به دریاهای خویش
قطره علم است اندر جان من
وارهانش از هوا وز خاک تن

یاد ده ما را سخن های دقیق
که تو را رحم آورد آن ای رفیق
این دعا از تو اجابت هم ز توست
ایمنی از تو مهابت هم ز توست
گر خطا گفتیم اصلاحش تو کن
مصلحی تو ای خداوند سخن
کیمیا داری که تبدیلش کنی
گر چه جوی خون بود نیلش کنی

ای که خاک شوره را تو نان کنی
وی که نان مرده را تو جان کنی
ای که جان خیره را رهبر کنی
وی که بی ره را تو پیغمبر کنی
می کنی جزو زمین را آسمان
می فزایی در زمین از اختران

ای مبدل کرده خاکی را به زر
خاک دیگر را بکرده بوالبشر
کار تو تبدیل اعیان و عطا
کار من سهوست و نسیان و خطا
سهو و نسیان را مبدل کن به علم
من همه خلمم مرا کن صبر و حلم

سپاس‌گزاری...

ای هستی بخش، وجود مرا بر نعمات بی‌کرانت توان شکر نیست ذره ذره وجودم برای تو و نزدیک شدن به تو می‌تپد. الهی مرا مدد کن تا دانش اندکم نه نردبانی باشد برای فزونی تکبر و غرور، نه حلقه‌ای برای اسارت و نه دست مایه‌ای برای تجارت، بلکه گامی باشد برای تجلیل از تو و متعالی ساختن زندگی خود و دیگران.

حال که توفیق جمع آوری و تهیه این مجموعه را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری‌شان بهره‌مند گشته‌ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم.

در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به خانواده عزیز و مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیرممکن بود.

همچنین وظیفه‌ی خود می‌دانم از زحمات بی‌شائبه‌ی استاد راهنمای گرانقدرم، جناب آقای **دکتر محمدحسین ستاری** صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده‌ی ایشان این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از استاد بزرگوارم جناب آقای **دکتر شهرام رضاپور** که زحمت مشاوره‌ی این پایان‌نامه را به عهده گرفتند و استاد محترم جناب آقای **دکتر حسن پورمحمود** که زحمت داوری این پایان‌نامه را تقبل فرمودند بسیار سپاس‌گزارم. از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری‌شان بهره‌مند گشته‌ام، تشکر و قدردانی می‌کنم .

زهرا اسدی

اسفند /۱۳۹۳

فهرست مطالب

چکیده

در این پایان‌نامه حالت قوی‌تر شده‌ای از صورت عمومی اصل بازتابی موضعی مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در آن، اصل بازتابی نسبت به زیرفضاها اضافه شده است. همچنین، کاربردهایی از این اصل در خصوص خاصیت تقریب کراندار برای زوج‌ها متشکل از فضاهای باناخ و زیر فضاهای آن ارائه شده است.

کلید واژه‌ها: اصل بازتابی موضعی نسبت به زیرفضاها، زیر فضاها، π_λ -(دوگان) خاصیت یک زوج، عملگرهای انتگرال.

پیشگفتار

اصل بازتابی موضعی (PLR) ابزار قدرتمندی در نظریه‌ی فضاهای باناخ و کاربردهای آن به شمار می‌آید. این اصل نشان می‌دهد دوگان دوم X^{**} فضای باناخ X، موضعاً با خود فضای X یکسان است. این اصل توسط لیندشتراس [۱] و روزنتال [۲] و زیپین [۳] [۱۳] در ۱۹۶۹ مطرح شد. این اصل توسط جانسون [۴]، روزنتال[۵] و زیپین[۶] [۱۱] در ۱۹۷۱ اصلاح شد. از آن به بعد، اثبات‌های جدید و تعمیم‌های گوناگونی برای آن توسط متخصصین آورده شد. اخیراً مفهوم خاصیت تقریب کراندار زوج‌ها توسط فیگل[۷]، جانسون [۸] و پل‌زینسکی [۹] تعریف شد، که مربوط به ثابت نگه‌داشتن زیرفضاهای تحت عملگرهای متناهی‌البعد است. مطالعات در [۷] و [۱۹] نشان می‌دهد، برای زیر فضاها نوع خاصی از اصل بازتابی موضعی نیاز است. هدف ما در این پایان‌نامه یافتن این نوع خاص از اصل بازتابی است.

این پایان‌نامه در سه فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

در فصل اول مقدماتی از فضاهای باناخ بیان شده که برای مطالعه‌ی فصل‌های بعدی نیاز است سپس مفاهیمی مربوط به ضرب تانسوری و عملگر انتگرال ارائه شده است.

---

[۱] Lindenstrauss

[۲] Rosenthal

[۳] Zippin

[۴] Johnson

[۵] Rozenthal

[۶] Zippin

[۷] Figiel

[۸] Johnson

[۹] Pelcziynski

در فصل دوم صورت عمومی اصل بازتابی موضعی بیان و ثابت می‌شود و دو قضیه‌ی اصلی که تعمیمی از اصل بازتابی موضعی هستند. به همراه برهان شان ارائه شده است.

در فصل سوم تعاریف و مفاهیم مربوط به خاصیت تقریب بیان شده و سپس عملگرهای بازتابی موضعی به زیر فضاهای مفروض تحدید شده وکاربردهایی برای ویژگی‌های تقریب کراندار زوج‌ها شامل یک فضای باناخ و زیر فضای آن ارائه شده است.

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اصلی

۱.۱ مقدماتی از فضاهای باناخ

در این پایان‌نامه از نماد $\mathbb{K}$ برای نشان دادن میدان استفاده شده که این میدان یک میدان حقیقی $\mathbb{R}$ یا یک میدان مختلط $\mathbb{C}$ است.

تعریف ۱.۱. فرض کنیم X یک فضای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. یک نرم روی فضای برداری X، تابعی مانند $\|.\| : X \to [0, \infty)$ است که در شرایط زیر صدق می‌کند :

۱) به ازای هر $x \in X$، $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$ ؛

۲) اگر $x \in X$ و α یک اسکالر باشد ، $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$؛

۳) به ازای هر $x, y \in X$ ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$؛

فضای X با نرم روی آن، یک فضای نرمدار نامیده می‌شود.

تعریف ۲.۱. اگر X یک فضای نرمدار و $d(x, y) = \|x-y\|$ متر روی آن باشد. Xباناخ است هرگاه، نسبت به متر تعریف شده با نرمش تام باشد یعنی هر دنباله‌ی کوشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۳.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای برداری روی میدان $\mathbb{K}$ باشند. نگاشت $T : X \to Y$ را خطی گوییم هرگاه :

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) \qquad (x_1\ , x_2 \in X), (\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}).$$

تعریف ۴.۱. فضای همه‌ی تابعک‌های خطی روی فضای نرمدار X را با X' نشان می‌دهیم.

تعریف ۵.۱. فرض کنیم $T : X \to Y$ یک عملگر خطی بین دو فضای نرمدار X و Y باشد. گوییم T کراندار است هرگاه عدد ثابت مثبتی مانند k موجود باشد، به‌طوری‌که به ازای هر $x \in X$ داشته باشیم:

$$\|Tx\| \leq k\|x\|.$$

کوچک‌ترین k ای که در رابطه‌ی فوق صدق می‌کند را نرم عملگر T می‌نامیم که دارای تعاریف معادل زیر است :

$$\begin{aligned} \|T\| &= sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : \qquad x \in X\ ,\ x \neq 0\}, \\ &= sup\{\|Tx\|\ : \qquad x \in X\ ,\ \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

تعریف ۶.۱. فضای همه‌ی نگاشت‌های خطی کراندار از X به Y را با $\mathcal{L}(X,Y)$ نشان می‌دهیم. هرگاه Y باناخ باشد، آنگاه $\mathcal{L}(X,Y)$ باناخ خواهد بود.

تعریف ۷.۱. عملگر خطی کراندار بین فضاهای باناخ را که برد آن متناهی البعد باشد، عملگر با بعد متناهی گوییم.

تعریف ۸.۱. فرض کنیم X فضای نرمدار روی میدان $\mathbb{K}$ باشد. نگاشت خطی از X به $\mathbb{K}$ را تابعک خطی روی X نامیم.

تعریف ۹.۱. فرض کنیم X فضای نرمدار باشد. فضای $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ از تابعک‌های خطی و کراندار را فضای دوگان X گوییم و با X^* نشان می‌دهیم. چون $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ فضاهای باناخ هستند، X^* فضای باناخ خواهد بود.

تعریف ۱۰.۱. دوگان دوم فضای نرمدار X، فضای $\mathcal{L}(X^*,\mathbb{K})$ از تابعک‌های خطی و کراندار است که با X^{**} نشان می‌دهیم.

قضیه ۱.۱۱. (هان[۱] - باناخ). *فرض کنیم*

الف) X *فضای برداری،* $p : X \to \mathbb{R}$ *تابعی روی* X *باشد که*

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \qquad (\alpha \geq 0), \quad (x, y \in X),$$

ب) M *زیر فضای* X *و* $f : M \to \mathbb{R}$ *یک تابعک خطی به‌طوری‌که*

$$f(x) \leq p(x) \qquad (x \in X),$$

در این‌صورت تابعک خطی $F : X \to \mathbb{R}$ *وجود دارد که*

$$F|_M = f, \quad F(x) \leq p(x) \qquad (x \in X).$$

تعریف ۱.۱۲. $\mathcal{F} \subset C(X)$ هم‌پیوسته است هرگاه برای هر $\epsilon > 0$ وجود داشته باشد $\delta > 0$ (تنها وابسته به ϵ) به‌طوری‌که به ازای هر x و y از X:

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon \qquad (f \in \mathcal{F}), (x, y \in X)$$

تعریف ۱.۱۳. مجموعه‌ی $K \subset X$ را محدب گوییم هرگاه

$$ax + (1-a)y \in K, \quad 0 \leq a \leq 1 \qquad (x, y \in K).$$

تعریف ۱.۱۴. زیر مجموعه‌ی K از فضای توپولوژیک X را فشرده گوییم هرگاه هر پوشش باز K شامل زیر پوششی متناهی باشد.

قضیه ۱.۱۵. (قضیه‌ی جداسازی). *فرض کنیم* A *و* B *دو مجموعه‌ی از هم جدا، ناتهی، و محدب در فضای نرمدار* X *باشند.*

۱) *اگر* A *باز باشد،* $\Lambda \in X^*$ *و* $\gamma \in \mathbb{R}$ *وجود دارند به‌طوری‌که*

$$Re\ \Lambda x < \gamma \leq Re\ \Lambda y \qquad (x \in A), (y \in B).$$

۲) *هرگاه* A *فشرده،* B *بسته، و* X *موضعاً محدب باشد، آنگاه* $\Lambda \in X^*$، $\gamma_1 \in \mathbb{R}$ *و* $\gamma_2 \in \mathbb{R}$ *وجود دارند به‌طوری‌که*

$$Re\Lambda x < \gamma_1 < \gamma_2 \leq Re\Lambda y \qquad (x \in A), (y \in B).$$

[۱] Hahn

قضیه ۱.۱۶. *الف) بستار و درون یک مجموعه‌ی محدب در یک فضای توپولوژی نرمدار محدب هستند.*

ب) نقطه‌ی درونی از یک مجموعه در یک فضای توپولوژی نرمدار یک نقطه‌ی درونی مجموعه است.

ج) اگر مجموعه‌ی محدب K در یک فضای توپولوژی خطی حداقل یک نقطه‌ی درونی داشته باشد، در این‌صورت نقطه‌ی P یک نقطه‌ی درونی از K است اگر و تنها اگر یک نقطه‌ی درونی باشد و نقطه‌ی P یک نقطه‌ی مرزی است اگر و تنها اگر یک نقطه‌ی مرزی باشد. بعلاوه، درون K در K چگال است.

قضیه ۱.۱۷. *فرض کنیم K_1 و K_2 زیرمجموعه‌های محدب بسته‌ی مجزا از یک فضای توپولوژی نرمدار موضعاً محدب X باشند، و K_1 فشرده باشد. در این‌صورت ثابت‌های c و $\epsilon > 0$ و یک تابعک خطی پیوسته‌ی f روی X وجود دارند به‌طوری‌که*

$$Re\ f(K_2) \leq c - \epsilon < \epsilon \leq Re\ f(K_1).$$

قضیه ۱.۱۸. (نگاشت باز). *فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند. اگر $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ پوشا باشد، آنگاه T باز است.*

تعریف ۱.۱۹. فرض کنیم X یک فضای باناخ، M زیر فضایی از X و N زیر فضایی از X^* (هیچ یک از M و N را بسته نمی‌گیریم) پوچ‌سازهای $M^\perp$ و $^\perp N$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$M^\perp = \{x^* \in X^* : \qquad \forall x \in M \quad \langle x, x^* \rangle = 0\}$$

$$^\perp N \ = \{x \in X^* : \qquad \forall x^* \in N \quad \langle x, x^* \rangle = 0\}$$

لذا $M^\perp$ از تمام تابعک‌های خطی کراندار بر X که روی M صفر می‌شوند تشکیل شده است، و $^\perp N$ زیرمجموعه‌ای از X است که بر آن هر عضو N صفر می‌شود.

گزاره ۱.۲۰. [۲۰] *فرض کنیم X یک فضای باناخ باشد. دراین‌صورت*

۱) *$^{\perp}(M^{\perp})$ نرم- بست M در X است.*

۲) *$(^{\perp}N)^{\perp}$ ضعیف* - بست N در X^* می‌باشد.*

تعریف ۱.۲۱. فرض کنیم M زیر فضای بسته‌ای از فضای برداری توپولوژیک X باشد. هرگاه زیر فضای بسته‌ای مانند N از X باشد به طوری‌که

$$M \cap N = \{0\}, \qquad X = M + N.$$

آنگاه گوییم M در X تکمیل می‌شود. در این حالت X مجموع مستقیم M و N است و با نماد $X = M \oplus N$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱.۲۲. فرض کنیم τ_1 و τ_2 دو توپولوژی بر مجموعه‌ی X باشند. اگر $\tau_1 \subset \tau_2$ گوییم τ_1 از τ_2 ضعیف‌تر است. در این‌صورت نگاشت همانی بر X یک نگاشت پیوسته از (X, τ_2) به (X, τ_1) و یک نگاشت باز از (X, τ_1) به (X, τ_2) می‌باشد.
هرگاه $\tau_1 \subset \tau_2$ دو توپولوژی بر مجموعه‌ی X باشند، τ_1 یک توپولوژی هاسدورف باشد و τ_2 فشرده باشد، آنگاه $\tau_1 = \tau_2$.

فرض کنیم X یک مجموعه و $\mathcal{O}$ خانوده‌ای ناتهی از نگاشت‌های $f : X \to Y_f$ باشد که در آنها هر Y_f یک فضای توپولوژیک است. هرگاه τ گردایه‌ی تمام اجتماع‌ها از اشتراک‌های متناهی ازمجموعه‌های $f^{-1}(V)$ باشد که $f \in \mathcal{O}$ و V در Y_f باز است، در این‌صورت τ یک توپولوژی بر X است و در واقع ضعیف‌ترین توپولوژی بر X است که هر $f \in \mathcal{O}$ را پیوسته می‌کند. این τ را توپولوژی ضعیف بر X القا شده به وسیله $\mathcal{O}$ یا $\mathcal{O}$ - توپولوژی X نامیم.

تعریف ۱.۲۳. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. X^*-توپولوژی X را توپولوژی ضعیف X می‌نامیم. این توپولوژی ضعیف‌ترین توپولوژی روی X است که هر عضو دوگان را پیوسته می‌کند.
توپولوژی ضعیف* فضای نرمدار X، X^* - توپولوژی روی X^* است.

قضیه ۲۴.۱. (*باناخ آلوغلو*[۲]). *هرگاه V یک همسایگی صفر در فضای توپولوژیک X بوده و*

$$K = \{\Lambda \in X^* : \quad |\Lambda x| \leq 1 \quad (x \in V)\}$$

آنگاه K ضعیف - فشرده می‌باشد.*

برهان. چون همسایگی‌های صفر جاذبند، به هر $x \in X$ عددی مانند $\gamma(x) < \infty$ چنان نظیر است که $x \in \gamma(x)V$. بنابراین

$$|\Lambda x| \leq \gamma(x) \qquad (x \in X), (\Lambda \in K).$$

فرض کنیم D_x مجموعه‌ی تمام اسکارهای α باشد که $|\alpha| \leq \gamma(x)$، همچنین τ توپولوژی حاصل‌ضربی بر P، یعنی حاصل‌ضرب دکارتی تمام D_xها (به ازای هر $x \in X$ یکی) باشد. چون هر D_X فشرده است، بنا به قضیه‌ی تیخنف، P نیز فشرده است. عنصرهای P توابعی مانند f بر X هستند که

$$|f(x)| \leq \gamma(x) \qquad (x \in X).$$

بنابراین

$$K \subset X^* \cap P.$$

پس K دو توپولوژی به ارث می‌برد:

یکی از X^* و دیگری τ از P. و داریم:

۱) این دو توپولوژی بر K یکی هستند، و

۲) K زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از P است.

چون P فشرده است، (۲) ایجاب می‌کند که K ضعیف*-فشرده می‌باشد.

$\Lambda_0 \in K$ را ثابت می‌گیریم. به ازای $1 \leq i \leq n$ یک $x_i \in X$ را اختیار می‌کنیم. همچنین$\delta > 0$ای انتخاب می‌کنیم. قرار می‌دهیم

$$W_1 = \{\Lambda \in X^* : \quad |\Lambda x_0 - \Lambda_0 x_i| < \delta \quad 1 \leq i \leq n\},$$

[۲] Alaoglu

$$W_2 = \{f \in P: \quad |f(x_i) - \Lambda_0 x_i| < \delta \quad 1 \leq i \leq n\}.$$

فرض کنیم n, x_i و δ روی تمام مقادیر مجاز تغییر کنند. در این‌صورت مجموعه‌های حاصل W_1 یک پایه‌ی موضعی برای ضعیف* - توپولوژی X^* در Λ_0 و مجموعه‌های W_2 یک پایه‌ی موضعی برای توپولوژی حاصل‌ضربی τ از P در Λ_0 تشکیل می‌دهند. چون $K \subset P \cap X^*$، داریم

$$W_1 \cap K = W_2 \cap K.$$

این قسمت (۱) را ثابت می‌کند.

حال فرض کنیم f_0 در τ- بست K باشد. $x \in X$، $y \in X$، اسکالرهای α و β، و $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم. مجموعه‌ی تمام $f \in P$هایی که در x، در y، و در $\alpha x + \beta y$، $|f - f_0| < \epsilon$ یک τ-همسایگی f_0 است. بنابراین، K شامل یک چنین f می‌باشد. چون این f خطی است، داریم

$$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) =$$

$$(f_0 - f)(\alpha x + \beta y) + \alpha(f - f_0)(x) + \beta(f - f_0)(y);$$

در نتیجه

$$|\ f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y)\ | < (1 + |\alpha| + |\beta|\ )\ \epsilon.$$

چون ϵ دلخواه بود، پس f_0 خطی است. بالأخره، اگر $x \in V$ و $\epsilon > 0$، همین استدلال نشان می‌دهد که $f \in K$ هست به‌طوری‌که $|f(x) - f_0(x)| < \epsilon$. چون $|f(x)| \leq 1$، بنابر تعریف K داریم $|f_0(x)| \leq 1$. پس نتیجه می‌شود که $f_0 \in K$. این قسمت (۲) را ثابت می‌کند و قضیه ثابت می‌شود. $\square$

تعریف ۲۵.۱. زیرفضای خطی Γ از X' را زیرفضای کلی نامیم، هرگاه برای هر تابعک $f \in \Gamma$ اگر $f(x) = 0$ آنگاه $x = 0$.

قضیه ۲۶.۱. *فرض کنیم X یک فضای خطی و Γ یک زیرفضای کلی از X' باشد. در این‌صورت تابعک‌های خطی روی X که در Γ توپولوژی پیوسته هستند دقیقاً همان تابعک‌های در Γ هستند.*

قضیه ۲۷.۱. (*قضیه گلداشتاین*[۳]). *هرگاه* $i: X \to X^{**}$ *نشانندهٔ طبیعی فضای باناخ* X *در دوگان دوم آن باشد و* $S = \{x \in X| \quad \|x\| \leq 1\}$ *و* $S^{**} = \{x^{**} \in X^{**}| \quad \|x^{**}\| \leq 1\}$ *آنگاه* $\overline{i(S)}^{w^*} = S^{**}$.

برهان. فرض کنیم S_1 ضعیف*-بست $i(S)$ باشد. چون بنا به قضیهٔ باناخ آلوغلو S^{**} ضعیف*-بسته است و $S_1 \subset S^{**}$، بنا به قضیه ۱۶.۱، S_1 محدب است. نشان می‌دهیم $S_1 = S^{**}$.

اگر $x^{**} \in S^{**}$ وجود داشته باشد که عضو S_1 نباشد، در این‌صورت بنا به قضیه ۱۷.۱، تابعک ضعیف*-پیوسته f از X^{**} و ثابت‌های c و $\epsilon > 0$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$Re\ f(S_1) \leq c, \quad Re\ f(x^{**}) \geq c + \epsilon.$$

بنا به قضیهٔ ۲۶.۱ ، $x^* \in X^*$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$f(x^{**}) = x^{**}x^* \qquad (x^{**} \in X^{**}).$$

چون $i(S) \subseteq S_1$ در نتیجه

$$Re\ x^*(x) \leq c \qquad (x \in X).$$

اما $x \in S$ نتیجه می‌دهد برای $|\alpha| = 1$، $\alpha x \in S$. بنابراین

$$|x^*(x)| \leq c \quad (x \in S).$$

پس $|x^*| \leq c$ و

$$|x^{**}(x^*)| \leq c|x^{**}| \leq c$$

و $Re\ x^{**}(x^*) \geq c + \epsilon$ تناقض است. بنابراین هر $x^{**} \in S^{**}$ عضو S_1 هم هست. □

تعریف ۲۸.۱. متر d روی فضای نرمدار X را پایا نامیم هرگاه

$$d(x+z, y+z) = d(x,y) \qquad (x,y,z \in X).$$

[۳] goldstine

تعریف ۲۹.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار و τ توپولوژی روی X باشد. (X,τ) یک F-فضا است، هرگاه توپولوژی τ به وسیله‌ی یک متر پایای تام مانند d القا شده باشد.

تعریف ۳۰.۱. فرض کنیم T فضای برداری X را به توی فضای برداری Y بنگارد هسته و برد T را به ترتیب با $\mathcal{N}(T)$ و $\mathcal{R}(T)$ نشان می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{R}(T)=\{y\in Y:\quad \exists x\in X \qquad Tx=y\},$$

$$\mathcal{N}(T)=\{x\in X:\quad Tx=0\}.$$

تعریف ۳۱.۱. فرض کنیم X یک فضای نرمدار باشد. نگاشت خطی $P:X\to X$ را تصویر در X نامیم اگر $P^2=P$ یعنی

$$P(Px)=Px \qquad (x\in X).$$

نکات زیر در مورد تصویر $P:X\to X$ برقرار است :

۱) $\mathcal{N}(P)=\mathcal{R}(I-P)$

۲) $\mathcal{R}(P)=\mathcal{N}(I-P)=\{x\in X:\quad Px=x\}$

۳) $X=\mathcal{R}(P)+\mathcal{N}(P)$, $\mathcal{R}(P)\cap\mathcal{N}(P)=\{0\}$

۴) اگر A و B زیر فضاهایی از X باشند که $A\cap B=\{0\}$ و $X=A+B$،
آنگاه تصویر منحصر بفرد P در X وجود دارد به‌طوری‌که $A=\mathcal{R}(P)$ و $B=\mathcal{N}(P)$.

قضیه ۳۲.۱. [۲۰] *فرض کنیم X یک فضای توپولوژیک نرمدار باشد:*

۱) *هرگاه P تصویر پیوسته‌ای در X باشد، آنگاه*

$$X=\mathcal{R}(P)\oplus\mathcal{N}(P).$$

۲) *هرگاه X یک F-فضا بوده و $X=A\oplus B$، آنگاه تصویر P با برد A و فضای پوچ B پیوسته می‌باشد.*

تعریف ۳۳.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای متری با مترهای d_X و d_Y باشند. نگاشت $f:X\to Y$ ایزومتری است هر گاه :

$$d_Y(f(a),f(b))=d_X(a,b) \qquad (a,b\in X).$$

اگر X و Y فضاهای نرمدار باشند نگاشت خطی $T: X \to Y$ ایزومتری است هر گاه :

$$\|T(x)\| = \|x\| \qquad (x \in X).$$

دو فضای متری X و Y ایزومتریک نامیده می‌شوند، هرگاه ایزومتری دو سویی بین آنها موجود باشد.

تعریف ۳۴.۱. فرض کنیم X و Y فضاهای باناخ باشند و E زیر مجموعه‌ی X باشد. عملگر $T: E \to Y$ ، ϵ- ایزومتری است هرگاه:

$$1 - \epsilon \leq \|T(x)\| \leq 1 + \epsilon \qquad (x \in S_E), \quad S_E = \{x: \quad \|x\| = 1\}$$

تعریف ۳۵.۱. فرض کنیم N زیر فضایی از فضای نرمدار X باشد به ازای هر $x \in X$، $\pi(x)$ را هم مجموعه‌ای از N می‌گیریم که شامل x باشد، لذا

$$\pi(x) = x + N.$$

این هم مجموعه‌ها اعضای فضای نرمدار X/N هستند که فضای خارج قسمتی X به پیمانه‌ی N نامیده می‌شوند. نرم خارج قسمتی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|[x]\| = inf\{\|y\|: \qquad y \in [x]\} =$$

$$inf\{\|x+n\|: \quad n \in N\}.$$

π یک نگاشت خطی از X به روی X/N است که N فضای پوچ آن است π را نگاشت خارج قسمتی X به روی X/N می‌نامند.

تعریف ۳۶.۱. فرض کنیم τ یک توپولوژی برداری روی X و N زیر فضای بسته‌ای از X و τ_N گردایه‌ی تمام مجموعه‌های $E \subset X/N$ باشد که $\pi^{-1}(E) \in \tau$. در این‌صورت τ_N یک توپولوژی برX/N است که آن را توپولوژی خارج قسمتی گوییم. توپولوژی خارج‌قسمتی τ_N از X/N قویترین توپولوژی بر X است که نگاشت خارج‌قسمتی π را پیوسته می‌کند و ضعیف‌ترین توپولوژی است که π را یک نگاشت باز می‌سازد. هرگاه τ' ، τ'' دو توپولوژی بر X/N و π نسبت به τ' پیوسته و نسبت به τ'' باز باشد، آنگاه $\tau' \subset \tau_N \subset \tau''$. .