



دانشکده علوم  
گروه فیزیک

پایان نامه جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد رشته فیزیک  
گرایش اتمی و مولکولی

عنوان:

# ایجاد درگاه‌های منطقی با استفاده از گذار رامن جابجایی استارک در یک کاواک

دانشجو:

ساره گلکار

استاد راهنما:

دکتر مهدی امنیت طلب

حق چاپ و تکثیر مطالب این پایان نامه برای دانشگاه ارومیه محفوظ است.

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

این شاید مایان نامه باشد، اما مایان قصه نیست.

هنوز تا مایان که، نه! تا اوج، تا آسمان، تا پرواز

راه درازی مانده است.

اگر چه می رویم،

خاطره روزهای گرم تلاش تا همیشه باقیست.

و ای کاش یاد کارمان به جای سیرکها، تنها یک بخت باشد.

تقدیم به پدر بزرگوارم...

و تقدیم به مادر مهربانم....

آن دو فرشته‌ای که از خواسته‌هایشان گذشتند، سختی‌ها را به جان خریدند و خود را سپربلای مشکلات و ناملایمات کردند تا

من به جایگاهی که اکنون در آن ایستاده‌ام برسم.

و تقدیم به خواهر و برادرم...

که وجودشان شادی، بخش و صفایشان پایه آرامش من است.

## تقدیر و تشکر

سپاس مخصوص خداوند مهربان که به انسان توانایی و دانایی بخشید تا به بندگانش شفقت ورزد، مهربانی کند و در حل مشکلاتشان یاری شان نماید. از راحت خویش بگذرد و آسایش هم نوعان را مقدم دارد، با او معامله کند و در این خلوص انباز نکمیرد و خوش باشد که پروردگار سمیع و بصیر است.

خدا را سپاس می گویم که به من این فرصت را داد تا به این مرحله از علم رسیده و از بیچ محبتی دریغ نکرد و در تمام مراحل زندگی مرا قوت قلب بود.

حال بر خود واجب می دانم که مراتب تقدیر و تشکر خالصانه و صمیمانه خود را تقدیم عزیزانی نمایم که بدون کمک و همکاری آن بلیغ نمودن این راه برایم خیلی دشوار می شد.

نمی توانم معنایی بالاتر از تقدیر و تشکر بر زبانم جاری سازم و سپاس خود را در وصف استاد خویش، استاد فرزانه و مهربانم جناب آقای دکتر مهدی امنیت طلب آشکار نمایم، که هر چه گویم و سرایم، کم گفته ام.

از خانواده بسیار عزیز و بزرگوارم، پدرم و مادرم که همواره در طول تحصیل متحمل زحمت بوده اند و تکیه گاه من در مواجهه با مشکلات، و وجودشان مایه دلگرمی من بوده است، کمال تشکر و قدردانی را دارم.

ساره کلکار شهرپور ۱۳۹۱

## فهرست مطالب

چکیده..... ۱

مقدمه..... ۲

### فصل اول: کوانتش میدان الکترومغناطیسی

مقدمه..... ۴

۱-۱ کوانتش یک میدان تک مد..... ۴

۲-۱ ویژه مقدار و ویژه حالت عملگر هامیلتونی..... ۷

۳-۱ اندرکنش اتم دوترازی با میدان کلاسیکی..... ۱۱

۴-۱ ساختار هامیلتونی مؤثر سیستم..... ۱۷

۵-۱ نتایج عددی و مقایسه با نتایج تحلیلی..... ۱۸

۶-۱ اندرکنش اتم دوترازی با میدان کوانتومی تک مد (مدل جینز کامینگ)..... ۲۰

۷-۱ هامیلتونی سیستم در تصویر برهم کنش..... ۲۲

۸-۱ روش دامنه ی احتمال..... ۲۳

۹-۱ اندرکنش اتم سه ترازوی با یک کاواک دو مدی..... ۲۶

### فصل دوم: مفاهیم اولیه درمورد درگاه‌های کوانتومی

مقدمه	۲۹
۱-۲ نظریه اطلاعات کوانتومی	۳۰
۲-۲ بیت‌های کوانتومی	۳۰
۳-۲ کیوتریت‌ها و کیوکوادریته‌ها	۳۳
۴-۲ درهم‌تنیدگی کیوبیتی	۳۴
۵-۲ درگاه‌های کوانتومی	۳۶
۶-۲ درگاه‌های تک-کیوبیتی	۳۶
۱-۶-۲ درگاه کوانتومی تک-کیوبیتی <i>NOT</i>	۳۷
۲-۶-۲ درگاه تک-کیوبیتی فاز	۳۷
۳-۶-۲ درگاه تک-کیوبیتی هادامارد	۳۸
۴-۶-۲ درگاه‌های تک-کیوبیتی پائولی $Y, Z$ و واحد $I$	۳۹
۷-۲ درگاه‌های دو کیوبیتی	۴۰
۱-۷-۲ درگاه دو کیوبیتی <i>CNOT</i>	۴۰
۲-۷-۲ درگاه دو کیوبیتی <i>QPG</i>	۴۰
۳-۷-۲ درگاه دو کیوبیتی <i>SWAP</i>	۴۱
۸-۲ درگاه‌های سه کیوبیتی	۴۲
۹-۲ مدل‌های اسپینی هایزنبرگ	۴۳

فصل سوم: ایجاد درگاه‌های منطقی کوانتومی در یک کاواک با در نظر گرفتن جابجایی استارک

مقدمه.....	۴۵
۱-۳ مدل و معادلات اساسی اتم سه ترازوی در یک کاواک.....	۴۶
۲-۳ اجرای عملگرهای درگاه منطقی کوانتومی.....	۵۰
۱-۲-۳ عملگر درگاه فاز کوانتومی.....	۵۰
۲-۲-۳ عملگر $CNOT$ .....	۵۲
۳-۲-۳ عملگر درگاه $SWAP$ .....	۵۴
۳-۳ نقش فاز ثابت جفت‌شدگی در درگاه $SWAP$ .....	۵۵
۴-۳ نقش جابجایی استارک در عملگرهای منطقی کوانتومی.....	۵۷

### فصل چهارم: انتقال حالت‌های کوانتومی در یک شبکه کوانتومی با روش $\pi$ - پالس

مقدمه.....	۵۸
۱-۴ مدل و معادلات اساسی.....	۵۹
۲-۴ روش انتقال حالت کوانتومی.....	۶۱
۳-۴ شبکه کوانتومی.....	۶۴
۴-۴ حافظه کوانتومی.....	۶۷

### فصل پنجم: فاز بری و درهم‌تنیدگی برای مدل دو اسپینی با اندرکنش دزایلوشنسکی - موریای در میدان-

#### های مغناطیسی

مقدمه.....	۶۹
۱-۵ قضیه بی‌دررو.....	۷۰



۷۰	۲-۵ فاز هندسی بری.....
۷۳	۳-۵ هامیلتونی سیستم دواسپینی در حضور اندرکنش $DM$ و میدان مغناطیسی خارجی.....
۷۷	۴-۵ محاسبه فاز بری.....
۷۸	۵-۵ بررسی رفتار فاز بری.....
۸۲	۶-۵ تلاقی.....
۸۴	۷-۵ بررسی رفتار تلاقی و درهم تنیدگی.....
۹۰	نتیجه گیری.....
۹۲	مراجع.....
۹۵	چکیده انگلیسی.....

## فهرست شکل‌ها

### فصل اول

شکل (۱-۱): میدان الکتریکی در داخل یک کاواک با دیواره‌های رسانا که در  $z=l$  و  $z=0$  قرار دارد: فرض شده

است که میدان در جهت  $x$  قطبیده باشد..... ۴

شکل (۲-۱): اندرکنش اتم دو ترازی که با میدان الکتریکی، که  $\Delta$  نامیزانی تراز می‌باشد..... ۱۱

شکل (۳-۱): نمودار جمعیت بر حسب زمان در یک سیستم دو تراز طبق روابط (۷۱-۱) و (۷۲-۱) برای حالت

$\Delta = 0$  و  $\Omega = 1$ . که جمعیت با فرکانس رابی بین حالات پایه و برانگیخته جابجا می‌شود..... ۱۹

شکل (۴-۱): نمودار جمعیت بر حسب زمان در یک سیستم دو تراز طبق روابط (۷۱-۱) و (۷۲-۱) برای حالت

$\Delta = 2$  و  $\Omega = 1$ . که جمعیت با فرکانس رابی بین حالات پایه و برانگیخته جابجا می‌شود..... ۱۹

شکل (۵-۱): اتم نوع  $\Lambda$  که با یک کاواک دو مدی اندرکنش می‌کند،  $\Delta_i$  ( $i=1,2$ ) نامیزانی تک فوتونی،  $a$  و  $b$  دو

مد کاواک.  $g_1$  و  $g_2$  ثابت جفت‌شدگی اتم و کاواک می‌باشند..... ۲۶

### فصل دوم

شکل (۱-۲): کره بلاخ..... ۳۱

شکل (۲-۲): درگاه‌های تک-کیوبیتی. (۱): درگاه *NOT*، (۲) درگاه هادامارد، (۳) درگاه فاز..... ۳۸

شکل (۳-۲): درگاه‌های دوکیوبیتی. (۱) درگاه *CNOT*، (۲) درگاه *Conditional-Phase*، (۳) درگاه

*SWAP*..... ۴۲

شکل (۴-۲): درگاه سه کیوبیتی. (۱) درگاه *Toffoli*، (۲) درگاه *CSWAP*..... ۴۳

## فصل سوم

شکل (۱-۳): اتم سه ترازوی در یک کاواک دومی،  $|g\rangle, |f\rangle$  ترازهای پایه و  $|e\rangle$  تراز برانگیخته می‌باشند..... ۵۱

## فصل چهارم

شکل (۱-۴): اتم سه ترازوی، با ترازهای  $|g\rangle, |f\rangle$  و  $|e\rangle$ ، که با دو مد متعامد از کاواک،  $a$  و  $b$  اندرکنش می‌کند.  $g_1$

و  $g_2$  ثابت جفت‌شدگی اتم و کاواک می‌باشند.  $\Delta$  نامیزانی تک فوتونی است..... ۵۹

شکل (۲-۴): طرحواره چگونگی روش  $QST$ ، برای تعدادی از اتم‌ها که با یک کاواک دو مدی به طور پیوسته

اندرکنش می‌کنند و  $T = \Delta\pi/2g^2$  زمان اندرکنش می‌باشد..... ۶۴

شکل (۳-۴): طرحواره‌ای برای شبکه کوانتومی بین کاواک‌ها توسط کانال کوانتومی..... ۶۵

شکل (۴-۴): طرحواره‌ای برای شبکه کوانتومی دارای دو کاواک دو مدی..... ۶۷

## فصل پنجم

شکل (۱-۵): (۱) وابستگی ویژه مقادیر به  $B_1$ ، (۲) وابستگی ویژه مقادیر به  $D$ ، (۳) وابستگی ویژه مقادیر به  $J$ ..... ۷۶

شکل (۲-۵): (۱) رسم ویژه مقادیر برحسب  $J$  و  $D=1$ ، (۲) رسم ویژه مقادیر برحسب  $D$  و  $J=1$ ..... ۷۷

شکل (۳-۵): تغییرات فازهای بری  $\gamma_1, \gamma_2$  برحسب  $B_1$ ، برای  $D=0.5, J=1$ ..... ۷۹

شکل (۴-۵): تغییرات فازهای بری  $\gamma_3, \gamma_4$  برحسب  $B_1$ ، برای  $D=0.5, J=1$ ..... ۷۹

شکل (۵-۵): (۱) رسم فازهای بری برحسب  $J$ ، (۲) رسم فازهای بری برحسب  $D$ ..... ۸۰

شکل (۶-۵): فازهای بری برحسب  $D, J$ ، به ازای  $B_1 = 0.8$  که خیلی متقارن می‌باشند..... ۸۱

شکل (۷-۵): تلاقی برحسب  $D, J$ ، به ازای  $B_1 = 0.8$  که شکل‌ها خیلی متقارن می‌باشند..... ۸۵

شکل (۸-۵): رسم تلاقی  $C(|\Phi_1\rangle)$  و  $C(|\Phi_2\rangle)$  برحسب  $D$  و  $J$ ..... ۸۵

شکل (۹-۵): رسم تلافی  $C(|\Phi_3\rangle)$  و  $C(|\Phi_4\rangle)$  بر حسب  $D$  و  $J$ ..... ۸۶

شکل (۱۰-۵): (۱) تغییرات تلافی  $C(|\Phi_1\rangle)$  و  $C(|\Phi_2\rangle)$  بر حسب  $B_1$ ، (۲) تغییرات تلافی  $C(|\Phi_3\rangle)$  و

$C(|\Phi_4\rangle)$  بر حسب  $B_1$ ..... ۸۶

## چکیده

در نظریه اطلاعات کوانتومی، انتقال اطلاعات و ذخیره اطلاعات کوانتومی خیلی ضروری می‌باشد. نظریه اطلاعات کوانتومی امکان ارسال اطلاعات با استفاده از سیستم‌های کوانتومی را فراهم می‌کند. امروزه روش‌های مختلفی برای ایجاد ارتباطات کوانتومی و انتقال اطلاعات کوانتومی وجود دارد. شبکه کوانتومی<sup>۱</sup> یکی از روش‌های قطعی برای انتقال دادن حالت کوانتومی بین کاواک‌ها می‌باشد، همچنین درهم‌تنیدگی این سیستم‌ها در میزان ارسال اطلاعات نقش مهمی ایفا می‌کند که این درهم‌تنیدگی‌ها در ایجاد درگاه‌های<sup>۲</sup> کوانتومی نقش دارند. این درگاه‌ها نیز در کاهش مراحل پردازش داده‌ها و در نهایت در طراحی کامپیوترهای کوانتومی، درگاه‌ها و کیوبیت‌ها که مدارهای کوانتومی را تشکیل می‌دهند، نقش دارند. بنابراین عملکرد کامپیوترهای کوانتومی به درگاه‌های منطقی بستگی دارد.

در این پایان‌نامه، در یک سیستم سه ترازی  $\Lambda$  گونه که با یک کاواک<sup>۳</sup> دو مدی اندرکنش می‌کند، نشان می‌دهیم که چگونه درگاه‌های دو کیوبیتی مختلفی از جمله درگاه  $QPG$ <sup>۴</sup>،  $CNOT$  و درگاه  $SWAP$  با استفاده از حالت‌های پایه اتمی ایجاد می‌شوند.

با استفاده از همین سیستم سه ترازی اتم و کاواک که مانند یک شبکه کوانتومی در نظر می‌گیریم، نشان خواهیم داد که چگونه یک حالت کوانتومی ناشناخته از یک اتم به اتم دیگر توسط یک کانال کوانتومی انتقال می‌یابد.

همچنین فازهای بری و درهم‌تنیدگی یک سیستم دو اسپینی را با استفاده از مدل  $XX$  هایزنبرگ، مورد بررسی قرار خواهیم داد.

---

<sup>۱</sup>. Quantum network  
<sup>۲</sup>. Gate  
<sup>۳</sup>. Cavity  
<sup>۴</sup>. Quantum phase gate

## مقدمه

علم فیزیک، مهم‌ترین علم در پردازش اطلاعات می‌باشد [۱]. اطلاعات توسط سیستم‌های فیزیکی ذخیره و پردازش می‌شوند. پردازش ماشینی اطلاعات در هر شکلی بر مبنای دیجیتال و محاسبات کلاسیک انجام می‌شود، اما یک روش بهتر و کاربردی‌تر برای پردازش اطلاعات براساس مکانیک کوانتومی می‌باشد. این روش جدید با ویژگی‌هایی همراه است که آن را از محاسبات کلاسیکی بسیار متمایز می‌سازد. کامپیوترهای دیجیتالی با بیت‌ها<sup>۱</sup> کار می‌کنند، نظریه اطلاعات کلاسیکی انتقال بین حالت‌های کلاسیکی را بررسی می‌کند. در کامپیوترهای کلاسیکی دایر، همه بیت‌ها همیشه حالت مشخصی، به عنوان مثال 011100101... دارند. بر خلاف آن محاسبات کوانتومی شامل حالت‌های کوانتومی می‌باشند، حالت کامپیوترهای کوانتومی به وسیله تابع موج یا یک بردار حالت در فضای هیلبرت توصیف می‌شوند.

نظریه اطلاعات کوانتومی انتقال بین حالت‌های کوانتومی از منبع تا دریافت کننده اطلاعات را بررسی می‌کند، به عنوان مثال حالتی از بیت‌ها در کامپیوتر کوانتومی بصورت  $|\psi\rangle = a|011100101\rangle + b|111010001\rangle + \dots$  می‌باشد، که ضرایب  $a, b, \dots$  اعداد مختلط می‌باشند. رفتار مدل اسپینی مانند سیستم‌های کوانتومی دو ترازی است، که آنها را ابزاری مهم برای محاسبات کوانتومی و اطلاعات کوانتومی می‌سازد. برای انجام دادن محاسبات کوانتومی، درهم‌تنیدگی که خاصیت نامحدود سیستم‌های کوانتومی است، انرژی سیستم‌های کوانتومی دو ترازی که کیوبیت‌ها نقش واحد اطلاعات کوانتومی و اندرکنش اسپین‌ها، نقش درگاه‌های کوانتومی را بازی می‌کنند، ابزاری مهم برای مطالعه می‌باشد. درهم‌تنیدگی<sup>۲</sup> بین دو کیوبیت زمانی ایجاد می‌شود که بین کیوبیت‌ها اندرکنشی وجود داشته باشد [۲ و ۳].

در فصل اول این پایان‌نامه با استفاده از معادلات ماکسول<sup>۳</sup> به معرفی میدان‌های کوانتومی می‌پردازیم و همچنین اندرکنش اتم دو ترازی و سه ترازی را بررسی می‌نماییم.

در فصل دوم در مورد مفاهیم پایه کوانتومی و درگاه‌های کوانتومی بحث خواهیم کرد.

---

<sup>۱</sup>. Bit  
<sup>۲</sup>. Entanglement  
<sup>۳</sup>. Maxwell

و در فصل سوم نشان خواهیم داد که چگونه درگاه‌های منطقی<sup>۱</sup> مختلف دو کیوبیتی با استفاده از اندرکنش اتم و کاواک ایجاد می‌شوند.

در فصل چهارم هم مدلی مشابه فصل سه در نظر می‌گیریم، نشان خواهیم داد که چگونه انتقال حالت‌های کوانتومی به وسیله شبکه کوانتومی ایجاد می‌شوند. همچنین در فصل پنجم به محاسبات کوانتومی هندسی می‌پردازیم و فاز بری<sup>۲</sup> و درهم‌تنیدگی در یک سیستم دو کیوبیتی با انتخاب مدل اسپینی هاینبرگ را محاسبه خواهیم کرد.

---

<sup>۱</sup>. Logic gate  
<sup>۲</sup>. Berry phase

## فصل اول

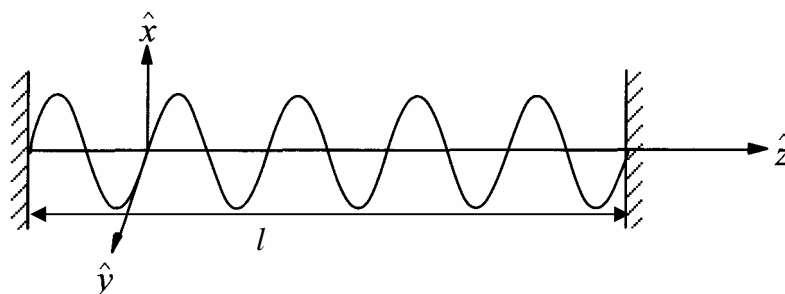
### کوانتش میدان الکترومغناطیسی

#### مقدمه

در این فصل درباره‌ی کوانتش میدان الکترومغناطیسی و بعضی از خواص آن بحث می‌نماییم. ابتدا هامیلتونی یک میدان کوانتومی و ویژه حالات و ویژه مقادیر این میدان کوانتیزه را بررسی خواهیم کرد. در نهایت به بررسی اندرکنش سیستم دو تراز با یک میدان کوانتومی و سیستم سه تراز درون یک کاواک دو مدی می‌پردازیم.

#### ۱-۱ کوانتش یک میدان تک مد

برای شروع این مبحث یک میدان تابشی تک مد برای یک کاواک با دیواره‌های رسانا که در  $z=0$  و  $z=l$  قرار دارد را در نظر می‌گیریم. این کاواک در شکل (۱-۱) نشان داده شده است.



شکل (۱-۱): میدان الکتریکی در داخل یک کاواک با دیواره‌های رسانا که در  $z=0$  و  $z=l$  قرار دارد: فرض شده است که میدان در جهت

$x$  قطبیده باشد.



همانطور که از شکل ۱-۱ مشاهده می‌شود، میدان الکتریکی در جهت محور  $x$  قطبیده<sup>۱</sup> می‌باشد. فرض می‌کنیم این میدان وابستگی فضایی مناسب را برای یک تشدیدگر کاواکی به طول  $l$  داشته باشد،  $\vec{E}(r,t) = \hat{e}_x E_x(z,t)$  که بردار یکه پلاریزاسیون می‌باشد. معادلات ماکسول بدون وجود چشمه و در خلأ بصورت زیر می‌باشند [۴]:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1-1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (3-1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0. \quad (4-1)$$

در رابطه (۱-۱)  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$  و  $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$  می‌باشد، که  $\mu_0$  و  $\epsilon_0$  به ترتیب نفوذپذیری مغناطیسی و گذردهی فضای آزاد

هستند. بنابراین رابطه (۱-۱) را می‌توان بصورت  $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  نوشت. یک میدان تک مد نوسانی را با در نظر گرفتن

معادلات ماکسول و شرایط مرزی می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\vec{E}_x(z,t) = A q(t) \sin(kz) \quad (5-1)$$

در رابطه (۵-۱)،  $k = \frac{\omega}{c}$  عدد موج و  $A = \left(\frac{2\omega^2}{V \epsilon_0}\right)^{1/2}$  می‌باشد، که  $\omega$  فرکانس مد نوسانی و  $V$  حجم مؤثر کاواک هستند.

$q(t)$  یک مؤلفه وابسته به زمان، با بعد طول همانند یک موقعیت کانونیکی برای سیستم است.

میدان مغناطیسی در داخل کاواک با استفاده از رابطه (۵-۱) و معادلات ماکسول بصورت  $\vec{B}(r,t) = \hat{e}_y B_y(z,t)$  بدست

می‌آید که  $B_y(z,t)$  بصورت زیر است:

$$B_y(z,t) = A \left(\frac{\mu_0 \epsilon_0}{k}\right) \dot{q}(t) \cos(kz) \quad (6-1)$$

---

<sup>۱</sup>. Polarization

در رابطه (۶-۱)، برای یک ذره به جرم واحد،  $\hat{q}(t)$  اندازه حرکت کانونیکی (تکانه کانونیکی) است که  $p(t) = \dot{q}(t)$  می باشد. انرژی میدان کلاسیکی یا هامیلتونی کلاسیکی  $H$  برای یک میدان تک مد نوسانی بصورت زیر بدست می آید:

$$H = \frac{1}{2} \int_V d\tau [\epsilon_0 \bar{E}_x^2 + \frac{1}{\mu_0} \bar{B}_y^2] \quad (۷-۱)$$

به نحوی که انتگرال روی کل حجم کاواک است. در ادامه با جایگذاری  $E_x$ ,  $B_y$  به ترتیب از معادلات (۵-۱) و (۶-۱) در معادله (۷-۱) داریم:

$$H = \frac{1}{2} (p^2 + \omega^2 q^2) \quad (۸-۱)$$

به وضوح مشاهده می شود که هامیلتونی (۸-۱)، هامیلتونی یک میدان تک مد نوسانی با انرژی نوسانگر هماهنگ ساده با جرم برابر واحد می باشد. بنابراین هر مد میدان معادل دینامیکی برای یک نوسانگر هارمونیک مکانیکی است.

مسئله دینامیکی حاضر را با در نظر گرفتن  $\hat{p}$ ,  $\hat{q}$  به عنوان عملگرهایی که از روابط جابجایی زیر پیروی می کنند، می توان کوانتیزه کرد:

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar \quad (۹-۱)$$

$$[\hat{p}, \hat{p}] = [\hat{q}, \hat{q}] = 0 \quad (۱۰-۱)$$

بنابراین میدان های الکتریکی و مغناطیسی تک مد بصورت زیر در می آیند:

$$\hat{E}_x(z, t) = A \hat{q}(t) \sin(kz) \quad (۱۱-۱)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = A \left( \frac{\epsilon_0 \mu_0}{k} \right) \hat{p}(t) \cos(kz) \quad (۱۲-۱)$$

و هامیلتونی سیستم بر حسب این عملگرها برابر می شود با:

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2) \quad (۱۳-۱)$$

عملگرهای  $\hat{q}$  و  $\hat{p}$  هریتی هستند، بنابراین مشاهده‌پذیر می‌باشند. حال با معرفی عملگرهای خلق،  $\hat{a}^+$  و نابودی،  $\hat{a}$  بصورت زیر، مشابه با بحث کوانتومی نوسانگر هماهنگ ساده، میدان‌ها را بر حسب آنها خواهیم نوشت:

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}) \quad (14-1)$$

$$\hat{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}) \quad (15-1)$$

و همچنین می‌توان نوشت:

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}(\hat{a} + \hat{a}^+) \quad (16-1)$$

$$\hat{p} = -i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}}(\hat{a} - \hat{a}^+) \quad (17-1)$$

عملگرهای میدان الکتریکی و مغناطیسی بر حسب عملگرهای خلق و نابودی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{E}_x(z,t) = \varepsilon(\hat{a} + \hat{a}^+) \sin(kz) \quad (18-1)$$

$$\vec{B}_y(z,t) = -i\beta(\hat{a} - \hat{a}^+) \cos(kz) \quad (19-1)$$

در روابط (۱۸-۱) و (۱۹-۱) ضرایب،  $\varepsilon = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{\varepsilon_0 V}}$  و  $\beta = \left(\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{k}\right) \sqrt{\frac{\hbar\omega^2}{\varepsilon_0 V}}$  هستند و عملگرهای  $\hat{a}$  و  $\hat{a}^+$  در رابطه

جابجایی به شکل زیر صدق می‌کنند.

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (20-1)$$

بنابراین هامیلتونی (۸-۱) بر حسب عملگرهای خلق و نابودی به شکل زیر درمی‌آید:

$$\hat{H} = \hbar\omega\left(\hat{a}\hat{a}^+ + \frac{1}{2}\right) \quad (21-1)$$

## ۲-۱ ویژه مقدار و ویژه حالت عملگر هامیلتونی

در این بخش کار خود را به یک تک مد از میدان با فرکانس  $\omega$ ، که عملگرهای خلق و نابودی آن به ترتیب  $\hat{a}, \hat{a}^+$  هستند، محدود می کنیم، که عملگر  $\hat{a}^+ \hat{a}$  را عملگر تعداد می نامند و با  $\hat{n}$  نمایش می دهیم. فرض می کنیم که  $|n\rangle$  ویژه حالت انرژی متناظر با ویژه مقدار انرژی  $E_n$  باشد، در آن صورت معادله ویژه مقداری به شکل زیر نوشته می شود:

$$\hat{H}|n\rangle = \hbar\omega\left(\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}\right)|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (22-1)$$

اگر عملگر  $\hat{a}$  را از سمت چپ اعمال کنیم، و از روابط جابجایی زیر استفاده کنیم:

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1 \quad (23-1)$$

و

$$[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega \hat{a} \quad (24-1)$$

خواهیم داشت:

$$\hat{H}(\hat{a}|n\rangle) = (E_n - \hbar\omega)(\hat{a}|n\rangle) \quad (25-1)$$

در اینجا معلوم می شود که چرا عملگر  $\hat{a}$  را عملگر نابودی می نامند، زیرا که به مقدار  $\hbar\omega$  انرژی از بین می رود و به همین طریق می توان ثابت کرد که عملگر  $\hat{a}^+$ ، عملگر خلق است زیرا به مقدار  $\hbar\omega$  انرژی به وجود می آید. رابطه (۲۵-۱) بدان معناست که حالت:

$$|n-1\rangle = \frac{1}{\alpha_n} \hat{a}|n\rangle \quad (26-1)$$

نیز یک ویژه حالت انرژی است منتها با ویژه مقدار کاهش یافته

$$E_{n-1} = E_n - \hbar\omega \quad (27-1)$$

در معادله (۲۶-۱)،  $\alpha_n$  یک ثابت است که از طریق شرط نرمالیزاسیون بدست خواهد آمد.

$$\langle n-1|n-1\rangle = 1 \quad (28-1)$$