دانشگاه یزد

دانشکده‌ی ریاضی

پایان نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض / هندسه توپولوژی

چندجمله‌ای‌ها در نظریهٔ گره

استاد راهنما:

دکتر حسین خورشیدی

استاد مشاور:

دکتر سعید علیخانی

پژوهش‌گر:

ایمان کاظمیه

شهریورماه ۱۳۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

قدردانی و تشکر

سپاس بی کران به درگاه حق، که بی شک بدون لطف و یاری او نمی توان سرانجامی برای امور تصور کرد.

از پدر و مادرم که در تمام مراحل تحصیل همراه و مشوق من بوده اند بسیار سپاسگزارم و از خداوند متعال برای آنان سلامتی و هر آنچه خیر و نیکی است آرزومندم.

بر خود لازم می دانم به رسم ادب از کسانی که در این امر مرا یاری نموده اند قدردانی کنم، به ویژه از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر حسین خورشیدی به خاطر راهنمایی های دلسوزانه شان در کلیه مراحل انجام این پژوهش و پی گیری مداوم و صبورانه شان برای هر چه بهتر بودن این پایان نامه کمال تشکر و قدردانی را دارم.

از جناب آقای دکتر سعید علیخانی که مشاور اینجانب در این پایان نامه بودند متشکرم.

از داور داخلی جناب آقای دکتر اکبر دهقان نژاد که در طول مدت تحصیل از ایشان مطالب بسیاری آموختم و داور خارجی جناب آقای دکتر سید محمد انوریه که راهنمایی های هر دو بزرگوار باعث منسجم تر شدن پایان نامه شد تشکر فراوان دارم.

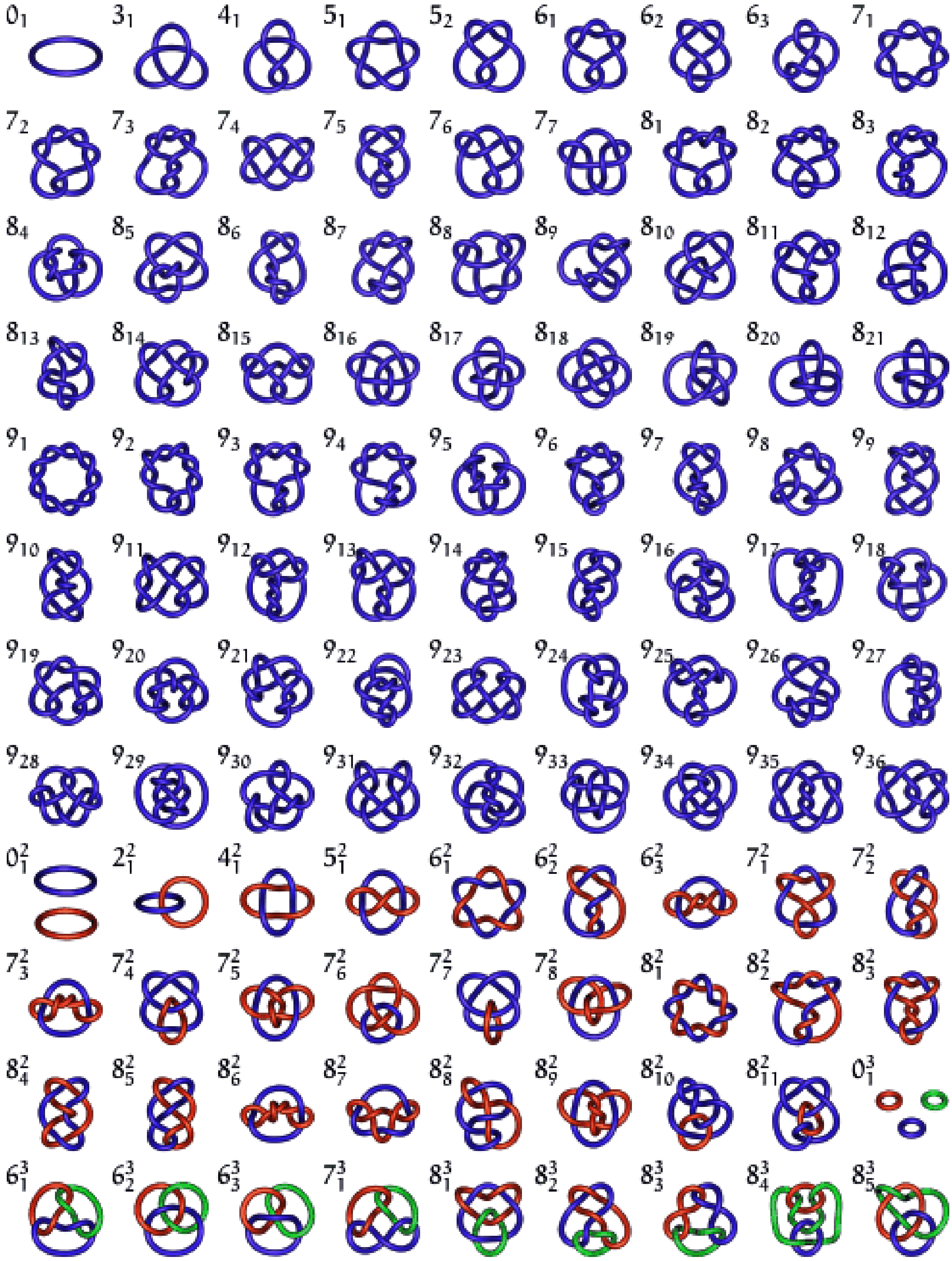
چکیده

بخش بزرگی از نظریه گره، صرف این می‌شود که کدام گره ها با هم یکی هستند و کدام گره ها متمایزند. «اگر نمایشی از یک گره داشته باشیم، آیا می‌توانیم بگوییم که ناگره است یا نه؟» الگوریتم‌های مختلفی برای تشخیص گره‌ها از یکدیگر وجود دارد که از طریق محاسبات کامپیوتری این کار را انجام می‌دهند. یکی از مؤثرترین روش‌های تشخیص گره‌ها تعریف ناورداهای گرهی است و یکی از بهترین و موفقترین ناورداها چندجمله‌ای‌ها هستند. در اینجا به بررسی بعضی این چندجمله‌ای‌های گرهی خواهیم پرداخت. براکت کافمن، جونز، الکساندر، هامفلی و کافمن، چندجمله‌ای‌هایی هستند که مورد تجزیه و تحلیل قرار خواهند گرفت.

کلمات کلیدی: نظریه گره، ناوردای گره، چندجمله‌ای الکساندر، چندجمله‌ای براکت، چندجمله‌ای جونز، چندجمله‌ای هامفلی.

مقدمه

پس از معرفی مختصری از نظریهٔ گره در فصل اول، در فصل دوم ساده‌ترین و در عین حال پایه‌ای‌ترین چندجمله‌ای در مبحث گره‌ها یعنی چندجمله‌ای براکت کافمن را معرفی خواهیم کرد. در ادامه به روشی برای محاسبهٔ این چندجمله‌ای اشاره می‌کنیم که به طرز چشمگیری خطای محاسبه را کاهش می‌دهد. در فصل سوم به چندجمله‌ای جونز خواهیم پرداخت. این چندجمله‌ای با پاسخ به مسائلی که تا مدت‌ها بدون پاسخ مانده بودند به مانند انقلابی در نظریهٔ گره بوده و تا امروز نیز نقش بسیار مهمی در نظریهٔ گره ایفا می‌کند. در فصل چهارم قدیمی‌ترین چندجمله‌ای در نظریهٔ گره یعنی چندجمله‌ای الکساندر را معرفی می‌کنیم. این چندجمله‌ای که دارای پیشینه‌ای جبری می‌باشد به خوبی در قالب مفاهیم همولوژی بیان و درک شده و کاربردهای بسیاری در زمینه‌های علمی مختلف است. همچنین چندجمله‌ای الکساندر دسته‌ای خاص از گره‌ها به طور عمده مورد بررسی قرار گرفته‌اند؛ این گره‌ها برای تبدیل شدن به گره‌های $۱۰_{۱۳۲}$ و (۵،۲)-چنبره یا $۵_{۱}$ به تنها یک تغییر تلاقی نیاز دارند. در فصل پنجم و ششم به دو تعمیم دو متغیره از چندجمله‌ای جونز یعنی چندجمله‌ای‌های هامفلی و کافمن خواهیم پرداخت. علاوه بر این، برهان وجود این چندجمله‌ای‌ها ذکر شده است. نحوهٔ استتار چندجمله‌ای‌های جونز و الکساندر در چندجمله‌ای‌های هامفلی و کافمن نیز بیان گردیده‌است. نهایتاً در فصل هفتم علاوه بر معرفی جنبه‌های قابل بررسی دیگر در مورد چندجمله‌ای‌های گرهی، اشاره‌ای کوتاه به دیگر چندجمله‌ای‌های ناوردا و دارای اهمیت در نظریهٔ گره خواهیم کرد که مجال پرداختن به همهٔ آن‌ها در این پایان‌نامه نبوده‌است.



شکل ۱: شماری از گره‌ها و زنجیرهای شناخته شده. نماد n_i^j نشان‌دهندهٔ i امین زنجیر دارای j جزء و n تلاقی موجود در جدول می‌باشد.

فهرست مطالب

۱ معرفی مختصری از نظریهٔ گره **۱**

۱.۱ گره و زنجیر ۲

۲.۱ ایزوتوپی‌های مسطح و فضایی ۷

۳.۱ حرکات ریدمیستر ۹

۴.۱ طرح مسئله ۱۵

۵.۱ تاریخچه ۱۷

۲ چندجمله‌ای براکت و براکت کافمن **۲۰**

۱.۲ ساخت چندجمله‌ای براکت ۲۱

۲.۲ روش دیگر محاسبه چندجمله‌ای براکت کافمن ۲۸

۳.۲ کاهش احتمال خطا در محاسبه ۳۱

۳ چند جمله‌ای جونز **۳۹**

۱.۳ معرفی چندجمله‌ای جونز ۴۰

۲.۳ ویژگی‌ها ۴۳

۳.۳ کاربردهای مهم ۴۶

۴ چندجمله‌ای الکساندر و الکساندر-کانوی **۵۴**

۱.۴ معرفی چندجمله‌ای الکساندر ۵۵

۲.۴ یک روش محاسبه ۶۰

۳.۴ چندجمله‌ای الکساندر-کانوی ۶۳

۴.۴ نحوه محاسبهٔ درخت جواب ۶۸
۵.۴ چندجمله‌ای الکساندر و گره‌های متمایز در یک تلاقی ۶۹

۵ هامفلی، تعمیمی از چندجمله‌ای جونز ۸۲
۱.۵ معرفی ۸۳
۲.۵ ویژگی‌ها ۸۵
۳.۵ بافته‌ها و چندجمله‌ای هامفلی ۸۹
۴.۵ برهان وجود و خوشتعریفی ۹۲
۵.۵ نحوهٔ جدول‌بندی ۱۰۰

۶ چندجمله‌ای کافمن ۱۰۳
۱.۶ معرفی چندجمله‌ای کافمن و نگاشت گشایش ۱۰۴
۲.۶ وجود و خوشتعریفی ۱۰۵
۳.۶ ارتباط بین چندجمله‌ای‌های هامفلی و کافمن ۱۱۱
۴.۶ نحوهٔ جدول‌بندی ۱۱۳

۷ سایر رویکردها ۱۱۷

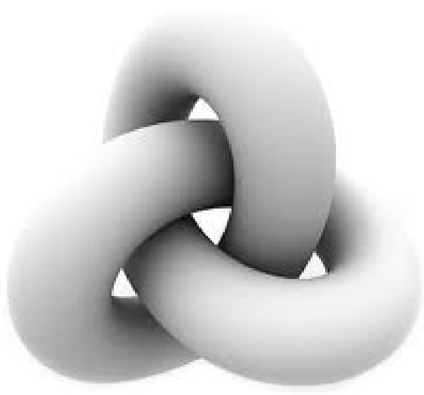
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۱۲۲

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۱۲۹

مراجع ۱۳۷

فصل ۱

معرفی مختصری از نظریهٔ گره



در این فصل به بیان مفاهیمی از نظریهٔ گره می‌پردازیم که در این پایان نامه مورد استفاده قرار می‌گیرند. منابع اصلی مورد استفاده عبارتند از [۲] ، [۱۴] ، [۸]، [۵] ، [۷].

۱.۱ گره و زنجیر

تعریف ۱.۱.۱. (گره و زنجیر)

یک زنجیر خانواده‌ای متناهی از منحنی‌های جدا از هم، هموار، جهت‌دار یا بدون جهت و بسته در $\mathbb{R}^3$ یا به طور معادل در S^3 است.[۱] یک گره، زنجیری با یک جزء تشکیل دهنده است. به مفهوم دقیق‌تر، یک گره زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^3$ است که با S^1 همئومورف بوده و می‌توان آن را به وسیلهٔ تعداد متناهی[۲] نقطه (تلاقی‌ها) و پاره‌خط‌های باز (کمان‌ها) بیان کرد[۳]. ساده ترین گره ممکن، دایره بدون گره است که آن را «ناگره» یا «گره بدیهی» می‌نامیم. گره ساده بعدی «گره سه‌برگی» نام دارد، شکل ۱.۱.

شکل ۱.۱: (الف) ناگره (ب) گره سه‌برگی.

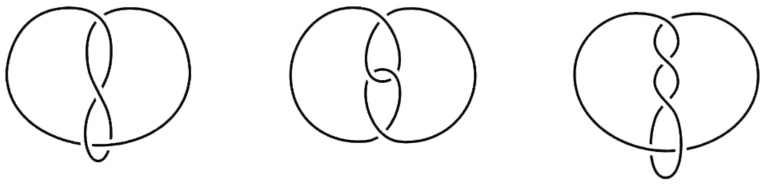
تعریف ۲.۱.۱. (انواع تلاقی)

به قسمتی از یک گره که دو رشته از روی یکدیگر عبور می‌کنند یک «تلاقی» می‌گوییم. نسبت به یک رشته به خصوص تلاقی‌ها می‌توانند «روگذر» یا «زیرگذر» باشند. شکل‌های متعددی از یک گره ثابت وجود دارد. در شکل ۲.۱، گره «هشت لاتین» و در شکل ۳.۱ سه نمایش متفاوت از آن را می‌بینیم. به چنین اشکالی از یک گره یک «نمایش» یا «نمودار» می‌گوییم[۴]. در واقع اگر گره در فضای $\mathbb{R}^3$

[۱] دربرخی از متون به جای زنجبر از واژهٔ «پیوند» استفاده می‌گردد.
[۲] چنین گرهی را «اهلی» و در حالت نامتناهی، گره را «وحشی» می‌نامیم.
[۳] در اینجا به گره‌ها و زنجیرهای یک بعدی می‌پردازیم اما اگر نشاندن $S^n \subset S^{n+1}$ را در نظر بگیریم با گره‌های n-بعدی روبرو خواهیم شد.
[۴] این کلمات به عنوان ترجمهٔ واژه‌های «$projection$» و «$Diagram$» در نظر گرفته شده‌اند و البته کلمهٔ «نگار» نیز برای ترجمهٔ آن ها به کار رفته است. از آنجا که در بخشی از پایان‌نامه با مفاهیمی از نظریهٔ نمایش مواجه خواهیم شد و در آن مبحث با مفهوم ماتریس نمایش روبرو می‌شویم لازم است بین نمایش یک گره و ماتریس نمایش تمایز قائل شویم.

نشانده شده باشد، یک نمایش از آن عبارت است از تصویر آن را در امتداد محور z روی صفحهٔ xy که زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^۲$ می‌باشد.

شکل ۲.۱: ساخت گره هشت لاتین با طناب.



شکل ۳.۱: سه نمایش از گره هشت لاتین.

گره هشت لاتین را چهار-تلاقی گوییم، چون نمایشی از آن با چهار تلاقی وجود دارد و نمایشی از آن با کمتر از این تعداد تلاقی وجود ندارد.

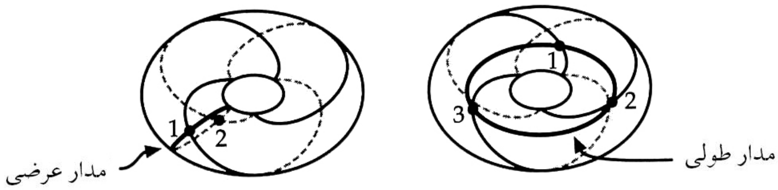
تعریف ۳.۱.۱. (گره متناوب)

«گره متناوب» گره ای است با نمایشی که اگر درطول آن در یک جهت مشخص حرکت کنیم، تلاقی‌ها یکی در میان روگذر و زیر گذر می‌شوند. می‌توان نشان داد که با تغییر دادن تلاقی‌ها، بصورت روگذر کردن زیرگذرها یا برعکس، هر نمایش از یک گره را می‌توان به نمایش یک گره متناوب تبدیل کرد. البته لازم به ذکر است که گره متناوب حاصل با گره اولیه یکی نیست. گره سه‌برگی نمونه‌ای از یک گره متناوب است.

همهٔ گره ها را می‌توان در سه دسته «چنبره‌ای» ، « ماهواره‌ای» و «هذلولوی» جای داد. در اینجا تنها به تعریف گره‌های چنبره‌ای که در بخش‌های آینده دارای کاربرد خواهد بود، اکتفا می‌کنیم.

تعریف ۴.۱.۱. (گره چنبره‌ای)

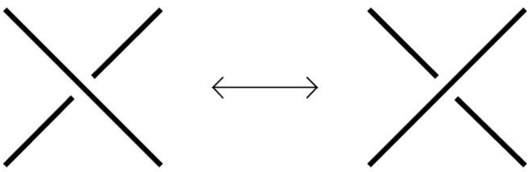
اگر یک گره را بتوان به نحوی روی یک چنبره استاندارد نشاند که p بار مدار عرضی و q بار مدار طولی چنبره را قطع کند آن را یک گره (p,q)-چنبره می‌نامیم. دو عدد p و q همیشه نسبت به یکدیگر اول هستند. به عنوان مثال گره سه‌برگی یک گره (۲،۳)-چنبره است، شکل ۴.۱ .



شکل ۴.۱:

تعریف ۵.۱.۱. (تغییر تلاقی)

اگر یک تلاقی از گره را به صورتی تغییر دهیم که رشتهٔ روگذر به زیرگذر و یا برعکس تبدیل شود، گوییم که یک تغییر تلاقی صورت گرفته است. بدیهی است که پس از تغییر هر تلاقی با گره جدیدی روبرو خواهیم بود، شکل ۵.۱ .

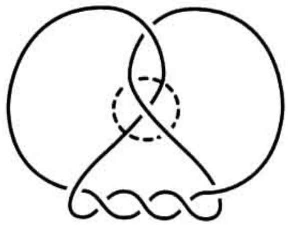


شکل ۵.۱: تغییر تلاقی

تعریف ۶.۱.۱. (عدد ناگره‌ای)

گوییم گره K دارای عدد ناگره‌ای n است اگر دارای نمایشی باشد که در آن با تغییر دادن n تلاقی بتوان به ناگره رسید و در هیچ نمایش دیگری تعداد تغییر تلاقی کمتر از n آن را به ناگره تبدیل نکند. عدد ناگره ای یک گره را با $u(K)$ نشان می‌دهیم. به عنوان مثال در شکل ۶.۱ اگر تلاقی مشخص

شده با دایره را تغییر دهیم گره ۷۲ به ناگره تبدیل می‌شود. تغییر تنها یک تلاقی، گره را به کلی ناگره می‌کند؛ گوییم که ۷۲ دارای عدد ناگره‌ای ۱ است .



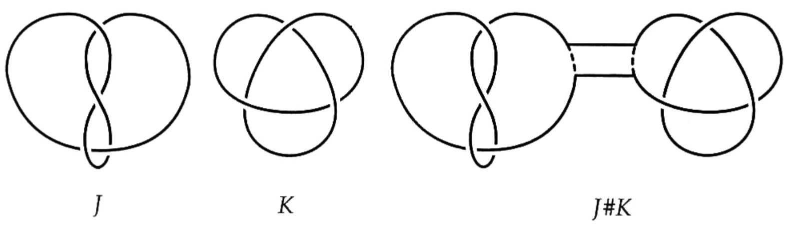
شکل ۶.۱: گره ۷۲

تعریف ۷.۱.۱. (گره آینه‌ای)

اگر همهٔ تلاقی‌های یک گره را تغییر دهیم (با تبدیل روگذر به زیرگذر و برعکس) به «تصویر آینه‌ای» گره اولیه می‌رسیم. اگر این دو گره با یکدیگر برابر باشند آنگاه گره را «آینه‌ای» می‌نامیم. به عنوان مثال گره هشت لاتین یک گره آینه‌ای است.

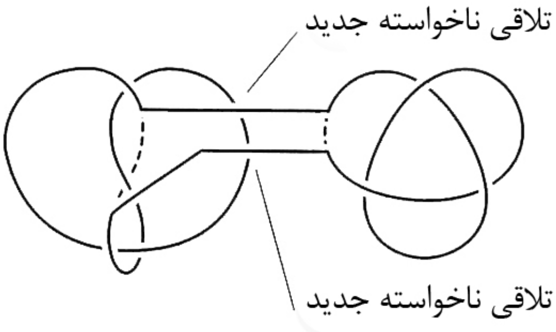
تعریف ۸.۱.۱. (ترکیب گره‌ها)

اگر دو نمایش از گره داشته باشیم، می‌توانیم با برداشتن یک کمان کوچک از هرکدام و متصل کردن چهار نقطه انتهایی به دست آمده بوسیله دو کمان دیگر، یک گره جدید بدست آوریم ، شکل ۷.۱ . گره جدید را «ترکیب»ی از دو گره اولیه می‌نامیم. اگر این دو گره را با K و J نشان دهیم، ترکیب آنها با $J\sharp K$ نشان داده خواهد شد.



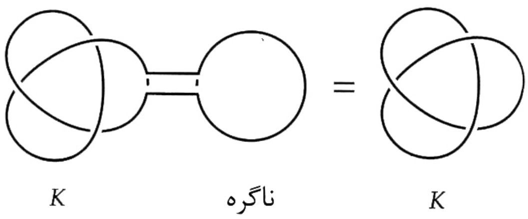
شکل ۷.۱: ترکیب $J\sharp K$ از دو گره J و K .

فرض را بر این می‌گیریم که دو گره اشتراک نداشته باشند و دو کمان انتخاب شده برای حذف، از قسمت‌های خارجی هر گره هستند و با هیچ تلاقیی تداخل ندارند. دو کمان جدید را بگونه ای انتخاب می‌کنیم که نه خودشان و نه هیچ‌کدام از دو گره اولیه را قطع نکنند، شکل ۸.۱ .



شکل ۸.۱: این ترکیبی از J و K نیست.

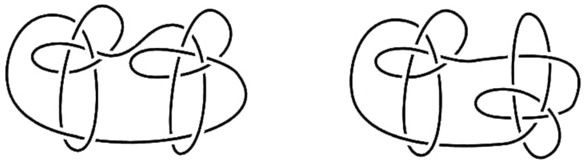
یک گره را «مرکب» می‌نامیم هرگاه بتوان آن را بصورت ترکیبی از دو گره غیر بدیهی بیان کرد. این مسئله همانند اعداد صحیح مثبت است، یک عدد صحیح مثبت را مرکب گوییم هرگاه از دو عددصحیح مثبت مخالف ۱ ساخته شده باشد. گره های سازندهٔ گره مرکب را گره های «سازنده» می‌نامیم. توجه داشته باشید که اگر گره K را با ناگره ترکیب کنیم ، نتیجه باز هم K است، همان طور که اگر یک عدد صحیح را در ۱ ضرب کنیم، جواب همان عددصحیح خواهد بود شکل ۹.۱.



شکل ۹.۱: در عمل ترکیب گره‌ها، ناگره به صورت عضو همانی عمل می‌کند.

اگر گره‌ای ترکیب هیچ دو گره نابدیهی نباشد، آنرا «گره اول» می‌نامیم. گره‌های سه‌برگی و هشت لاتین هر دو اول هستند، البته این مطلب به هیچ وجه بدیهی نیست. در اکثر موارد بیشتر از یک راه برای ترکیب دو گره وجود دارد چون در مورد کمانی که از قسمت خارجی هر گره برداشته می‌شود حق انتخاب داریم. آیا این انتخاب، نتیجه را تغییر می‌دهد؟ جواب در کمال تعجب مثبت است. معمولاً

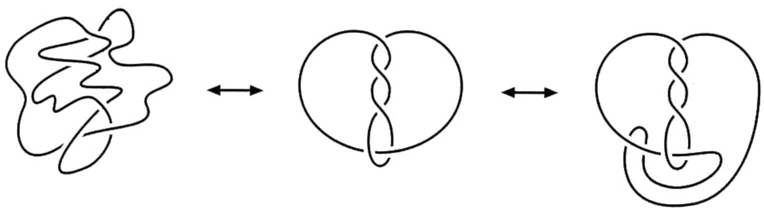
امکانپذیر است که با ترکیب دو گره ثابت J و K ، دو گره مرکب مختلف بسازیم، شکل ۱۰.۱ .



شکل ۱۰.۱: این دو گره مرکب دارای عوامل سازنده یکسانند ولی با هم متفاوتند.

۲.۱ ایزوتوپی‌های مسطح و فضایی

گره‌ها از منظر توپولوژی مورد بررسی قرار می‌گیرند؛ یعنی بین گره بسته اولیه و تغییر شکل‌های آن در فضا تفاوتی قائل نخواهیم بود. همه این منحنی‌های تغییر شکل یافته، همان گره اولیه در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۱۱.۱: تغییر شکل دادن یک گره آنرا تغییر نمی‌دهد.

از آنجا که هر گره یک نشاندن دایره S^1 در فضای اقلیدسی R^3 یا S^3 است، می‌توان آن را یک نگاشت از دو فضای هاوسدورف در نظر گرفت، مانند $f : X \longrightarrow Y$ که یک نشاندن نامیده می‌شود اگر $f : X \longrightarrow f(X)$ یک هومئومورفیسم باشد. به بیان دقیق‌تر می‌توان ایزوتوپی را این‌گونه تعریف کرد:

تعریف ۱.۲.۱. (ایزوتوپی)

دو نشاندن $f_0, f_1 : X \longrightarrow Y$ ایزوتوپ هستند اگر نشاندن

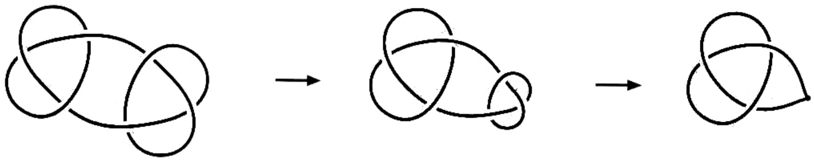
$$F : X \times I \longrightarrow Y \times I$$

موجود باشد به طوری که

$$\forall t \in I \text{ ، } \forall x \in X \text{ ، } F(x,t) = (f(x,t),t)$$

$$f(x,\circ) = f_\circ(x) \text{ ، } f(x,\text{۱}) = f_\text{۱}(x)$$

نگاشت F را یک «ایزوتوپی حافظ تراز» بین $f_\circ$ و $f_\text{۱}$ می‌نامیم. در این ایزوتوپی هر بخش از یک گره را می‌توان به طور پیوسته در یک نقطه منقبض کرد که این مسئله با مفاهیم اساسی نظریهٔ گره هماهنگ نیست؛ در نظریهٔ گره مجاز به کوچک کردن یک قسمت از گره و تبدیل آن به یک نقطه نیستیم، شکل ۱۲.۱ . به این منظور نوع دیگری از ایزوتوپی را بیان می‌کنیم.



شکل ۱۲.۱: مجاز به کوچک کردن یک قسمت از گره و تبدیل آن به یک نقطه نیستیم.

تعریف ۲.۲.۱. (ایزوتوپی فضایی)

دو نشاندن $f_\circ, f_\text{۱} : X \longrightarrow Y$ را «ایزوتوپ فضایی» می‌نامیم اگر یک ایزوتوپی حافظ تراز مانند

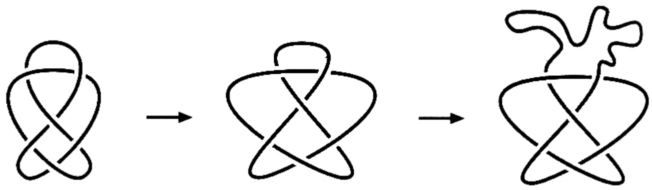
$$F : X \times I \longrightarrow Y \times I, \qquad H(y,t) = (h_t(y),t)$$

وجود داشته باشد که $f_\text{۱} = h_\text{۱}$ و $h_\circ = id_Y$. نگاشت H را یک ایزوتوپی فضایی گوییم.

به عبارت ساده تر تغییر شکل دادن گره به شکلی که گره را در فضای سه بعدی بدون گذر از درون خودش حرکت دهیم، ایزوتوپی فضایی می‌نامیم. کلمه «ایزوتوپی» به تغییر شکل گره اشاره دارد. کلمه «فضایی» به این حقیقت اشاره دارد که تغییر می‌تواند در محدوده فضای سه بعدی که گره در آن قرار دارد، صورت گیرد. یک تغییر شکل از نمایش یک گره، «ایزوتوپی مسطح» نامیده می‌شود اگر در آن، نمایش مسطح چنان تغییر کند که انگار از جنس پلاستیک انعطاف‌پذیر ساخته شده است، شکل ۱۳.۱. کلمه «مسطح» در اینجا به انجام این تغییرات در صفحه مسطح نمایش اشاره دارد.

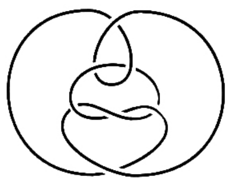
در سال ۱۹۲۶ ریاضیدان آلمانی « کرت ریدمیستر»[۵] (۱۹۷۱-۱۸۹۳) ثابت کرد که اگر دو نمایش

[5] Kurt Reidemeister



شکل ۱۳.۱: ایزوتوپی های مسطح.

متفاوت از یک گره داشته باشیم، می‌توانیم با انجام یک سری ایزوتوپی های فضایی و مسطح از یک نمایش به دیگری برسیم. شکل ۱۴.۱ نمایشی از ناگره است؛ یعنی دنباله‌ای از ایزوتوپی‌های فضایی و مسطح وجود دارد که این نمایش را به ناگره می‌رساند.

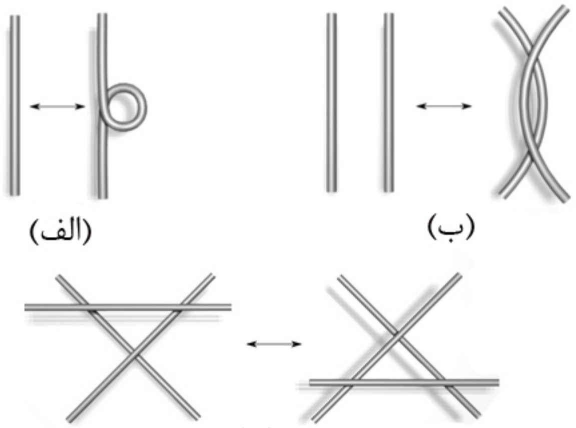


شکل ۱۴.۱: یک ناگره غیر معمول.

۳.۱ حرکات ریدمیستر

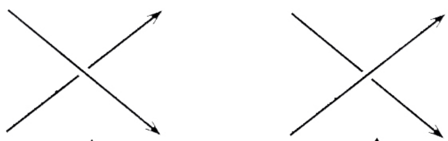
یک «حرکت ریدمیستر» یکی از سه راهی است که می‌توان یک نمایش از یک گره را بنحوی تغییر داد که ارتباط بین تلاقی‌ها دچار تغییر شود اما گره از نظر ذاتی تغییر نکند. «اولین حرکت ریدمیستر» به ما اجازه می‌دهد که یک پیچ را به گره وارد یا از آن خارج کنیم، شکل ۱۵.۱الف. فرض می‌کنیم که بجز تغییرات نشان داده شده، تغییر دیگری در نمایش ایجاد نشود. «دومین حرکت ریدمیستر» به ما اجازه می‌دهد که دو تلاقی اضافه یا کم کنیم، شکل ۱۵.۱ب. «سومین حرکت ریدمیستر» به ما اجازه می‌دهد که یک رشته را از یک طرف یک تلاقی به طرف دیگر آن انتقال دهیم، شکل ۱۵.۱ج. هر کدام از حرکات ریدمیستر یک ایزوتوپی سه بعدی است.

شایان ذکر است که انواع دیگری از حرکات ریدمیستر نیز تعریف شده‌اند، اما آن‌ها حالت‌هایی از تکرار یا ترکیب دو یا چند حرکت نوع اول، دوم و سوم هستند.



شکل ۱۵.۱: یک حرکت ریدمیستر (الف) نوع اول (ب) نوع دوم (ج) نوع سوم.

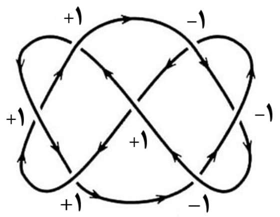
تعریف ۱.۳.۱. (جهت دهی به گره و مقداردهی به تلاقی‌ها)
روی هر گره می‌توانیم یک جهت در نظر بگیریم. در هر گره جهت‌دار در هر تلاقی بین دو رشته یکی از حالات شکل ۱۶.۱ برقرار خواهد بود. به هر تلاقی از نوع اول عدد ۱+ و به هر تلاقی از نوع دوم عدد ۱- را نسبت می‌دهیم. گاهی اوقات از روی شکل تشخیص اینکه تلاقی از نوع اول است یا دوم، کار آسانی نیست. توجه داشته باشید که اگر تلاقی از نوع اول باشد دوران در جهت عقربه های ساعت رشته زیرگذر آن را با رشته روگذر هم‌سو می‌کند. به طور مشابه اگر تلاقی از نوع دوم باشد دوران در خلاف جهت عقربه‌های ساعت رشته زیرگذر، آن را با رشته روگذر همراستا می‌کند و جهت‌های آنها با هم هماهنگ می‌شود.



شکل ۱۶.۱: تلاقی ۱+ و تلاقی ۱− .

تعریف ۲.۳.۱. (پیچ‌خوردگی)

در هر تلاقی از نمایش یکی از اعداد ۱+ یا ۱- وجود دارد. به مجموع این ۱+ ها و ۱- ها «پیچ‌خوردگی» نمایش گره جهت‌دار L گوییم و آن را با $w(L)$ نشان می‌دهیم. برای مثال می‌توانیم پیچ‌خوردگی نمایش گره جهت‌دار شکل ۱۷.۱ را محاسبه کنیم.



شکل ۱۷.۱: $+۴ - ۳ = ۱$.

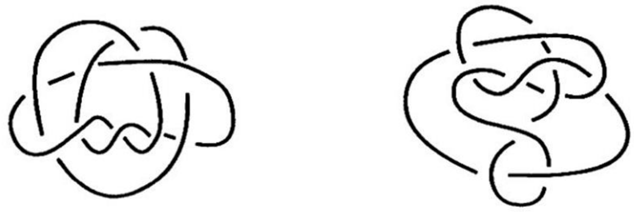
تعریف ۳.۳.۱. (ناوردای گره)

یک «ناوردای گره» نگاشتی مانند ϕ از مجموعهٔ همهٔ گره‌ها است که به گره‌های برابر که احتمالاً دارای نمایش‌های مختلف هستند یک مقدار را نسبت می‌دهد. بنابراین اگر $\phi(K_۱) \neq \phi(K_۲)$ آنگاه نتیجه می‌گیریم که دو گره $K_۱$ و $K_۲$ برابر نیستند.

نکته ۴.۳.۱. توجه داشته باشید که در تعریف پیچ‌خوردگی از جهت گره یا زنجیر استفاده شده است. همچنین بدیهی است که حرکات ریدمیستر نوع دوم و سوم ، پیچ‌خوردگی یک نمایش زنجیر را تغییر نمی‌دهند. اما یک حرکت ریدمیستر نوع اول همیشه پیچ‌خوردگی را به اندازهٔ ±۱ تغییر می‌دهد. معروف است که جدول‌های گره مربوط به قرن نوزدهم پیچ‌خوردگی یک نمایش را، حداقل وقتی حرکت ریدمیستر نوع اول به کاهش تعداد تلاقی‌ها منجر نمی‌شد، به عنوان یک ناوردای گره به حساب می‌آوردند. این باور باعث ایجاد خطای معروف شمول گره $۱۰_{۱۶۱}$ و تصویر آینه‌ایش یعنی $۱۰_{۱۶۲}$ در جدول‌های جدید شد [۶] (خطایی که توسط «کی. پرکو» [۷] در دههٔ ۱۹۷۰ کشف شد). شکل ۱۸.۱ را ببینید. پیچ‌خوردگی این دو نمایش به ترتیب ۸ و ۱۰ است؛ درحالی‌که این دو نمایش در واقع یک گره هستند.

[۶] این دو گره ۱۶۱امین و ۱۶۲امین گره‌های ۱۰-تلاقی در جداول قراردادی گره‌ها هستند.

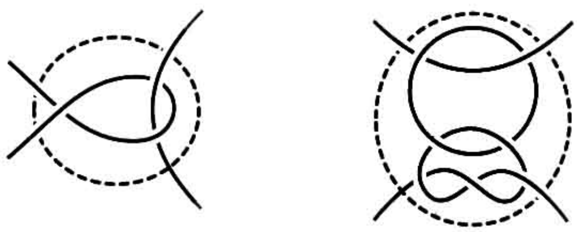
[۷] K. Perko



شکل ۱۸.۱: دوتایی پرکو.

تعریف ۵.۳.۱. پیچه

یک «پیچه» جسمی شبیه به یک زنجیر می‌باشد اما بر خلاف زنجیر دارای رشته‌هایی با انتهای باز است. انتهای باز این رشته‌ها به محدوده ای که آن را «جعبهٔ پیچه» می‌نامیم و درون آن هیچ رشته‌ای دارای انتهای باز نیست، وارد می‌شوند. رشته‌های یک پیچه می‌توانند در یکدیگر قلاب شده و با یکدیگر گره بسازند. البته توجه داشته باشید که اگر با شروع از یک انتهای باز به همراه یک رشته وارد پیچه شویم، به تدریج از آن خارج شده و به انتهای دیگر رشته خواهیم رسید. بنابراین یک پیچه الزاماً دارای تعداد زوجی انتهای باز است. در اغلب مواقع، از جمله اینجا، پیچه‌های با چهار انتهای باز مد نظر قرار می‌گیرند، شکل ۱۹.۱ .



شکل ۱۹.۱: پیچه‌ها.

تعریف ۶.۳.۱. انواع زنجیرها

همان گونه که از تعریف ۱.۱.۱ برمی‌آید، یک «زنجیر» مجموعه ای از حلقه های گره خورده است که همه در هم تاب خورده اند. دو زنجیر یکی در نظر گرفته می‌شوند اگر بتوانیم با تغییر شکل دادن یک زنجیر ، بدون اینکه هیچ حلقه‌ای خودش یا حلقه های دیگر را قطع کند، به زنجیر دیگر برسیم. شکل ۲۰.۱ دو نمایش از یکی از ساده ترین زنجیرها بنام « وایت‌هد» را نشان می‌دهد.