دانشگاه پیام نور
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد
رشته آمار ریاضی
گروه آمار

عنوان پایان نامه:

استنباط بیزی برای برآورد فاصله‌ای پارامترهای توزیع نرمال

علیرضا وفاداری مهریزی

استاد راهنما:
دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور:
دکتر شمس‌الملوک خوشدل

تیر ۱۳۹۱

دانشگاه پیام نور

دانشکده علوم پایه

مرکز شیراز

پایان نامه

برای دریافت مدرک کارشناسی ارشد

رشته آمار ریاضی

گروه آمار

عنوان پایان نامه:

استنباط بیزی برای برآورد فاصله‌ای پارامترهای توزیع نرمال

علیرضا وفاداری مهریزی

استاد راهنما:

دکتر نرگس عباسی

استاد مشاور:

دکتر شمس‌الملوک خوشدل

تیر ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

باسمه تعالی
دانشگاه پیام نور استان فارس

تاریخ : ۹۱/۰۴/۳۱
شماره : ۰۵/۱۶۲۷۶
پیوست :

صورتجلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان‌نامه دوره کارشناسی ارشد **آقای علیرضا وفاداری مهریزی** دانشجوی رشته **آمار ریاضی** به شماره دانشجویی **۸۹۰۰۷۴۲۳۸** با عنوان:

"استنباط بیزی برای برآورد فاصله‌ی پارامترهای توزیع نرمال"

با حضور هیأت داوران در روز **شنبه** مورخ **۱۳۹۱/۴/۳۱** ساعت **۱۰** در محل ساختمان **غدیر دانشگاه پیام نور شیراز** برگزار شد و هیأت داوران پس از بررسی، پایان‌نامه مذکور را شایسته نمره به عدد ۱۹.۲۵ به حروف نوزده و بیست و پنج صدم با درجه عالی تشخیص داد.

ردیف	نام و نام خانوادگی	هیات داوران	مرتبه دانشگاهی	دانشگاه	امضاء
۱	دکتر نرگس عباسی	راهنما	دانشیار	پیام نور شیراز	
۲	دکتر شمس الملوک خوشدل	مشاور	استادیار	پیام نور شیراز	
۳	دکتر محبوبه حسین‌یزدی	داور	استادیار	پیام نور شیراز	
۴	امیر اکبری	نماینده تحصیلات تکمیلی	مربی	پیام نور شیراز	

رئیس اداره تحصیلات تکمیلی

دانشگاه پیام نور شیراز
معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی

شیراز- شهرک گلستان، بلوار دهخدا
قبل از نمایشگاه بین المللی
تلفن : ۳-۶۲۲۲۲۴۰-۰۷۱۱
دورنگار : ۶۲۲۲۲۴۹-۰۷۱۱
صندوق پستی :۱۳۶۸- ۷۱۹۵۵
www.spnu.ac.ir
Email : admin@spnu.ac.ir

اینجانب **علیرضا وفاداری مهریزی** دانشجوی ورودی سال **۹۰-۸۹** مقطع کارشناسی ارشد رشته **آمار ریاضی** گواهی می‌نمایم چنانچه در پایان نامه خود از فکر، ایده و نوشته دیگری بهره گرفته‌ام، با نقل قول مستقیم یا غیر مستقیم، منبع و مأخذ آن را نیز در جای مناسب ذکر کرده‌ام . بدیهی است مسئولیت تمامی مطالبی که نقل قول دیگران نباشد بر عهده خویش می‌دانم و جوابگوی آن خواهم بود.

دانشجو تائید می‌نماید که مطالب مندرج در این پایان نامه نتیجه تحقیقات خودش می‌باشد و در صورت استفاده از نتایج دیگران مرجع آن را ذکر نموده است.

نام و نام خانوادگی دانشجو علیرضا وفاداری مهریزی

تاریخ و امضاء ۹۱/۶/۶

اینجانب **علیرضا وفاداری مهریزی** دانشجوی ورودی سال **۹۰-۸۹** مقطع کارشناسی ارشد رشته **آمار ریاضی** گواهی می‌نمایم چنانچه بر اساس مطالب پایان نامه خود اقدام به انتشار مقاله، کتاب و ... نمایم، ضمن مطلع نمودن استاد راهنما، با نظر ایشان نسبت به نشر مقاله، کتاب و ... و به صورت مشترک و با ذکر نام استاد راهنما مبادرت نمایم.

نام و نام خانوادگی دانشجو علیرضا وفاداری مهریزی

تاریخ و امضاء ۹۱/۶/۶

کلیه حقوق مادی مترتب از نتایج مطالعات، آزمایشات و نوآوری ناشی از تحقیق موضوع این پایان نامه متعلق به دانشگاه پیام نور می‌باشد.

تیر ۱۳۹۱

تقدیم به

پدر دلسوزم

که همواره حامی و پشتیبان من است

و

مادر مهربانم

که وجودش مایه ی آرامش من است.

تشکر و قدردانی

خدا را سپاس می گویم که به من توفیق داد این تحقیق علمی را به پایان برسانم.

سپاس گزارم از استاد راهنمای ارجمندم خانم دکتر نرگس عباسی که با دقت و حوصله، راهنمایی های خردمندانه ی را در جهت تدوین این پایان نامه ارائه نمودند و از استاد مشاور محترم خانم دکتر شمس الملوک خوشدل که نظرات ارزشمندی در تکوین این پایان نامه ابراز نمودند. سپاس گزارم از خانم دکتر محبوبه حسینی یزدی که قبول زحمت فرموده و داوری این پایان نامه را پذیرفته اند.

این پایان نامه بهانه ای شد برای سپاس از زحمات بی دریغ پدر و مادرم که در همیاری من از هیچ کمکی فروگذاری نکردند. سپاس گزارم از خانواده ام که همواره حضورشان مایه دلگرمی و یادشان مایه شادمانی من است.

همچنین از دوستانی که در مراحل مختلف آماده سازی و نگارش پایان نامه، از همکاری شان بهره مند شدم سپاس گزاری می کنم، باشد که این پایان نامه راهگشای دانشجویان علاقه مند گردد.

چکیده

در این پایان‌نامه به بررسی فاصله‌های اطمینان که از اطلاع پیشین غیرقطعی استفاده می‌کنند، می‌پردازیم. فاصله‌های اطمینان برای میانگین نرمال و فواصل اطمینان در مسئله بهرنس- فیشر با استفاده از اطلاع پیشین ارائه می‌شود و مقایسه این فواصل با فاصله اطمینان استاندارد انجام می‌گیرد. این فواصل برای میانگین نرمال در دو حالت واریانس مجهول و معلوم بحث می‌شود. همچنین به بررسی آزمایش تقاطعی دو دوره‌ای با دو تیمار می‌پردازیم. یک فاصله اطمینان فراوانی‌گرای بزرگ نمونه‌ای برای اختلاف تیماری که از اطلاع پیشین غیرقطعی عدم وجود اثر مانده‌ای تفاضلی بهره می‌گیرد، پیدا می‌کنیم. هدف استفاده از اطلاع پیشین غیرقطعی در استباط فراوانی‌گرای مورد نظر است، در حالی که یک اطمینان برای حالتی که اطلاع پیشین نادرست است، فراهم کنیم. رویکرد ما در این پایان‌نامه به دست آوردن فاصله اطمینان‌هایی است که دارای حداقل احتمال پوشش هستند و همچنین طول مورد انتظار نسبی آنها دارای ویژگی‌های خوبی است.

کلمات کلیدی:

فاصله اطمینان فراوانی‌گرا، اطلاع پیشین، اثر مانده‌ای تفاضلی، طول مورد انتظار نسبی، مسئله بهرنس- فیشر، احتمال پوشش

فهرست مطالب

پیشگفتار

در مورد استنباط بیزی که اطلاع پیشین را در فواصل اطمینان شرکت می‌دهد بحث‌های زیادی صورت گرفته است. یک تحلیل بیزی که اطلاع پیشین در مورد اثر مانده‌ای تفاضلی را شرکت می‌دهد، توسط (گریو[1]، ۱۹۸۵) فراهم شده است. در هر حال، معمولاً فاصله اطمینان فراوانی گرای معتبری برای اختلاف مربوط به اثر دو تیمار، که از اطلاع پیشین غیرقطعی یعنی عدم وجود اثر مانده‌ای تفاضلی استفاده می‌کند، وجود ندارد. همانند (هاگس[2] و لهمن[3]، ۱۹۵۲)، (بیکل[4]، ۱۹۸۳و۱۹۸٤)، (کابیلا[5]،۱۹۹۸)، (کابیلا و گیری[6]، ۲۰۰۷)، (فارچیونه[7] و کابیلا، ۲۰۰۸) هدف استفاده از اطلاع پیشین غیرقطعی در استباط فراوانی‌گرای مورد نظر است، در حالی که یک اطمینان برای حالتی که اطلاع پیشین نادرست است، فراهم می‌کنیم.

مسأله‌ی بهرنس[8]- فیشر[9] در عمل مهم است. فاصله اطمینان "درجه‌ی آزادی تقریبی[10]" ولش[11] (که t-حل تقریبی[12] نیز نامیده می‌شود؛ (ولش، ۲۹۵:۱۹٤۹)) در بسیاری از کتاب‌های درسی آمار به عنوان راه حلی مناسب و عملی برای مواقعی که نمی‌توان تضمین کرد $\rho = 1$ است، ارائه شده است. این مساله همچنین در نظریه‌ی آمار بسیار مهم است. این موضوع یک مثال مهم در مباحث بنیادین استنباط آماری فراهم می‌کند.((نیمن،[13]۱۹٤۱)، (فیشر،۱۹۵٦)، (کاکس[14]وهینکلی[15] ۱۹۷٤ :۱۵۵)). همچنین به راحتی نمونه‌هایی از فاصله اطمینان‌های ساخته شده‌ی تصادفی شده‌ی دقیق فراهم می‌کند.

1Grieve
2Hodges
3Lehmann
4Bickel
5Kabaila
6Giri
7Farchione
8Behrens
9Fisher
10 Approximate degrees of freedom
11Welch
12 Approximate t-solution
13Neyman
14Cox
15Hinkley

((بارتلت[۱]،۱۹۳٦:٥٦٤) ، (ولش،۱۹۳۸: ۳٦۰)، (نیمن، ۱۳۸:۱۹٤۱) و (شفه[۲] ۱۹٤۳)). در هر حال، استفاده از چنین فاصله‌هایی در عمل توصیه نشده است (شفه،۱۵۰۳:۱۹۷۰). کابیلا نصف پهنای فاصله اطمینان درجه‌ی آزادی تقریبی ولش را در یک عدد مثبت ثابت ضرب کرد (که به یک همگرا گردد). فاصله‌ی به دست آمده دارای حداقل احتمال پوشش است. وی این فاصله را، فاصله اطمینان درجه‌ی آزادی تقریبی ولش تعدیل یافته نامید. (پرات[۳]، ۱۹٦۱ و ۱۹٦۳) فاصله‌های اطمینانی برای θ ارائه کرد که دارای حداقل احتمال پوشش هستند. این فاصله‌های اطمینان دارای دو مشکل اساسی هستند. در این پایان نامه با ذکر این مشکلات فاصله‌های اطمینانی را توصیف می‌کنیم که این مشکلات را ندارند و دارای حداقل احتمال پوشش هستند.

این پایان‌نامه به شرح زیر فصل‌بندی شده است. در فصل اول به بیان مفاهیم اولیه و تعاریف مورد نیاز پرداخته شده است. فصل دوم به بیان فاصله اطمینان‌های جدید که از اطلاع پیشین استفاده می‌کنند اختصاص یافته است. این فاصله‌ها در دو حالت واریانس معلوم و مجهول بررسی شده و با فاصله اطمینان معمولی برای میانگین نرمال مقایسه شده است. در فصل سوم مسأله‌ی بهرنس- فیشر وقتی که یک اطلاع پیشین غیرقطعی داریم، مورد بحث قرار گرفته است و به بررسی این موضوع می‌پردازد که آیا با وجود اطلاع پیشین، استفاده از فاصله اطمینان ولچ تعدیل یافته همچنان منطقی هست یا نه. در فصل چهارم یک فاصله اطمینان فراوانی گرای بزرگ نمونه‌ای برای اختلاف تیماری که از اطلاع پیشین غیرقطعی عدم وجود اثر مانده‌ای تفاضلی بهره می‌گیرد، را مورد بررسی قرار داده و به بیان این موضوع پرداخته‌ایم که تحت چه شرایطی برای فاصله اطمینان جدید با استفاده از داده‌های کاملاً تصادفی طرح تقاطعی نسبت به طرح کاملا تصادفی برتری دارد.

1Bartlett
2Scheffe
3Pratt

فصل اول

مفاهیم و تعاریف اولیه

۱–۱ مقدمه

در این فصل به بیان بعضی مفاهیم اولیه‌ی آماری شامل تابع ریسک، برآوردگر سازگار، کارایی و همچنین تعاریف و مفاهیم مسأله‌ی بهرنس- فیشر، نظریه‌ی تصمیم توافقی، طرح‌های تقاطعی، طرح‌های متعادل برای اثرهای مانده‌ای می‌پردازیم. در بحث نظریه تصمیم توافقی از بعضی مفاهیم نظریه تصمیم استفاده می‌شود. همچنین به بعضی از مفاهیم طرح آزمایشها که در فصل ۴ مورد نیاز است، اشاره شده است.

۱–۲ احتمال پوشش

اگر X یک متغیر تصادفی و θ پارامتر توزیع آن باشد، برای یک برآوردگر فاصله‌ای $[\mathrm{L(X)}, \mathrm{U(X)}]$ پارامتر θ، احتمال پوشش $[L(X), U(X)]$ برابر است با احتمال اینکه فاصله‌ی تصادفی $[L(X), U(X)]$ پارامتر صحیح θ را بپوشاند. با استفاده از نمادها به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$P_\theta(\theta \in [\mathrm{L(X)}, \mathrm{U(X)}]) = P(\theta \in [\mathrm{L(X)}, \mathrm{U(X)}] \;|\theta)$$

۱–۳ فاصله اطمینان فراوانی گرا

یک فاصله اطمینان $1-\alpha$ فراوانی‌گرا، فاصله اطمینانی است که اینفیمم احتمال پوشش آن، $1-\alpha$ باشد. یعنی: $\sup_\theta\left(1 - P_\theta(\theta \in [\mathrm{L(X)}, \mathrm{U(X)}])\right) = \alpha$

۱–۴ تابع زیان و تابع ریسک

در نظریه‌ی تصمیم، ابزاری که برای مقایسه برآوردگرها به کار گرفته می‌شود، تابع ریسک است.

تابع زیان:

فرض کنید $\delta(X)$ برآوردگر پارامتر θ بر پایه نمونه‌ی تصادفی $X_1, \ldots, X_n$ باشد. یک برآوردگر خوب برآوردگری است که میزان خطا در آن، یعنی $\theta - \delta(X)$، با احتمال یک نزدیک به صفر باشد.

اگر D نمایانگر کلاس تمام برآوردگرها باشد، آنگاه برای هر $\delta(\boldsymbol{X})\in D$ فرض کنید که $\delta(\boldsymbol{x})\in\Theta$ باشد، یعنی مقدار مشاهده شده‌ی $\delta(\boldsymbol{X})$ بر اساس یافته‌ی $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}$ متعلق به Θ است. فرض خواهیم کرد برای هر $\theta\in\Theta$ و هر برآورد ممکن $\delta(\boldsymbol{x})$ که متعلق به Θ است، مقدار عددی $L(\theta,\delta(\boldsymbol{x}))$- ای وجود دارد که میزان زیان آماردان را در برآورد پارامتر θ بر پایه‌ی $\delta(\boldsymbol{x})$ اندازه می‌گیرد.

در حقیقت تابع زیان که آن را با L نشان دادیم، تابعی دو متغیره از $\Theta\times D$ به زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی غیرمنفی است. بنابراین، تابع $L(\theta,\delta(\boldsymbol{X}))$ خود یک متغیر تصادفی است.

یکی از توابع زیان معروف در آمار تابع زیان مربع خطا است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L(\theta,\delta)=(\delta-\theta)^2$$

تابع ریسک: در آمار، یک روش ساده در ارزیابی متغیرهای تصادفی، بررسی متوسط مقدار آنهاست. با توجه به اینکه تابع زیان یک متغیر تصادفی است، ایده‌آل این است که برای هر تابع زیان داده شده‌ی L علاقه‌مند به پیدا کردن برآوردگر $\delta(\boldsymbol{X})$ – ای باشیم که متوسط L را مینیمم می‌کند. متوسط مقدار L را تابع ریسک برآوردگر δ در برآورد پارامتر θ می‌نامیم و آن را با $R(\theta,\delta)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$R(\theta,\delta)=E_\theta\left[L\big(\theta,\delta(\boldsymbol{X})\big)\right]$$

در صورتی‌که تابع زیان، **مربع خطا** باشد، تابع ریسک را **میانگین مربع خطا** می‌نامیم.

۱–۵ برآوردگر بیز

قبل از تعریف برآوردگر بیز به چند مفهوم بیزی اشاره می کنیم.

اصل بیز، برآوردگری از θ را بررسی می‌کند که برای یک تابع وزنی نظیر $G(\theta)$، مقدار $\int_\Theta R(\theta,\delta)dG(\theta)$ حداقل شود. یعنی بر اساس تابع وزنی G و تابع زیان L، کلیه‌ی مقادیر $\int_\Theta R(\theta,\delta)dG(\theta)$ را برای هر $\delta\in D$، از کوچک به بزرگ مرتب و برآوردگر δ – ای را انتخاب می‌کند که مقدار این انتگرال از همه کمتر باشد که به انتخاب برآوردگر بیز $\delta_B(\boldsymbol{X})$ می‌انجامد، یعنی برای هر برآوردگر $\delta\in D$ ،

$$\int_{\Theta} R(\theta, \delta_B) dG(\theta) \leq \int_{\Theta} R(\theta, \delta) dG(\theta)$$

توزیع پیشین: با توجه به ماهیت اصل بیز، در مسائل استنباط آماری به روش بیز بر اساس مشاهداتی که از خانواده‌ی توزیع‌ها اختیار می‌شود، پارامتر θ دارای یک مقدار نامعلوم است. به عبارت دیگر، در حقیقت θ به عنوان یک مقدار متغیر تصادفی W در نظر گرفته می‌شود که مقادیر ممکن آن فضای پارامتر Θ است و دارای توزیع $G(\theta)$ است و از آن با عنوان توزیع پیشین یاد می‌کنیم. در واقع، توزیع پیشین تبلور کاربر آمار از خلاصه‌ی اطلاعات و دانسته‌های او در این‌باره است که احتمال قرار داشتن θ در چه بخش‌هایی از Θ بیش از همه است.

برآوردگر بیز

فرض کنید $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ یک نمونه‌ی تصادفی با تابع چگالی $f_\theta(\boldsymbol{x})$ باشد. اگر توزیع پیشین انتخابی $G(\theta)$ با چگالی $g(\theta)$ و تابع زیان $L(\theta, \delta)$ باشد، آنگاه تابع ریسک برآوردگر δ در برآورد پارامتر $\gamma(\theta)$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} R(\theta, \delta) &= E_\theta\big[L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{X})\big)\big] \\ &= \int_x L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{X})\big) f_\theta(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

و تابع مخاطره‌ی بیزی برآوردگر δ در برآورد $\gamma(\theta)$ نسبت به توزیع پیشین G و تابع زیان L به صورت زیر است

$$\begin{aligned} r(G, \delta) &= E[R(\theta, \delta)] \\ &= \int_{\Theta} R(\theta, \delta) dG(\theta) \\ &= \int_{\Theta} R(\theta, \delta) g(\theta) d\nu(\theta) \end{aligned}$$

بنابراین به سادگی معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} r(G, \delta) &= \int_{\Theta} \int_X L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{X})\big) g(\theta|\boldsymbol{x}) f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) d\nu(\theta) \\ &= \int_{\Theta} \{\int_X L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{X})\big) g(\theta|\boldsymbol{x}) d\nu(\theta)\} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

انتگرال داخلی در رابطه‌ی اخیر، یعنی

$$\int_X L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{X})\big) g(\theta|\boldsymbol{x}) d\nu(\theta)$$

ریسک پسین نامیده می‌شود.

تعریف برآوردگر بیز: برآوردگر بیز پارامتر $\gamma(\theta)$ نسبت به چگالی پیشین g و تابع زیان L، که آن را برای سهولت با δ_g نمایش می‌دهیم، آن برآوردگر تعریف می‌شود که دارای مینیمم تابع ریسک بیزی باشد، یعنی

$$r\big(g, \delta_g\big) = \min_{\delta \in D} r(g, \delta)$$

توجه داشته باشید که تعریف فوق روش پیدا کردن برآوردگر بیز $\gamma(\theta)$ را ارائه نمی‌کند. برای پیدا کردن برآوردگر بیز پارامتر $\gamma(\theta)$، با توجه به تعریف فوق، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم.

با توجه به اینکه به دنبال برآوردگری نظیر $\delta_g(\boldsymbol{X})$ هستیم که $r(g, \delta)$ را به‌عنوان تابعی از برآوردگرهای ممکن، یعنی به ازای هر $\delta \in D$، مینیمم کند و از طرفی

$$\begin{aligned} r(g, \delta) &= \int_\Theta \{\int_X L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{x})\big) f_{\boldsymbol{\theta}}(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x})\} g(\theta) d\nu(\theta) \\ &= \int_\Theta \{\int_X L\big(\theta, \delta(\boldsymbol{x})\big) g(\theta|\boldsymbol{x}) d\nu(\theta)\} f_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}) d\mu(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

و چون انتگرال دوگانه‌ی اخیر دارای انتگرالده غیرمنفی است، انتگرال دوگانه را می‌توان مینیمم کرد، اگر بتوانیم عبارت داخل آکولاد، یعنی ریسک پسین را برای هر $\boldsymbol{x}$ داده شده‌ای مینیمم کنیم، که آن را با $\delta_g(\boldsymbol{x})$ نمایش می‌دهیم.

۱–۶ کارایی

فرض کنید U و V دو برآوردگر برای θ باشند. هرگاه تابع زیان را مجموع مربعات خطا انتخاب کنیم، کاراییV را نسبت به U به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$0 \leq \frac{\underset{\theta}{\mathrm{MSE}}(U)}{\underset{\theta}{\mathrm{MSE}}(V)}$$

که در آن $\mathrm{MSE}_\theta(U) = var(U) +$ اریبی

در صورتی که U و V هر دو نااریب باشند به جای MSE، واریانس به کار می‌بریم.

۱–۷ برآوردگر سازگار

برآوردگر U_n را که بر اساس یک نمونه تصادفی nتایی است، یک برآوردگر سازگار برای پارامتر θ گوییم، هرگاه داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} P(|U_n - \theta| > c) = 0 \qquad c > 0 \text{ هر}$$

یک شرط کافی برای سازگاری: اگر داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} \underset{\theta}{\mathrm{MSE}}(U_n) = 0$$

آنگاه U_n یک برآوردگر سازگار برای θ می‌باشد.

۱–۸ مسأله ی بهرنس – فیشر

مسأله‌ی بهرنس– فیشر، مسأله‌ی برآورد فاصله‌ای و آزمون فرض به اختلاف میانگین بین دو جامعه نرمال بر اساس دو نمونه مستقل، وقتی که به نظر نمی‌رسد واریانس دو جامعه برابر باشند، مربوط می‌شود. بحث‌های متفاوتی در باره مسأله‌ی بهرنس– فیشر شده است. این تفاوت‌ها فقط در راه‌حل مناسب نیست، بلکه حتی در مفاهیم اساسی این مسأله می‌باشد.

راه حل‌های ارائه شده در این زمینه از نقطه نظر استنباط بیزی یا کلاسیک می‌باشد. فیشر در سال ۱۹۳۵ به مقاله‌ای که قبلا توسط بهرنس در سال ۱۹۲۹ ارائه شده بود رجوع کرد. بهرنس و فیشر قصد داشتند توزیع احتمال $t_0 = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$ را پیدا کنند.

یک روش که خیلی از آن استفاده می‌شود روش تقریب درجه آزادی ولش است. این روش از واریانس تفاوت میانگین‌ها استفاده می‌کند.

$$\bar{d} = \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \quad و \quad S_{\bar{d}}^2 = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}$$

ولش در سال ۱۹۳۸ توزیع $S_{\bar{d}}^2$ را با توزیع پیرسن نوع III (یک توزیع خی دو مقیاسی) تقریب زد که گشتاورهای اول و دومش با $S_{\bar{d}}^2$ همسان است.

توزیع آماره‌ی t_0، دقیقاً t نیست ولی اگر از درجه‌ی آزادی زیر استفاده کنیم تحت فرض صفر برابری میانگین‌ها، $\mu_1 = \mu_2$، توزیع آماره‌ی t_0 بهرنس – فیشر، را می‌توان با توزیع t–استیودنت با ν درجه‌ی آزادی تقریب زد.

$$\nu = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)^2}{\gamma_1^2/(n_1 - 1) + \gamma_2^2/(n_2 - 1)} \qquad ,\gamma_i = \frac{\sigma_i^2}{n_i}$$

اما این ν شامل واریانس‌های جامعه، σ_i^2، است که مجهول‌اند. برآورد زیر واریانس نمونه را به جای واریانس جامعه قرار می‌دهد.

$$\hat{\nu} = \frac{(g_1 + g_2)^2}{g_1^2/(n_1 - 1) + g_2^2/(n_2 - 1)} \qquad ,g_i = \frac{s_i^2}{n_i}$$

$\hat{\nu}$ یک متغیر تصادفی است. معمولاً در مسائل استنباط با درجه‌ی آزادی تصادفی کار نمی‌شود. با این حال آماره‌ی T بهرنس– فیشر می‌تواند با یک چندک متناظر توزیع t–استیودنت با درجه‌ی آزادی برآورد شده‌ی $\hat{\nu}$ (که عموماً غیر صحیح است) مقایسه شود. هر چند این روش نیز دقیق نیست اما خیلی دور از انتظار هم نیست. به هرحال اگر واریانس‌های جامعه برابر باشند یا اگر نمونه‌ها نسبتاً کوچک باشد و بتوان واریانس‌های جامعه را تقریباً برابر فرض کرد، دقیق‌تر است که از آزمون t دو نمونه‌ای استفاده کنیم.

حال دو نمونه‌ی تصادفی مستقل از اندازه‌ی $f + 1$، که یکی دارای توزیع $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ و دیگری دارای توزیع $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ را در نظر بگیرید به طوری که $\sigma_1^2/\sigma_2^2 \in (0, \infty)$. "درجه آزادی تقریبی" ولش، فاصله اطمینان برای $\mu_1 - \mu_2$ معمولاً وقتی تضمینی برای $\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 1$ وجود ندارد را به کار می‌گیرد.

۱-۹ نظریه ی تصمیم توافقی

فرض کنید ξ نشانگر پارامتر مجهول و δ یک برآوردگر متعلق به کلاس برآوردگرهای داده شده‌ی $\mathcal{D}$ باشد. علاوه بر این، فرض کنید $R_1(\delta,\xi)$ و $R_2(\delta,\xi)$ دو تابع ریسک داده شده باشند. π_1 تابع توزیع پیشین داده شده برای ξ است. فرض کنید هدف یافتن برآوردگر $\delta \in \mathcal{D}$ است که $\int R_1(\delta,\xi)d\pi_1(\xi)$ را تحت $R_2(\delta,\xi) \leq c$ برای c معین به ازای هر ξ مینیمم می‌کند. (کمپورن[1] ،۱۹۸۸) این مسأله را، مسأله‌ی نظریه تصمیم توافقی نامید.

۱-۱۰ طرح کاملا تصادفی شده

طرح کاملا تصادفی شده طرحی است که در آن آزمایش به ترتیبی تصادفی انجام شود به نحوی که محیطی که تیمارها در آن اعمال می‌شوند تا حد ممکن همگن باشد.

۱-۱۱ طرح‌های تقاطعی و طرح‌های متعادل برای اثرهای مانده‌ای

مفاهیم طرح تقاطعی و اثر مانده‌ای در فصل ٤ مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین در اینجا اشاره‌ای کوتاه به آن می‌کنیم.

گهگاه با مسئله‌ای مواجه می‌شویم که دوره‌های زمانی، عاملی در آزمایش‌اند. به طور کلی،P تیمار درP دوره‌ی زمانی با استفاده از np واحد آزمایشی آزمون می‌شوند. مثلا یک تحلیل‌گر، اثر دو مایع جانشین آب زدایی را در ۲۰ آزمودنی مطالعه می‌کند. در اولین دوره به نصف آزمودنی‌ها (که به تصادف انتخاب می‌شوند) مایع A و به نصف دیگر مایعB را می‌دهد. در پایان این دوره، پاسخ اندازه‌گیری می‌شود و دوره‌ی زمانی بعد برای برطرف شدن هر اثر فیزیولوژیکی مایع، منظور می‌شود. بنابراین آزمایشگر، آزمودنی‌هایی دارد که مایع A را دریافت کرده‌اند و اکنون مایع B را دریافت می‌کنند و آزمودنی‌هایی دارد که مایع B را دریافت کرده‌اند و اکنون مایع A را مصرف می‌کنند. این

[1] Kempthorne