دانشگاه خوارزمی

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض (آنالیز)

عنوان

پایداری نگاشت‌ها بر فضاهای چندنرمی

تدوین

لاله امجد

استاد راهنما

دکتر طاهر قاسمی هنری

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحيم

تقدیر و تشکر

ستایش خدای را که به من اظهار کمال دوستی فرمود با آن که از من بی نیاز بود.

این مجموعه را مرهون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر قاسمی هنری می دانم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم گرچه تشکر من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و کمک های ایشان می باشد. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم.

زحمات اساتید داور، سرکار خانم دکتر باهیار داور داخلی و سرکار خانم دکتر سعدی داور خارجی را ارج نهاده و از ایشان تشکر می کنم.

همچنین از دوستان عزیز و گرانقدرم به پاس محبت های بی دریغ شان کمال تشکر و قدردانی را دارم.

تقدیم به

گران بهاترین سرمایه های زندگی ام

پدر و مادر عزیزم

چکیده

نظریه‌ی معروف فضاهای نرم‌دار $(E, \|\cdot\|)$ در آنالیز تابعی را با در نظر گرفتن دنباله‌ی $(\|\cdot\|_n : n \in \mathbb{N})$ از نرم‌ها تعدیل می‌کنیم، که در آن به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\|\cdot\|_n$ نرمی بر فضای ضربی E^n است که در شرایط خاصی صدق می‌کند. پس از معرفی فضاهای چندنرمی، خاصیت‌هایی از این فضاها را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

نرم‌های چندگانه‌ی مینیمم و ماکسیمم و نرم‌های چندگانه‌ی مشبکه‌ای، مثال‌هایی کلیدی از نرم‌های چندگانه می‌باشند. همچنین ویژگی عملگرهای کراندار چندگانه بر فضاهای چندنرمی را که همان عملگرهای پیوسته‌ی چندگانه است، بررسی می‌کنیم.

سپس قضیه‌ی دیگری برای نگاشت‌های انقباضی بر فضای متریک تعمیم یافته‌ی کامل X را بررسی می‌کنیم. این قضیه بیان می‌کند که هر جفت متوالی از دنباله‌ی تقریب‌های پی‌درپی با عنصر آغازین x_0، یا بی‌نهایت از هم دور هستند یا دنباله‌ی تقریب‌های پی‌درپی با عنصر آغازین x_0 به یک نقطه‌ی ثابت همگرا است. قضیه نگاشت انقباضی باناخ بر فضای متریک کامل و قضیه نگاشت انقباضی لوکزمبرگ بر فضای متریک تعمیم یافته حالت‌های خاصی از این قضیه است. به‌علاوه قضیه پایداری تعمیم یافته‌ی هایرس-اولام-راسیاس را، که در ارتباط با معادله‌ی جمعی کوشی برای نگاشت‌هایی از فضاهای خطی به فضاهای چندنرمی است، بیان و ثابت می‌کنیم.

رده‌بندی موضوعی ریاضی ۲۰۱۰: 39B82، 39B52، 46B99، 47A99.

واژه‌های کلیدی: نرم چندگانه، فضای چندنرمی، فضای باناخ چندگانه، دنباله چندگانه پوچ، عملگر خطی کراندار چندگانه، عملگر پیوسته چندگانه.

فهرست مطالب

فهرست مطالب

مقدمه

در سال ۱۹۴۰، اولام[۱] [23] برای اولین بار مسئله‌ی پایداری معادلات تابعی را مطرح کرد: به ازای کدام گروههای متریک G یک εـخودریختی G لزوماً به یک خودریختی نزدیک می‌شود؟ در سال بعد، هایرس[۲] [11] یک جواب قابل قبول جزئی به سؤال اولام در زمینه‌ی فضاهای باناخ داد و در سال ۱۹۷۸، تی‌اچ.ام.راسیاس[۳] [20] قضیه‌ی زیر را که شامل قضیه‌ی هایرس برای حالت $p = ۰$ است، ثابت کرد.

فرض کنیم E و F فضاهای نرم‌دار حقیقی باشندکه F کامل است، همچنین $f : E \to F$ نگاشتی باشد که برای هر $x \in E$ ثابت، نگاشت $t \mapsto f(tx)$ بر $\mathbb{R}$ پیوسته است. هرگاه $\varepsilon \geq ۰$ و $p \in [۰, ۱)$ در نامساوی زیر صدق کنند

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p) \quad (x, y \in E). \qquad (۱)$$

آن‌گاه نگاشت خطی و یکتای $T : E \to F$ وجود دارد به طوری‌که

$$\|f(x) - Tx\| \leq \varepsilon\|x\|^p/(۱ - ۲^{p-۱}) \quad (x \in E).$$

در سال ۱۹۹۰، تی‌اچ.ام.راسیاس [21] این سؤال را مطرح کرد که آیا چنین قضیه ای برای $p \geq ۱$ می‌تواند ثابت شود. در سال ۱۹۹۱، گاجا[۴] [9]، همان رویکرد [20] را دنبال کرد و جواب قابل قبولی برای این سؤال در حالت $p > ۱$ ارائه کرد، این قضیه توسط گاجا [9] و راسیاس و شمرل در[۵] [22] ثابت شد ولی آن‌ها نتوانستند قضیه‌ی مشابه را در حالت $p = ۱$ ثابت کنند. دستاورد راسیاس، که برای $p < ۰$ نیز درست است (به عنوان قرارداد برای $p < ۰$، $\|۰\|^p = \infty$ در نظر می‌گیریم)، روی پیشرفت پدیده‌ای که آن‌را پایداری هایرس-اولام-راسیاس می‌نامیم تأثیر گذاشته است.

در سال ۱۹۹۴، قضیه‌ی تعمیم یافته راسیاس، که به قضیه‌ی پایداری تعمیم یافته هایرس-اولام-راسیاس معروف است، توسط گاوروتا[۶] [10] به‌دست آمد: او کران $\varepsilon(\|x\|^p + \|y\|^p)$ در رابطه‌ی (۱) را با تابع کنترل عمومی $\varphi(x, y)$ جایگزین کرد.

---

[۱] Ulam
[۲] Hyers
[۳] Th.M.Rassias
[۴] Gajda
[۵] Semrl
[۶] Gavruta

در طول دهه‌های اخیر مسائل پایداری متعددی در رابطه با معادلات تابعی توسط ریاضی‌دانان زیادی بررسی شده است [3, 5, 12, 17, 21]. این نتایج کاربردهای زیادی در نظریه‌ی اطلاعات، فیزیک، اقتصاد و علوم رفتاری و اجتماعی دارد [1, 2]. در هر مورد قدم اصلی استفاده از قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی ۴.۲.۳ است.

حدود ۲۰ سال پیش، مقاله‌هایی در رابطه با نظریه‌ی اختلال نگاشته شد: آن‌ها این سؤال را مطرح کردند که چه موقع یک شیئ ریاضی که در ویژگی معینی به طور تقریبی صدق می‌کند لزوماً به چیزی‌که در ویژگی قطعی صدق می‌کند، نزدیک می‌شود. بسیاری از این نتایج در [14] توضیح داده شده اند. برای مثال، فرض کنیم A جبر باناخ و $T : A \to \mathbb{C}$ یک تابعک خطی باشد به طوری‌که $|T(ab) - T(a)T(b)| < \delta |T(a)||T(b)| \quad (a, b \in A)$. در این صورت $\|T\| \leq ۱ + \delta$.

فرض کنیم A و B زیرجبرهایی از جبر باناخ C باشند به طوری‌که A و B به طور هندسی نزدیک به هم باشند. اغلب این‌طور استنباط می‌شود که (به [14] مراجعه کنید) A و B یکریخت هستند. به‌طور مشابه، فرض کنیم فضای باناخ A دارای دو عمل ضرب است که آن‌را به جبر تبدیل می‌کند و این دو ضرب به‌عنوان نگاشت‌های دوخطی به هم نزدیک هستند. در این صورت این دو جبر که بدین‌گونه ساخته شدند اغلب ویژگی‌های جبری مشترک دارند. طبق تحقیقات جانسون[۷] در [15] و [16] این ایده‌ها با نگاشت‌های تقریباً ضربی در ارتباط هستند. جفت (A, B) از جبرهای باناخ $AMNM$ است هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ و هر $K > ۰$ عدد $\delta > ۰$ وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر نگاشت خطی کراندار $T : A \to B$ که $\|T\| \leq K$ و برای هر $a, b \in A$ داشته باشیم $\|T(ab) - T(a)T(b)\| \leq \delta \|a\|\|b\|$، یک همریختی کراندار مانند $\theta : A \to B$ هست که $\|T - \theta\| \leq \varepsilon$. در بحث مربوط به قضیه‌های جانسون که در آن جبرهای باناخ، $AMNM$ هستند؛ برهان‌ها و شرایط مربوط به نظریه‌ی همانستگی از جبرهای باناخ است. مطالب مربوطه به گروه‌های همانستگی تقریبی و میانگین‌پذیری تقریبی در [19] مطرح شده اند.

در این پایان نامه، پیرو [7]، فضاهای چندنرمی را تعریف می‌کنیم و به بررسی ویژگی نگاشت‌های کراندار چندگانه بر فضاهای چندنرمی می‌پردازیم. به علاوه، قضیه‌ی پایداری تعمیم یافته هایرس-اولام-راسیاس مربوط به معادله‌ی جمعی کوشی برای نگاشت‌هایی از فضاهای خطی به فضاهای چندنرمی را با استفاده از یک نقطه‌ی ثابت همانند [4, 13, 18] ثابت می‌کنیم. نظریه‌ی فضاهای چندنرمی و جبرهای باناخ چندگانه در [7] آغاز شده است. هدف ما این است که قضیه‌ی ۴.۲.۳ کاربردهایی شبیه به موارد فوق در نظریه‌ی جبرها و فضاهای چندنرمی خواهد داشت.

در تدوین این پایان نامه مقاله‌ی [6] به عنوان مقاله‌ی اصلی و مقاله‌ی [8] و کتاب [7] به عنوان مراجع

[۷] Johnson

فرعی مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

[6] H. G. Dales and M. S. Moslehian, Stability of mappings on multi-normed spaces, Glasgow Math. J. 49 (2007), 321-332.

[8] J. B. Diaz and B. Margolis, A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, Bull. Amer. Math. Soc. 126 (1968), 305–309.

[7] H. G. Dales and M. E. Polyakov, Multi-Normed Spaces, preprint.

فصل ۱
تعاریف و مفاهیم اولیه

در این فصل، برای دسترسی بهتر خواننده، برخی تعاریف، نمادها و نتایج مقدماتی را که در فصول بعدی استفاده خواهیم نمود، بیان می‌کنیم.

۱.۱ نمادگذاری پایه‌ای

برخی از نمادهای مهم را در اینجا ذکر می‌کنیم.

مجموعه‌ها

مجموعه‌های $\{۱, ۲, \ldots\}$ از اعداد طبیعی، $\{۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots\}$ از اعداد صحیح و $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ از اعداد صحیح نامنفی را به ترتیب با $\mathbb{N}$ و $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}^+$ نشان می‌دهیم. برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، مجموعه‌های $\{۱, \ldots, n\}$ و $\{۰, ۱, \ldots, n\}$ را به ترتیب با $\mathbb{N}_n$ و $\mathbb{Z}_n^+$ نمایش می‌دهیم. همچنین، گروه **جایگشت‌ها** بر n شیئ را با $\mathfrak{S}_n$ و گروه همه‌ی جایگشت‌های $\mathbb{N}$ را با $\mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم.

میدان حقیقی را با $\mathbb{R}$، $\mathbb{R}^+ = [۰, \infty)$ و بازه‌ی یکه $[۰, ۱]$ در $\mathbb{R}$ را با $\mathbb{I}$ نشان می‌دهیم. میدان مختلط را با $\mathbb{C}$، قرص یکه‌ی باز در $\mathbb{C}$ را با $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < ۱\}$، قرص یکه‌ی بسته را با $\overline{\mathbb{D}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq ۱\}$ و دایره‌ی یکه را با $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = ۱\}$ نمایش می‌دهیم.

برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، **تابعک مختص** i ام بر $\mathbb{C}^n$ یا $\mathbb{R}^n$، یعنی نگاشت

$$(z_۱, \ldots, z_n) \mapsto z_i, \quad \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$$

را با Z_i نشان می‌دهیم.

فضای همه‌ی دنباله‌های مختلط مقدار بر $\mathbb{N}$ را با $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ نشان می‌دهیم و غالباً برای $\alpha = (\alpha_i : i \in \mathbb{N}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ می‌نویسیم (α_i). فرض کنیم $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. در این صورت

هرگاه عدد ثابت K وجود داشته باشد به طوری‌که به ازای هر $i \in \mathbb{N}$، $|\alpha_i| \leq K|\beta_i|$ می‌نویسیم $\alpha = O(\beta)$.

هرگاه برای هر $\varepsilon > ۰$ عدد $i_۰ \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری‌که به ازای هر $i \geq i_۰$، $|\alpha_i| \leq \varepsilon|\beta_i|$ می‌نویسیم $\alpha = o(\beta)$.

هرگاه $\alpha = O(\beta)$ و $\beta = O(\alpha)$ می‌نویسیم $\alpha \sim \beta$. در این حالت گوییم دنباله‌های α و β **مشابهند**.

نامساوی‌ها

فرض‌کنیم $۱ < p < \infty$. در این صورت q اندیس مزدوج p است هرگاه $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. همچنین ۱ و ∞ را به عنوان مزدوج یکدیگر در نظر می‌گیریم و مزدوج p را با p' نشان می‌دهیم. هرگاه $\alpha_۱, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$ و $q = \infty$، آن‌گاه $(\alpha_۱^q + \ldots + \alpha_n^q)^{۱/q}$ را به عنوان ماکسیمم $\{\alpha_۱, \ldots, \alpha_n\}$ در نظر می‌گیریم.

صورتی ساده از **نامساوی هولدر** به شرح زیر است. فرض کنیم $p, q \in [۱, \infty]$ اندیس‌های مزدوج باشند. در این صورت به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ و هر $x_۱, \ldots, x_n, y_۱, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$ داریم

$$\sum_{j=۱}^{n} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=۱}^{n} |x_j|^p\right)^{۱/p} \left(\sum_{j=۱}^{n} |y_j|^q\right)^{۱/q}. \qquad (۱)$$

حال اگر $a_۱, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^+$ و $۱ \leq r \leq s$ آن‌گاه (در حالتی‌که $r < s$) با استفاده از (۱) برای هر $j \in \mathbb{N}_n$ با $x_j = a_j^r$ و $y_j = ۱$ و همچنین $p = s/r$ و $q = s/(s-r)$ داریم

$$\frac{۱}{n^{۱/r}}(a_۱^r + \ldots + a_n^r)^{۱/r} \leq \frac{۱}{n^{۱/s}}(a_۱^s + \ldots + a_n^s)^{۱/s}.$$

ضمناً برای هر $k \in \mathbb{N}$ که $k \geq ۲$، اگر $\zeta = \exp(۲\pi i/k)$ آن‌گاه برای هر $\pm t \in \mathbb{N}_{k-۱}$ داریم $۱ + \zeta^t + \ldots + \zeta^{t(k-۱)} = ۰$.

فضاهای خطی

فرض کنیم F و G زیر فضاهای خطی از فضای خطی E باشند. قرار می‌دهیم

$$F + G = \{x + y : x \in F, y \in G\}.$$

هرگاه $F \cap G = \{0\}$ و $F + G = E$، می‌نویسیم $E = F \oplus G$.

حال فرض کنیم $E_1, \ldots, E_n$ زیر فضاهای خطی E باشند در صورتی E را مجموع مستقیم $E_1, \ldots, E_n$ نامیم و آن‌را به صورت

$$E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n,$$

نمایش می‌دهیم که هر عضو $x \in E$ را بتوان به‌طور یکتا به صورت $x = x_1 + \ldots + x_n$ نوشت که در آن برای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $x_i \in E_i$.

دو مجموع مستقیم $E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ و $F_1 \oplus \ldots \oplus F_n$ برابرند هرگاه $n = m$ و برای هر $i \in \mathbb{N}_m$، $E_i = F_i$. البته قضیه‌ی ذیل بیان می‌کند که تحت چه شرایطی می‌توان E را به صورت مجموع مستقیم زیرفضاهایش نوشت.

قضیه ۱.۱.۱ فرض کنیم E یک فضای خطی و $E_1, \ldots, E_n$ زیر فضاهای خطی E باشند. در این صورت $E = E_1 \oplus \ldots \oplus E_n$ اگر و فقط اگر به ازای هر $i \in \mathbb{N}_n$، $E_i \cap (E_1 + E_2 + \ldots + E_{i-1} + E_{i+1} + \ldots + E_n) = \{0\}$ و $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n$.

فرض کنیم E فضای خطی باشد. فضای خطی

$$\overbrace{E \times \ldots \times E}^{n}$$

را با E^n نمایش می‌دهیم. در این صورت E^n از n تایی‌های $(x_1, \ldots, x_n)$ که در آن $x_1, \ldots, x_n \in E$، تشکیل شده است. به عنوان یک قرارداد نمادین، در حالت خاصی که $k = 1$، برای $m \in \mathbb{N}$ عضو عمومی $(x_1, \ldots, x_{k-1}, y_1, \ldots, y_m)$ را همان $(y_1, \ldots, y_m)$ در نظر می‌گیریم و در صورتی‌که $n = 1$، به جای (x) می‌نویسیم x. عملگرهای خطی را می‌توان بر E^n به صورت مختصاتی تعریف کرد. عضو صفر از E یا E^n را با 0 نشان می‌دهیم. برای عضوی در E^n عبارت

$$(0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0)$$

نشان می دهد x_i در مختص i ام است، مگر خلاف آن ذکر شود. عضو x از E^n اغلب به صورت $(x_1, \ldots, x_n)$ یا (x_i) نوشته می‌شود. برای هر $x \in E$، دنباله‌ی ثابت با مقدار x دنباله‌ی $(x) = (x, \ldots, x) \in E^n$ است.

تعریف ۲.۱.۱ *فرض کنیم E فضای خطی باشد.*

اگر $n \in \mathbb{N}$، $k \in \mathbb{N}_n$ *و* $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ *آن‌گاه عضو* $(y_1, \dots, y_k) \in E^k$ *را* ***انعقاد*** $(x_1, \dots, x_n)$ *گوییم هرگاه افراز* $\{S_j : j \in \mathbb{N}_k\}$ *از* $\mathbb{N}_n$ *وجود داشته باشد به طوری‌که برای هر* $j \in \mathbb{N}_k$، $y_j = \sum\{x_i : i \in S_j\}$.

فرض کنیم $n, k \in \mathbb{N}$ *و* $x = (x_1, \dots, x_k) \in E^k$. *هرگاه* n *نسخه از هر بلوک* $(x_1, \dots, x_k)$ *داشته باشیم آن‌گاه*

$$x^{[n]} = (x_1, \dots x_k, x_1, \dots, x_k, \dots x_1, \dots, x_k) \in E^{nk}$$

را ***بسط*** n *ام* x *گوییم.*

فرض کنیم E فضای خطی باشد. فضای $E^{\mathbb{N}}$ را که نیز یک فضای خطی است در نظر می‌گیریم. عضو عمومی $E^{\mathbb{N}}$ را اغلب به صورت زیر می‌نویسیم

$$x = (x_i) = (x_i : i \in \mathbb{N}),$$

عضو صفر $E^{\mathbb{N}}$ نیز به صورت $0 = (0, 0, 0, \dots)$ است و به ازای هر $x \in E$، دنباله‌ی ثابت با مقدار x را با (x) نشان می‌دهیم.

ماتریس‌ها و عملگرهای خطی

فرض کنیم E و F فضاهای خطی باشد. در این صورت فضای خطی همه‌ی عملگرهای خطی از E به F را با $\mathcal{L}(E, F)$ نشان می‌دهیم؛ قرار می‌دهیم $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$. عملگر همانی بر E را با I_E نمایش می‌دهیم. بنابراین $\mathcal{L}(E)$ نسبت به ترکیب عملگرها جبر یکدار است.

حال فرض کنیم V و W فضاهای خطی-حقیقی و T نگاشت خطی-حقیقی از V به W باشد. مختلط سازی V و W را به ترتیب با $E = V \oplus iV$ و $F = W \oplus iW$ و مختلط سازی T را با $T_{\mathbb{C}}$ نشان می‌دهیم که یک نگاشت خطی-مختلط از E به F است و برای هر $x, y \in V$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T_{\mathbb{C}}(x + iy) = Tx + iTy.$$

فرض کنیم E فضای خطی باشد و $m, n \in \mathbb{N}$. فضای خطی همه‌ی ماتریس‌های $m \times n$ با درایه در E را با $\mathbb{M}_{m,n}(E)$ نشان می‌دهیم و برای $\mathbb{M}_{n,n}(E)$ می‌نویسیم $\mathbb{M}_n(E)$. برای $\mathbb{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ و $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ به ترتیب می‌نویسیم $\mathbb{M}_{m,n}$ و $\mathbb{M}_n$.

اگر $v \in \mathbb{M}_m(E)$ و $w \in \mathbb{M}_n(E)$ آن‌گاه $v \oplus w$ ماتریسی در $\mathbb{M}_{m+n}(E)$ به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} v & \circ \\ \circ & w \end{bmatrix}$$

اگر $x = (x_{ij}) \in \mathbb{M}_{m,n}(E)$ آن‌گاه **ترانهاد** x ماتریس زیر می‌باشد، که با تغییر سطر و ستون ماتریس (x_{ij}) حاصل می‌شود:

$$x^t = (x_{ji}) \in \mathbb{M}_{n,m}(E).$$

فرض کنیم E فضای خطی باشد و $m, n \in \mathbb{N}$. متناظر با هر عضو $a \in \mathbb{M}_{m,n}$ می‌توان از طریق ضرب ماتریس‌ها، عضوی از $\mathcal{L}(E^n, E^m)$ را تعیین کرد.

فرض کنیم $E_۱, \ldots, E_n$ و F فضاهای خطی باشند. در این صورت فضای خطی نگاشت‌های $n-$خطی از $E_۱ \times \ldots \times E_n$ به F را با $\mathcal{L}^n(E_۱, \ldots, E_n; F)$ نشان می‌دهیم.

فرض کنیم E فضای خطی، $n \in \mathbb{N}$ و S زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{N}_n$ باشد. برای $x = (x_i) \in E^n$، قرار می‌دهیم

$P_S(x) = (y_i)$ به طوری‌که برای $i \in S$، $y_i = x_i$ و برای $i \notin S$، $y_i = \circ$،

$Q_S(x) = (y_i)$ به طوری‌که برای $i \notin S$، $y_i = x_i$ و برای $i \in S$، $y_i = \circ$.

در این صورت P_S **تصویر روی** S و Q_S **تصویر روی مکمل** S است. به وضوح P_S و Q_S در جبر $\mathcal{L}(E^n)$ **خودتوان** هستند، و $P_S + Q_S = I_{E^n}$. همچنین برای هر $i \in \mathbb{N}_n$ وهر $x = (x_۱, \ldots, x_n) \in E^n$ قرار می‌دهیم

$$P_i(x) = (\circ, \ldots, \circ, x_i, \circ, \ldots, \circ), \quad Q_i(x) = (x_۱, \ldots, x_{i-۱}, \circ, x_{i+۱}, \ldots, x_n)$$

که در نتیجه $P_i = P_{\{i\}}$ و $Q_i = Q_{\{i\}}$.

این بخش را با تعریف برخی عملگرها که برایمان مهم خواهد بود ادامه می‌دهیم.

تعریف ۳.۱.۱ *فرض کنیم E فضای خطی و به ازای هر $n \in \mathbb{N}$، $\mathfrak{S}_n$ همان جایگشت صفحه‌ی اول باشد. برای $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ تعریف می‌کنیم*

$$A_\sigma(x) = (x_{\sigma(۱)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \quad (x = (x_۱, \ldots, x_n) \in E^n).$$

برای $\alpha = (\alpha_۱, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ تعریف می‌کنیم

$$M_\alpha(x) = (\alpha_i x_i) \quad (x = (x_۱, \ldots, x_n) \in E^n).$$

فرض کنیم E و F فضاهای خطی باشند و $T \in \mathcal{L}(E,F)$. برای $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$T^{(n)} : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto (Tx_1, \ldots, Tx_n), \quad E^n \to F^n;$$

نگاشت $T^{(n)}$ *را* **بسط** *nام T گوییم.*

در این صورت به ازای هر $\sigma \in \mathfrak{S}_n$، $A_\sigma \in \mathcal{L}(E^n)$ و به ازای هر $\alpha \in \mathbb{C}^n$، $M_\alpha \in \mathcal{L}(E^n)$ و همچنین $T^{(n)} \in \mathcal{L}(E^n, F^n)$.

۲.۱ فضاهای باناخ و جبرهای باناخ

تعریف ۱.۲.۱ *تابع حقیقی $\|\cdot\|$ را که روی فضای برداری X تعریف شده است یک نرم می‌نامیم هرگاه در سه ویژگی زیر صدق کند:*

۱. *به ازای هر $x \in X$، $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و فقط اگر $x = 0$.*

۲. *به ازای هر $x \in X$ و هر $\alpha \in \mathbb{R}$، $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$.*

۳. *به ازای هر $x, y \in X$، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.*

فضای برداری X مجهز به نرم $\|\cdot\|$ را یک فضای برداری نرم‌دار یا، به اختصار، یک **فضای نرم‌دار** *می‌نامیم.*

تعریف ۲.۲.۱ *هر فضای برداری مانند X را که نسبت به متریک القایی به وسیله‌ی نرم، فضایی کامل باشد یک* **فضای باناخ** *می‌نامیم. به عبارت دیگر به ازای هر دنباله کوشی مانند $\{x_n\}$ در X، عنصری مانند $x \in X$ وجود دارد به طوری‌که $\lim_{n \to \infty} \|x_n - x\| = 0$.*

تعریف ۳.۲.۱ *هر* **جبر مختلط** *یک فضای برداری مانند A روی میدان مختلط است که در آن یک ضرب شرکت‌پذیر و پخش‌پذیر تعریف شده است؛ یعنی به ازای هر x و y و z در A،*

$$x(y+z) = xy + xz \qquad (x+y)z = xz + yz \qquad x(yz) = (xy)z$$

و با ضرب اسکالر چنان مربوط شده است که به ازای $x, y \in A$ و αی اسکالر،

$$\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y.$$

هرگاه یک نرم در A موجود باشد که A را به یک فضای خطی نرم‌دار بدل کرده و در نامساوی ضربی

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \quad (x, y \in A) \tag{۱}$$

*صدق کند، آن‌گاه A یک **جبر مختلط نرم‌دار** می‌باشد. هرگاه، علاوه بر این، A یک فضای متری کامل نسبت به این نرم باشد، یعنی A یک فضای باناخ باشد، آن‌گاه A را یک **جبر باناخ** می‌نامیم.*

توجه کنید که تعویض‌پذیری A (یعنی به ازای هر x و y در A، $xy = yx$) شرط نشده است و ما نیز شرط نمی‌کنیم مگر وقتی صریحاً آن‌را ذکر کنیم.

با این حال فرض می‌کنیم A دارای یکه باشد. این یعنی عنصری مانند e باشد به طوری‌که به ازای هر $x \in A$، $xe = ex = x$. بنابر (۱)، حداکثر یک چنین e وجود دارد ($e' = e'e = e$) و $\|e\| \geq ۱$. ما فرض اضافی $\|e\| = ۱$ را نیز می‌پذیریم.

فرض کنیم $(E, \|\cdot\|)$ فضای نرم‌دار باشد (روی میدان اسکالر $\mathbb{K}$، که همواره آن‌را $\mathbb{R}$ یا $\mathbb{C}$ می‌گیریم). گوی بسته در E با مرکز ۰ و شعاع $r \geq ۰$ را با $E_{[r]}$ نشان می‌دهیم.

دنباله‌ی $(x_n : n \in \mathbb{N})$ در فضای نرم‌دار E، **دنباله‌ی پوچ** است هرگاه $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = ۰$.

فضایی از $E^{\mathbb{N}}$ را که از همه‌ی دنباله‌های پوچ در E تشکیل شده است، با $c_۰(E)$ نشان می‌دهیم. همچنین دوگان فضای $(E, \|\cdot\|)$ را با E' نمایش می‌دهیم. گاهی اوقات نرم دوگان بر E' را با $\|\cdot\|'$ نشان می‌دهیم. فضای دوگان دوم E را نیز با E'' نشان می‌دهیم.

فرض کنیم E و F فضاهای نرم‌دار باشند. فضای عملگرهای خطی کراندار از E به F را با $\mathcal{B}(E, F)$ نشان می‌دهیم. هرگاه F فضای باناخ باشد، $\mathcal{B}(E, F)$ نیز فضای باناخ است. برای این منظور، فرض کنیم $\{T_n\}$ دنباله‌ای کوشی در $\mathcal{B}(E, F)$ باشد. از نابرابری $\|T_n(x) - T_m(x)\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $x \in E$، دنباله‌ی $\{T_n(x)\}$ دنباله‌ای کوشی است و بنابراین، در F همگراست. به ازای هر $x \in E$ قرار می‌دهیم $T(x) = \lim T_n(x)$. چون $\{T_n\}$ دنباله‌ای کوشی است، عددی مانند $M > ۰$ هست به طوری‌که به ازای هر n، $\|T_n\| \leq M$. در این صورت نابرابری $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|$، همراه با پیوستگی نرم، نشان می‌دهد که به ازای هر $x \in E$، $\|T(x)\| \leq M\|x\|$. بنابراین $T \in \mathcal{B}(E, F)$.

حال نشان می‌دهیم که در $\mathcal{B}(E, F)$، $\lim T_n = T$. فرض کنیم $\varepsilon > ۰$. اندیس k را چنان انتخاب می‌کنیم که به ازای هر $n, m \geq k$ داشته باشیم $\|T_n - T_m\| < \varepsilon$. در این صورت از رابطه‌ی

$$\|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \|T_m - T_n\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon\|x\|$$

که به ازای هر $n, m \geq k$ برقرار است نتیجه می‌شود که به ازای هر $n \geq k$ و هر $x \in E$،

$$\|T(x) - T_n(x)\| = \lim_{m\to\infty} \|T_m(x) - T_n(x)\| \leq \varepsilon\|x\|$$

یعنی به ازای هر $n \geq k$ نابرابری $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$ برقرار است و بنابراین در $\mathcal{B}(E, F)$ داریم $\lim T_n = T$.

فرض کنیم $T \in \mathcal{B}(E, F)$. نرم عملگر خطی T را با $\|T\|$ یا، گاهی، به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$\|T : E \to F\|$$

قرار می‌دهیم $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E, E)$، به طوری‌که $\mathcal{B}(E)$ یک جبر نرم‌دار یکدار است.

نگاشت T انقباضی است هرگاه برای هر $x \in E$ ، $\|Tx\| \leq \|x\|$.

فرض کنیم $E_1, \ldots . E_n$ و F فضاهای نرم‌دار باشند. فضای نگاشت‌های nـخطی کراندار از $E_1, \ldots, E_n$ به F را با $\mathcal{B}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ نشان می‌دهیم. این یک فضای نرم‌دار می‌باشد که در آن نرم برای هر $T \in \mathcal{B}^n(E_1, \ldots . E_n; F)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|T\| = \sup\{\|T(x_1, \ldots, x_n)\| : x_j \in (E_j)_{[1]}, j \in \mathbb{N}_n\}$$

هرگاه F کامل باشد، $\mathcal{B}^n(E_1, \ldots, E_n; F)$ یک فضای باناخ است.

فضاهای باناخ استانده

فضای $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ را در نظر می‌گیریم. برای $n \in \mathbb{N}$ قرار می‌دهیم

$$\delta_n = (\delta_{m,n} : m \in \mathbb{N}) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}},$$

به طوری‌که برای $m = n$، $\delta_{m,n} = 1$ و برای $m \neq n$، $\delta_{m,n} = 0$. برای $1 \leq p < \infty$ قرار می‌دهیم

$$\ell^p = \left\{(\alpha_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p < \infty\right\},$$

در این صورت ℓ^p با نرم زیر یک فضای باناخ است:

$$\|(\alpha_i)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^p\right)^{1/p} \quad ((\alpha_i) \in \ell^p).$$

به علاوه، قرار می‌دهیم

$$\ell^\infty = \left\{(\alpha_i) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} : |(\alpha_i)|_{\mathbb{N}} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |\alpha_i| < \infty\right\},$$

در این صورت $(\ell^\infty, |\cdot|_{\mathbb{N}})$ فضای باناخ است. فضاهای

$$c=\{(\alpha_i)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \text{موجود باشد } \lim_{i\to\infty}\alpha_i\},\quad c_\circ=\{(\alpha_i)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}: \lim_{i\to\infty}\alpha_i=\circ\}$$

به ترتیب، از دنباله‌های همگرا و دنباله‌های پوچ، زیر فضاهای بسته‌ی $(\ell^\infty, |\cdot|_{\mathbb{N}})$ هستند. همچنین $\{\delta_n : n\in\mathbb{N}\}$ پایه‌ی شودر برای هر یک از این فضاهاست؛ که آن‌را **پایه‌ی استانده** نامیم. توجه کنید در صورتی‌که $\|\cdot\|$ در هر یک از فضاهای ℓ^p با $p\geq ۱$ یا $c_\circ$ محاسبه شده باشد، برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\|\delta_n\|=۱$.

به طور مشابه، ملاحظه می‌کنیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\{\delta_۱,\ldots,\delta_n\}$ پایه‌ی استانده $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ است.

۳.۱ مشبکه‌های باناخ

هر **فضای برداری جزئاً مرتب**، یک فضای برداری حقیقی مانند X مجهز به رابطه ای ترتیبی مانند $\geq$ است که به صورت زیر با ساختار جبری آن سازگار باشد:

۱. اگر $x\geq y$، آن‌گاه به ازای هر $z\in X$، $x+z\geq y+z$.

۲. اگر $x\geq y$، آن‌گاه به ازای هر $\alpha\geq\circ$، $\alpha x\geq\alpha y$.

مجموعه‌ی $X^+=\{x\in X: x\geq\circ\}$ را **مخروط مثبت** X و عضوهای آن‌را **بردارهای مثبت** X می‌نامیم. روشن است که مجموع هر دو بردار مثبت باز هم برداری مثبت است.

فضای برداری جزئاً مرتب X را یک **مشبکه‌ی برداری** (یا یک **فضای ریس**) می‌نامیم هرگاه به ازای هر جفت از بردارهای $x,y\in X$، $\sup\{x,y\}$ و $\inf\{x,y\}$ هر دو وجود داشته باشند. $\sup\{x,y\}$ را با $x\vee y$ و $\inf\{x,y\}$ را با $x\wedge y$ نشان می‌دهیم. یعنی $x\vee y=\sup\{x,y\}$ و $x\wedge y=\inf\{x,y\}$.

در هر مشبکه‌ی برداری، قسمت مثبت، قسمت منفی و قدر مطلق برداری مانند x را به ترتیب با

$$x^+=x\vee\circ\quad,\quad x^-=(-x)\vee\circ\quad,\quad |x|=x\vee(-x)$$

تعریف می‌کنیم.

می‌گوییم نرم $\|\cdot\|$ روی مشبکه‌ی برداری X یک **نرم مشبکه‌ای** است هرگاه رابطه‌ی $|x|\leq|y|$ در X مستلزم $\|x\|\leq\|y\|$ باشد. هر **مشبکه‌ی برداری نرم‌دار**، مشبکه‌ای برداری مجهز به یک نرم مشبکه‌ای است. اگر مشبکه‌ی برداری نرم‌دار X کامل باشد، X را **مشبکه‌ی باناخ** می‌نامیم.

۴.۱ توابع اندازه پذیر

تعریف

(آ) گردایه‌ی τ از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک **توپولوژی** در X گوییم اگر τ از سه خاصیت زیر بهره‌مند باشد:

۱. $\emptyset \in \tau$ و $X \in \tau$؛

۲. اگر به ازای $i = ۱, \ldots, n$، $V_i \in \tau$ آن‌گاه $V_۱ \cap V_۲ \cap \ldots \cap V_n \in \tau$؛

۳. اگر $\{V_\alpha\}$ گردایه‌ی دلخواهی از اعضای τ (متناهی، شمارا، یا ناشمارا) باشد آن‌گاه $\bigcup_\alpha V_\alpha \in \tau$.

(ب) اگر τ یک توپولوژی در X باشد آن‌گاه X را یک **فضای توپولوژیک** و اعضای τ را **مجموعه‌های باز** در X می نامند.

(پ) اگر X و Y دو فضای توپولوژیک و f نگاشتی از X به توی Y باشد، آن‌گاه گوییم f **پیوسته** است هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-۱}(V)$ مجموعه‌ی بازی در X باشد.

تعریف

(آ) گردایه‌ی $\mathfrak{M}$ از زیر مجموعه‌های مجموعه‌ی X را یک σ-**جبر** در X نامیم اگر $\mathfrak{M}$ از خواص زیر بهره‌مند باشد:

۱. $X \in \mathfrak{M}$؛

۲. اگر $A \in \mathfrak{M}$ آن‌گاه $A^c \in \mathfrak{M}$ که در آن A^c **مکمل** A نسبت به X است؛

۳. اگر $A = \bigcup_{n=۱}^{\infty} A_n$ و به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $A_n \in \mathfrak{M}$ آن‌گاه $A \in \mathfrak{M}$.

(ب) اگر $\mathfrak{M}$ یک σ-**جبر** در X باشد آن‌گاه X را یک **فضای اندازه پذیر** و اعضای $\mathfrak{M}$ را **مجموعه‌های اندازه پذیر** در X می‌نامیم.

(پ) اگر X یک فضای اندازه پذیر، Y یک فضای توپولوژیک، و f نگاشتی از X به Y باشد، آن‌گاه گوییم f **اندازه پذیر** است هرگاه به ازای هر مجموعه‌ی باز V در Y، $f^{-۱}(V)$ یک مجموعه‌ی اندازه پذیر در X باشد.