دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

ایده‌ال های n-جاذب در حلقه های جابجایی

استاد راهنما

دکتر حسین فضائلی مقیمی

استاد مشاور

دکتر محمدحسین حسینی

نگارنده

نسرین سروقد یامی

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابجایی و یکدار و n یک عدد صحیح مثبت باشد. در این پایان نامه ابتدا یک تعمیم از ایده‌ال اول (به طور ضعیف اول) بیان شده است. یک ایده‌ال سره I از R را یک ایده‌ال ۲-جاذب (به طور ضعیف ۲-جاذب) از R نامیم، هرگاه برای $a, b, c \in R$، $abc \in I$ ($0 \neq abc \in I$)، ایجاب کند که $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$. نشان داده می‌شود که اگر I یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R باشد، آنگاه $Rad(I)$ یک ایده‌ال اول حلقه R است یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که P_1 و P_2 تنها ایده‌ال‌های اول کمین روی I هستند. همچنین حلقه هایی که هر ایده‌آل سره از آن یک ایده‌ال ۲-جاذب باشد را شناسایی کرده و بررسی می‌نماییم.
یک ایده‌ال سره I از R را یک ایده‌ال n-جاذب (به طور قوی n-جاذب) نامیم، هرگاه برای $x_1, \cdots, x_{n+1} \in R$، $x_1 \cdots x_{n+1} \in I$ (برای ایده‌ال‌های $I_1, \cdots, I_{n+1}$ از R، $I_1 \cdots I_{n+1} \subseteq I$) ایجاب کند که حاصلضرب n تا از x_i ها (n تا از I_i ها) در I باشد. علاوه بر بررسی ایده‌ال‌های n-جاذب و به طور قوی n-جاذب، حدس می‌زنیم که به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، دو مفهوم n-جاذب و به طور قوی n-جاذب معادل اند. البته ثابت می‌کنیم که این دو مفهوم به ازای $n = 2$ معادل هستند. به خصوص پایداری n -جاذب بودن ایده‌ال ها نسبت به ساختارهای حلقه‌ای گوناگون را در رده‌های مختلفی از حلقه‌های جابجایی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای مثال بررسی می‌کنیم که برای هر ایده‌ال سره I از یک حلقه نوتری R عدد صحیح مثبت n وجود دارد به طوری که I یک ایده‌ال n-جاذب است. همچنین ثابت می‌شود که در یک دامنه پروفر یک ایده‌ال n-جاذب است اگر و تنها اگر حاصلضربی از ایده‌ال های اول باشد.

واژگان کلیدی: ایده‌ال اول؛ ایده‌ال ۲-جاذب؛ ایده‌ال به طور ضعیف ۲-جاذب؛ ایده‌ال n -جاذب؛ ایده‌ال به طور قوی n-جاذب

تعداد صفحات پایان نامه: ۱۰۱

تقدیم به

مادرم

که مهرش بنیانی شد برای کسب علم

پدرم

که مهرش در دلم گرامی و مقدس است.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندی را که گویندگان به عرصه ستایشش نمی رسند، و شماره گران از عهده شمردن نعمت هایش برنیایند، و کوشندگان حقش را ادا نکنند، و اندیشه های بلند او را درک ننمایند، و هوش های ژرف به حقیقتش دست نیابند.

بعد از حمد و سپاس خداوند متعال که روح تشکر را در کالبدم دمید، گل بوسه سلام و مهرورزی را به دستان گرم تمامی استادان مهربانم می افشانم که زکات علم خویش را در طبق اخلاص ره توشه ی راهم ساختند.

در اینجا بر خود لازم می دانم که صمیمانه از زحمات استاد راهنمای محترم جناب آقای دکتر حسین فضائلی مقیمی که همواره با چهره ای بشاش و برخورد گرم و صمیمی، پیگیر مراحل مختلف پایان نامه من بودند و همچنین جناب آقای دکتر محمدحسین حسینی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و از ایشان نیز بهره فراوان بردم، همچنین از اساتید گرامی جناب آقای دکتر محمد مهدی نصرآبادی و جناب آقای دکتر حسین اقدامی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

در ضمن از خانواده عزیزم که همواره موجبات دلگرمی ام را فراهم نمودند، تشکر می‌کنم. در نهایت از دوست و همکلاسی مهربانم خانم ملیحه محمودی کمال سپاسگزاری را دارم.

جاده زندگیشان مرصع به تن پوش دعا باد.

نسرین سروقدیامی

شهریور ۱۳۹۲

فهرست مطالب

پیش‌گفتار

ایده‌ال اول نقش اساسی در جبر جابجایی بازی می‌کند. ایده‌ال سره I از حلقه R را یک ایده‌ال اول نامیم، هرگاه برای هر $a, b \in R$، $ab \in I$ ایجاب کند $a \in I$ یا $b \in I$. راههای مختلفی برای تعمیم این مفهوم وجود دارد. یکی از این تعمیم ها مفهوم ایده‌ال ۲-جاذب است که در سال ۲۰۰۷ توسط آ. بداوی [۲] مطرح شد و مورد بررسی قرار گرفت [۷]. یادآوری می شود که ایده‌ال I را یک ایده‌ال ۲-جاذب نامیم، هرگاه برای سه عنصر $a, b, c \in R$، $abc \in I$ ایجاب کند $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$. می دانیم اگر I یک ایده‌ال اول از حلقه R باشد، آنگاه برای ایده‌ال های I_1 و I_2 از R، $I_1I_2 \subseteq I$ ایجاب می‌کند $I_1 \subseteq I$ یا $I_2 \subseteq I$. بداوی نشان داد که برای ایده‌ال ۲-جاذب حکمی مشابه برقرار است، یعنی اگر I یک ایده‌ال ۲-جاذب از R باشد، برای ایده‌ال های I_1, I_2 و I_3 از R، $I_1I_2I_3 \subseteq I$ ایجاب می‌کند $I_1I_2 \subseteq I$ یا $I_3I_2 \subseteq I$ یا $I_1I_3 \subseteq I$.

در سال ۲۰۰۳، د. د. اندرسون [۳] و ای. اسمیت [۴] با تحدید جایی که ab در آن قرار دارد مفهوم ایده‌ال به طور ضعیف اول را ارائه کردند [۴]. ایده‌ال I از R را ایده‌ال به طور ضعیف اول نامیم، هرگاه $a, b \in R$، $0 \neq ab \in I$ ایجاب کند $a \in I$ یا $b \in I$. به دنبال این تعمیم از ایده‌ال اول، آ. بداوی و آ. یوسفیان دارانی [۵] تعمیم ایده‌ال به طور ضعیف ۲-جاذب را معرفی کردند [۸]. ایده‌ال I از R را یک ایده‌ال به طور ضعیف ۲-جاذب نامیم، هرگاه $a, b, c \in R$، $0 \neq abc \in I$ ایجاب کند $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$.

سرانجام در سال ۲۰۱۱ دی. اف. اندرسون [۶] و آ. بداوی مفهوم ایده‌ال های n-جاذب را برای هر عدد صحیح مثبت n مطرح کردند، که موضوع اصلی این پایان نامه می باشد [۱]. آنها ضمن مشخص کردن این ایده‌ال ها در حلقه های مختلف، جنبه های جدیدی از حلقه های جابجایی را نمایان ساختند. این پایان نامه برگرفته از مراجع [۱]، [۷]، [۸]، [۲۰]، [۲۱] می‌باشد. فصل نخست این پایان نامه دارای دو بخش که به معرفی ایده‌ال های ۲-جاذب و تحلیل آن در رده های خاص از انواع حلقه ها می‌پردازد و فصل دوم آن ایده‌ال های به طور ضعیف ۲-جاذب را در بردارد. فصل سوم آن چهار بخش که ویژگی های ایده‌ال های n-جاذب، ارتباط آنها با ایده‌ال های

[۲] A. Badawi
[۳] D. D. Andeson
[۴] E. Smith
[۵] A. Yousefian Darani
[۶] D. F. Anderson

اولیه، توسیع هایی از آن و بررسی این ایده‌ال ها در رده هایی خاصی از حلقه ها را شامل می‌شود. در فصل چهارم که فصل انتهایی این پایان نامه می‌باشد، به خواص ایده‌ال های به طور قوی n -جاذب پرداخته شده و دو حدس در مورد این ایده‌ال ها بیان شده است.

فصل ۱
ایده‌ال های ۲ - جاذب

.

۱.۱ ویژگی های اساسی ایده‌ال های ۲-جاذب

در ابتدا به مفهوم ایده‌ال‌های ۲-جاذب و خواص اساسی آن می‌پردازیم. در ادامه خواهیم دید این مفهوم قابل تعمیم به ایده‌ال‌های n-جاذب برای $n > ۲$ است. در این فصل از مراجع [۵]، [۷]، [۱۵]، [۲۰] و [۲۱] استفاده شده است.

تعریف ۱.۱.۱. یک ایده‌ال سره I از R را ایده‌ال ۲-جاذب نامیم، هرگاه برای $a, b, c \in R$ ، $abc \in I$ ایجاب کند $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$.

مثال ۲.۱.۱. هر ایده‌ال اول یک ایده‌ال ۲-جاذب است.

مثال ۳.۱.۱. ایده‌ال صفر در حلقه $\mathbb{Z}_۴$ یک ایده‌ال ۲-جاذب غیر اول است.

قضیه ۴.۱.۱. *فرض کنید $P_۱$ و $P_۲$ ایده‌ال هایی اول از حلقه R باشند. در این صورت $P_۱ \cap P_۲$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است.*

برهان. با توجه به تعریف به سادگی اثبات می‌شود. □

قضیه ۵.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R باشد. در این صورت به ازای هر $x \in Rad(I)$، $x^۲ \in I$. علاوه براین $Rad(I)$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از Rاست.*

برهان. فرض کنید $x \in Rad(I)$. در این صورت عدد صحیح مثبت n وجود دارد به طوری که $x^n \in I$. اگر $n = ۱$ یا ۲ باشد، چیزی برای اثبات نداریم. فرض کنید $n > ۲$ و کمین باشد. در

این صورت ۱ $\geqslant$ ۲ $- n$ و $xxx^{n-2} \in I$. چون I ایده‌ال ۲-جاذب است، در نتیجه $x^2 \in I$ یا $x^{n-1} \in I$. اما چون n کمین بود، پس $x^2 \in I$.

اکنون فرض کنید $x, y, z \in R$ به طوری که $xyz \in Rad(I)$. در این صورت بنا بر قسمت اول $x^2y^2z^2 = (xyz)^2 \in I$. چون I ایده‌ال ۲-جاذب است، پس $x^2y^2 \in I$ یا $x^2z^2 \in I$ یا $y^2z^2 \in I$. در نتیجه

$$(xy)^2 = x^2y^2 \in I \quad \text{یا} \quad (xz)^2 = x^2z^2 \in I \quad \text{یا} \quad (yz)^2 = y^2z^2 \in I$$

پس

$$xy \in Rad(I) \quad \text{یا} \quad xz \in Rad(I) \quad \text{یا} \quad yz \in Rad(I)$$

بنابراین $Rad(I)$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است. □

قضیه ۶.۱.۱. *فرض کنید R, R' حلقه‌های جابجایی و یکدار باشند و $\varphi : R \longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ها باشد. اگر I' یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R' باشد، آنگاه $\varphi^{-1}(I')$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است. به علاوه، اگر φ بروریختی باشد و I یک ایده‌ال ۲-جاذب از R شامل $Ker\varphi$ باشد، آنگاه $\varphi(I)R'$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از R' است.*

برهان. بدیهی است که $\varphi^{-1}(I') \neq R$. فرض کنید برای $a, b, c \in R$، $abc \in \varphi^{-1}(I')$، بنابراین $\varphi(abc) \in I'$. یعنی $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c) \in I'$ و چون I' یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R' است، پس

$$\varphi(a)\varphi(b) \in I' \quad \text{یا} \quad \varphi(a)\varphi(c) \in I' \quad \text{یا} \quad \varphi(b)\varphi(c) \in I'$$

بنابراین

$$\varphi(ab) \in I' \quad \text{یا} \quad \varphi(ac) \in I' \quad \text{یا} \quad \varphi(bc) \in I'$$

یعنی

$$ab \in \varphi^{-1}(I') \quad \text{یا} \quad ac \in \varphi^{-1}(I') \quad \text{یا} \quad bc \in \varphi^{-1}(I')$$

در نتیجه $\varphi^{-1}(I')$ یک ایده‌ال ۲-جاذب حلقه R است.

اکنون فرض کنید برای $a', b', c' \in R'$، $a'b'c' \in \varphi(I)R'$. چون φ بروریختی است، عناصر $a, b, c \in R$ وجود دارند به طوری که

$$\varphi(a) = a' \quad \text{و} \quad \varphi(b) = b' \quad \text{و} \quad \varphi(c) = c'$$

در این صورت

$$\varphi(abc) = a'b'c' = \Sigma_{i=1}^{n} \varphi(a_i) r'_i$$

به طوری که $a_1, a_2, \cdots, a_n \in I$ و $r'_1, r'_2, \cdots, r'_n \in R'$. چون φ بروریختی حلقه ای است، پس عناصر $r_1, r_2, \cdots, r_n \in R$ وجود دارند به طوری که برای $i = 1, 2, \cdots, n$، $\varphi(r_i) = r'_i$. بنابراین

$$\varphi(abc) = \Sigma_{i=1}^{n} \varphi(a_i)\varphi(r_i) = \varphi(\Sigma_{i=1}^{n} a_i r_i)$$

پس $abc - \Sigma_{i=1}^{n} a_i r_i \in Ker\varphi \subseteq I$. در این صورت $abc \in I$ و چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب است، در نتیجه $ab \in I$ یا $ac \in I$ یا $bc \in I$. یعنی

$$\varphi(ab) = a'b' \in \varphi(I)R' \quad \text{یا} \quad \varphi(ac) = a'c' \in \varphi(I)R' \quad \text{یا} \quad \varphi(bc) = b'c' \in \varphi(I)R'$$

پس $\varphi(I)R'$ یک ایده‌ال ۲-جاذب حلقه R' است. $\square$

قضیه ۷.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال از حلقه R و S یک مجموعه بسته ضربی R و $S^{-1}R$ حلقه کسرهای R باشد. اگر I یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R باشد به طوری که $S \cap I = \varnothing$، آنگاه $S^{-1}I$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از $S^{-1}R$ است.*
به علاوه، اگر $S^{-1}I$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه $S^{-1}R$ باشد به طوری که $S \cap Z(\frac{R}{I}) = \varnothing$، آنگاه I یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است. ($Z(R)$ مجموعه مقسوم علیه‌های صفر حلقه R است.)

برهان. فرض کنید $a, b, c \in R$ و $s, t, l \in S$ به طوری که $\frac{abc}{stl} \in S^{-1}I$. بنابراین $s' \in S$ وجود دارد به طوری که $(s'a)bc = s'abc \in I$. چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب است، پس

$$s'ab \in I \quad \text{یا} \quad s'ac \in I \quad \text{یا} \quad bc \in I$$

اگر $s'ab \in I$، آنگاه $\frac{ab}{st} = \frac{s'ab}{s'st} \in S^{-1}I$. اگر $s'ac \in I$، آنگاه

$$\frac{s'ac}{s'sl} = \frac{ac}{sl} \in S^{-1}I$$

اگر $bc \in I$، پس $\frac{bc}{tl} \in S^{-1}I$. در این صورت $S^{-1}I$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه $S^{-1}R$ است.
برعکس، فرض کنید $a, b, c \in R$ به طوری که $abc \in I$. در این صورت $\frac{abc}{1} \in S^{-1}I$، چون $S^{-1}I$ ایده‌ال ۲-جاذب از $S^{-1}R$ است، داریم

$$\frac{ab}{1} \in S^{-1}I \quad \text{یا} \quad \frac{ac}{1} \in S^{-1}I \quad \text{یا} \quad \frac{bc}{1} \in S^{-1}I$$

برای نمونه، اگر $\frac{ab}{1} \in S^{-1}I$، پس عنصر $s \in S$ وجود دارد به طوری که $sab \in I$. حال چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب از Rاست، پس

$$sa \in I \quad \text{یا} \quad sb \in I \quad \text{یا} \quad ab \in I$$

از این که $S \cap Z(\frac{R}{I}) = \varnothing$، پس $ab \in I$. در نتیجه $S^{-1}I$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از $S^{-1}R$ است. $\square$

قضیه ۸.۱.۱. *فرض کنید S زیرمجموعه بسته ضربی از حلقه R باشد و Q بزرگترین ایده‌ال از R مجزا از S باشد. دراین صورت Q یک ایده‌ال اول از R است.*

برهان. برای $a, b \in R$ به طوری که $ab \in Q$ ، ثابت می‌کنیم $a \in Q$ یا $b \in Q$. فرض کنید $a \notin Q$ و $b \notin Q$ و $ab \in Q$. همچنین فرض کنید $< Q, a >$ ایده‌ال تولید شده توسط Q و a باشد. واضح است که بزرگتر از Q است. چون Q بزرگترین ایده‌ال از حلقه R است که مجزا از S می‌باشد، پس $< Q, a >$ مجزا از S نیست. در نتیجه عنصر $s_1 \in S$ وجود دارد به طوری که $s_1 \in < Q, a >$. بنابراین

$$s_1 = q_1 + xa \text{ ، که } q_1 \in Q \text{ و } x \in R$$

به طور مشابه فرض کنید $< Q, b >$ ایده‌ال تولید شده توسط Q و b باشد، پس عنصر $s_2 \in S$ وجود دارد به طوری که $s_2 \in < Q, b >$. بنابراین

$$s_2 = q_2 + yb \text{ ، که } q_2 \in Q \text{ و } y \in R$$

اکنون

$$s_1 s_2 = (q_1 + xa)(q_2 + yb) = q_1 q_2 + q_1 yb + xaq_2 + xayb$$

واضح است که سه جمله ی اول عضو Q هستند و چون $ab \in Q$ جمله ی چهارم نیز عضو Q است. پس $s_1 s_2 \in Q$ و چون S مجموعه بسته ضربی است. در نتیجه $s_1 s_2 \in S$. چون Q مجزا از S فرض شده بود به تناقض $s_1 s_2 \in Q \cap S$ می‌رسیم. بنابراین Q یک ایده‌ال اول از R است. $\square$

لم ۹.۱.۱. *فرض کنید $I \subseteq P$ ایده‌الی از حلقه R و P یک ایده‌ال اول از R باشد. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:*

(۱) *P یک ایده‌ال اول کمین از I است؛*

(۲) *$R \setminus P$ بزرگ‌ترین مجموعه بسته ضربی است که نسبت به جدا بودن از I بیشین است؛*

(۳) *به ازای هر* $x \in P$*، یک عنصر* $y \in R \setminus P$ *و یک عدد صحیح نامنفی* n *وجود دارد به طوری که* $yx^n \in I$.

برهان. (۱) $\Leftarrow$ (۲) بدیهی است که $R \setminus P$ یک مجموعه بسته ضربی است که شامل I نیست. اگر S یک مجموعه بسته ضربی شامل $R \setminus P$ باشد به طوری که $I \subseteq S$. حال فرض کنید

$$\Sigma = \{\ \sigma \mid \text{یک مجموعه بسته ضربی است } \sigma,\ R \setminus P \subseteq \sigma,\ \sigma \cap I = \varnothing\ \}$$

واضح است که $R \setminus P \in \Sigma$. اگر $C = \{\sigma_i | i \in I\}$ یک زنجیر در Σ باشد، آنگاه $\bigcup_{i \in I} \sigma_i$ یک کران بالای C در Σ است. پس بنا بر لم زرن Σ دارای عنصر بیشین مانند S است. بنا بر قضیه ۸.۱.۱، یک ایده‌ال Q شامل I وجود دارد به طوری که در بین تمام ایده‌ال های شامل I و جدا از S بیشین است. علاوه بر این Q ایده‌ال اولی از R است. چون $S \cap Q = \varnothing$، پس $S \subseteq R \setminus Q$. از طرفی $R \setminus P \subseteq S$، پس $R \setminus P \subseteq R \setminus Q$ و این یعنی $Q \subseteq P$. حال چون $I \subseteq Q \subseteq P$، پس بنا بر فرض $P = Q$ و می‌دانیم $R \setminus P \subseteq S \subseteq R \setminus Q$. چون $P = Q$، پس

$$S = R \setminus P = R \setminus Q$$

(۲) $\Leftarrow$ (۳) چون P یک ایده‌ال اول R است، پس $R \setminus P$ مجموعه بسته ضربی است. فرض کنید $x \in P$ و

$$S = \{yx^i \mid y \in R \setminus P,\ \ i = 0, 1, 2, \cdots\}$$

به وضوح S مجموعه بسته ضربی و به طور سره شامل $R \setminus P$ است. بنا به فرض $S \cap I \neq \varnothing$. بنابراین $y \in R \setminus P$ و عدد صحیح نامنفی n وجود دارد به طوری که $yx^n \in I$.

(۳) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید ایده‌ال اول Q موجود باشد به طوری که $I \subset Q \subseteq P$. کافی است نشان دهیم $P = Q$. اگر $P \neq Q$، آنگاه $x \in P \setminus Q$ وجود دارد. حال بنا بر فرض $y \in R \setminus P$ و عدد صحیح نامنفی n وجود دارند به طوری که $yx^n \in I \subset Q$. حال چون $x \notin Q$، پس $y \in Q$ و در نتیجه $y \in P$، که این یک تناقض است. بنابراین $P = Q$. $\square$

قضیه ۱۰.۱.۱. *فرض کنید* I *یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه* R *باشد. در این صورت حداکثر دو ایده‌ال اول در* R *وجود دارد به طوری که کمین روی* I *هستند.*

برهان. فرض کنید

$$J = \{\ P_i \mid \text{کمین باشد } I \text{ و روی } R_i \text{ ایده‌ال اول } P_i\ \}$$

فرض کنید J حداقل سه عنصر داشته باشد. اگر $P_1, P_2 \in J$ دو ایده‌ال اول متمایز از R باشند، آنگاه عناصر $x_1 \in P_1 \setminus P_2$ و $x_2 \in P_2 \setminus P_1$ وجود دارند. ابتدا نشان می‌دهیم $x_1x_2 \in I$. بنا به لم

۹.۱.۱، عناصر $c_2 \in R \setminus P_1, c_1 \in R \setminus P_2$ و اعداد صحیح مثبت m, n وجود دارند به طوری که $c_1 x_2^m \in I$ و $c_2 x_1^n \in I$. فرض کنید n, m کمین باشند.

چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب است، پس $c_2 x_1 \in I$ یا $c_2 x_1^{n-1} \in I$ یا $x_1^n \in I$. اما اگر $c_2 x_1^{n-1} \in I$، به تناقض کمین بودن n می‌رسیم و اگر $x_1^n \in I$، آنگاه $x_1^n \in P_2$ و در نتیجه $x_1 \in P_2$، که دوباره تناقض است. پس $c_2 x_1 \in I$. به طور مشابه $c_1 x_2 \in I$. از اینکه $x_1, x_2 \notin P_1 \cap P_2$ و $c_2 x_1, c_1 x_2 \in I \subseteq P_1 \cap P_2$، نتیجه می‌گیریم که $c_2 \in P_2 \setminus P_1$ و $c_1 \in P_1 \setminus P_2$. بنابراین $c_1, c_2 \notin P_1 \cap P_2$. چون $c_1 x_2, c_2 x_1 \in I$، پس $(c_1 + c_2) x_1 x_2 \in I$.

واضح است که $c_1 + c_2 \notin P_1$ و $c_1 + c_2 \notin P_2$، پس $(c_1 + c_2) x_1 \notin P_2$ و $(c_1 + c_2) x_2 \notin P_1$. در نتیجه $(c_1 + c_2) x_2 \notin I$ و $(c_1 + c_2) x_1 \notin I$. اما چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب است، پس $x_1 x_2 \in I$.
اکنون فرض کنید یک عنصر $P_3 \in J$ وجود داشته باشد به طوری که متمایز از ایده‌ال‌های P_1 و P_2 باشد. در این صورت عناصر

$$y_3 \in P_3 \setminus (P_1 \cup P_2)\ ,\ y_2 \in P_2 \setminus (P_1 \cup P_3)\ ,\ y_1 \in P_1 \setminus (P_2 \cup P_3)$$

وجود دارند. با توجه به بحث قبل $y_1 y_2 \in I$. حال از اینکه $I \subseteq P_1 \cap P_2 \cap P_3$، نتیجه می‌شود $y_1 \in P_3$ یا $y_2 \in P_3$، که در هر حالت یک تناقض است. از این رو J حداکثر دو عضو دارد و این اثبات را کامل می‌کند. □

قضیه ۱۱.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال ۲-جاذب R باشد. در این صورت یکی از گزاره های زیر برقرار است:*

(۱) $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول R است به طوری که $P^2 \subseteq I$؛ ($Rad(I)$ ایده‌ال رادیکال از I است.)

(۲) $Rad(I) = P_1 \cap P_2$، $P_1 P_2 \subseteq I$ و $Rad(I)^2 \subseteq I$ به طوری که P_1 و P_2 تنها ایده‌ال‌های اول متمایز R اند که روی I کمین هستند.

برهان. با توجه به قضیه ۱۰.۱.۱، می‌توانیم نتیجه بگیریم $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول از R است یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که P_1 و P_2 تنها ایده‌ال های اول متمایز R که روی I کمین اند. فرض کنید $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول R باشد و $x, y \in P$. بنا به قضیه ۵.۱.۱، $x^2, y^2 \in I$. بنابراین

$$x(x+y)y = x^2 y + x y^2 \in I$$

چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب است، پس

$$x(x+y) = x^۲ + xy \in I \quad \text{یا} \quad (x+y)y = xy + y^۲ \in I \quad \text{یا} \quad xy \in I$$

در این صورت $xy \in I$. بنابراین $P^۲ \subseteq I$.

اکنون فرض کنید $Rad(I) = P_۱ \cap P_۲$ به طوری که $P_۱$ و $P_۲$ تنها ایده‌ال‌های اول از R هستند به طوری که روی I کمین باشند. فرض کنید $xy \in Rad(I)$. مشابه بحث قبل $xy \in I$. در این صورت داریم $Rad(I)^۲ \subseteq I$. نشان می‌دهیم $P_۱P_۲ \subseteq I$. بنا به قضیه ۵.۱.۱، برای هر $w \in Rad(I)$، $w^۲ \in I$. عناصر $x_۱ \in P_۱ \setminus P_۲$ و $x_۲ \in P_۲ \setminus P_۱$ را در نظر بگیرید. با توجه به برهان قضیه ۱۰.۱.۱، $x_۱x_۲ \in I$. اکنون فرض کنید $z_۱ \in Rad(I)$, $z_۲ \in P_۲ \setminus P_۱$ و $y_۱ \in P_۱ \setminus P_۲$. بنا به برهان قضیه ۱۰.۱.۱، $z_۱ + y_۱ \in P_۱ \setminus P_۲$. در این صورت

$$z_۱z_۲ + y_۱z_۲ = (z_۱ + y_۱)z_۲ \in I$$

با بحث مشابه می‌توان نشان داد که اگر $z_۱ \in Rad(I)$ و $z_۲ \in P_۱ \setminus P_۲$، آنگاه $z_۱z_۲ \in I$. در نتیجه $P_۱P_۲ \subseteq I$. □

فرض کنید R, R' حلقه هایی جابجایی ویکدار باشند. حال خواص ایده‌ال های ۲-جاذب را در حلقه $R \times R'$ بررسی می‌کنیم. در ادامه نشان خواهیم داد مجموعه همه ایده‌ال های ۲-جاذب در حلقه $R \times R'$ از مجموعه همه ایده‌ال های اول آن بزرگتر است.

قضیه ۱۲.۱.۱. *فرض کنید $I_۱$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R باشد. دراین صورت $I_۱ \times R'$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از $R \times R'$ است. همچنین اگر $I_۲$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از R' باشد، آنگاه $R \times I_۲$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از $R \times R'$ است.*

برهان. فرض کنید $(a_۱, b'_۱), (a_۲, b'_۲), (a_۳, b'_۳) \in R \times R'$،

$$(a_۱, b'_۱)(a_۲, b'_۲)(a_۳, b'_۳) \in I_۱ \times R'$$

پس $(a_۱a_۲a_۳, b'_۱b'_۲b'_۳) \in I_۱ \times R'$. در نتیجه $a_۱a_۲a_۳ \in I_۱$. چون $I_۱$ یک ایده‌ال ۲-جاذب است، درنتیجه

$$a_۱a_۲ \in I_۱ \quad \text{یا} \quad a_۱a_۳ \in I_۱ \quad \text{یا} \quad a_۲a_۳ \in I_۱$$

در این صورت

$$(a_۱a_۲, b'_۱b'_۲) \in I_۱ \times R' \quad \text{یا} \quad (a_۱a_۳, b'_۱b'_۳) \in I_۱ \times R' \quad \text{یا} \quad (a_۲a_۳, b'_۲b'_۳) \in I_۱ \times R'$$

یعنی $I_۱ \times R'$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از $R \times R'$ است و به طور مشابه اگر $I_۲$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از R' باشد، آنگاه $R \times I_۲$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از $R \times R'$ است. □

قضیه ۱۳.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال ۲-جاذب حلقه $R \times R'$ باشد. در این صورت*

$$I = R \times I_2 \;\; \text{یا} \;\; I = I_1 \times R'$$

به طوری که I_1 و I_2 ایده‌ال‌هایی ۲-جاذب به ترتیب از حلقه های R و R' هستند یا $I = p \times q$ به طوری که p و q ایده‌ال‌هایی اول به ترتیب از حلقه های R و R' هستند.

برهان. فرض کنید I یک ایده‌ال ۲-جاذب از $R \times R'$ باشد. بنا به قضیه ۱۱.۱.۱، دو حالت رخ می‌دهد. حالت اول، $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول از $R \times R'$ است به طوری که $P^2 \subseteq I$. حالت دوم، $Rad(I) = P \cap Q$ به طوری که $PQ \subseteq I$ و P و Q تنها ایده‌ال های اول از $R \times R'$ است که روی I کمین هستند.

اگر $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول از $R \times R'$ است به طوری که $P^2 \subseteq I$. در این صورت $P = p \times R'$ یا $P = R \times q$ به طوری که p و q به ترتیب ایده‌ال های اول از R و R' هستند. قرار دهید $Rad(I) = P = p \times R$. به سادگی دیده می‌شود که

$$a = \{\, r \in R \mid (r, r') \in I,\ \exists\, r' \in R' \,\}$$

و

$$b = \{\, r' \in R' \mid (r, r') \in I \,,\ \exists\, r \in R \,\}$$

به ترتیب ایده‌ال‌هایی از حلقه‌های R و R' هستند. واضح است که $I \subseteq R \times b$ و $I \subseteq a \times R'$. اکنون اگر $(x, y) \in a \times R'$، آنگاه عنصر $r' \in R'$ وجود دارد به طوری که $(x, r') \in I$. همچنین چون $P^2 = (p \times R')^2 = p^2 \times R' \subseteq I$، نتیجه می‌شود $(x, 0) \in I$ و به طور مشابه $(0, y) \in I$، پس

$$(x, 0) + (0, y) = (x, y) \in I$$

بنابراین $I = a \times R'$.

حال فرض کنید $\phi : R \times R' \longrightarrow R$ با ضابطه $\phi(r, r') = r$ یک همریختی باشد. در نتیجه $a = \phi^{-1}(a \times R')$. بنا بر قضیه ۶.۱.۱، a یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R است.

به علاوه اگر $Rad(I) = P \cap Q$ به طوری که $PQ \subseteq I$، آنگاه $P = p \times R'$ و $Q = R \times q$ به طوری که p و q به ترتیب ایده‌ال های اول از حلقه های R و R' هستند. در این صورت

$$PQ = p \times q \subseteq I \subseteq Rad(I) = p \times q$$

در نتیجه $I = p \times q$ یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه $R \times R'$ است به طوری که p و q به ترتیب ایده‌ال های اول از R و R' هستند. □

قضیه ۱۴.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R باشد به طوری که $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول از R باشد و $I \neq P$. برای هر $x \in P \setminus I$، در نظر بگیرید که*

$$I_x = \{\ y \in R \mid yx \in I\ \}$$

در این صورت I_x یک ایده‌ال اول از R و شامل P است. به علاوه، برای هر $x, y \in P \setminus I$، $I_x \subseteq I_y$ یا $I_y \subseteq I_x$.

برهان. فرض کنید $x \in P \setminus I$. بنا به قضیه ۱۱.۱.۱، $P^۲ \subseteq I$، در نتیجه $P \subseteq I_x$. اگر $P \neq I_x$ و z, y عناصری از R باشند به طوری که $yz \in I_x$. چون $P \subset I_x$، می‌توانیم فرض کنیم که $z \notin P$ و $y \notin P$ و بنابراین $yz \notin I$. چون $yz \in I_x$، پس $yzx \in I$. با توجه به ۲-جاذب بودن ایده‌ال I و اینکه $yz \notin I$، در نتیجه $yx \in I$ یا $zx \in I$. در این صورت $y \in I_x$ یا $z \in I_x$. بنابراین I_x یک ایده‌ال اول از R و شامل P است.

فرض کنید $x, y \in P \setminus I$ و $z \in I_x \setminus I_y$. چون $P \subseteq I_y$، پس $z \in I_x \setminus P$. نشان می‌دهیم $I_y \subseteq I_x$. فرض کنید $w \in I_y$. از اینکه $P \subseteq I_x$، می‌توان فرض کرد که $w \in I_y \setminus P$. چون $z \notin P$ و $w \notin P$ و $Rad(I) = P$، نتیجه می گیریم $zw \notin I$. چون $z \in I_x$ و $w \in I_y$، پس $z(x+y)w \in I$. همچنین چون $z \in I_x \setminus I_y$، لذا $z(x+y) \notin I$. حال چون I یک ایده‌ال ۲-جاذب است، بنابراین $(x+y)w \in I$. اما چون $wy \in I$، در نتیجه $wx \in I$. بنابراین $w \in I_x$، پس $I_y \subseteq I_x$. □

قضیه ۱۵.۱.۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال ۲-جاذب از حلقه R باشد به طوری که*

$$I \neq Rad(I) = P_۱ \cap P_۲$$

در حالی که $P_۱$ و $P_۲$ تنها ایده‌ال های اول ناصفر جدا از هم R هستند که روی I کمین می‌باشند. در این صورت به ازای هر $x \in Rad(I) \setminus I$، $I_x = \{\ y \in R \mid xy \in I\ \}$ یک ایده‌ال اول از R می‌باشد که شامل $P_۱$ و $P_۲$ است. به علاوه، برای هر $x, y \in Rad(I) \setminus I$، $I_x \subseteq I_y$ یا $I_y \subseteq I_x$.

برهان. فرض کنید $x \in Rad(I) \setminus I$. بنا به قضیه ۱۱.۱.۱، $P_۱P_۲ \subseteq I$، در نتیجه $xP_۱ \subseteq I$ و $xP_۲ \subseteq I$. بنابراین $P_۱ \subseteq I_x$ و $P_۲ \subseteq I_x$. فرض کنید عناصر $y, z \in R$ به طوری که $yz \in I_x$ دلخواه باشند. چون $P_۱ \subseteq I_x$ و $P_۲ \subseteq I_x$، می‌توان فرض کرد که $y, z \notin P_۱$ و $y, z \notin P_۲$. پس $yz \notin I$. زیرا اگر $yz \in I$، آنگاه $yz \in P_۱ \cap P_۲$. در نتیجه $y \in P_۲, z \in P_۲$ و $y \in P_۱, z \in P_۱$ که یک تناقض است. چون $yz \in I_x$، پس $yzx \in I$. با توجه به ۲-جاذب بودن ایده‌ال I و چون $yz \notin I$، می‌توان نتیجه گرفت که $yx \in I$ یا $zx \in I$. بنابراین $y \in I_x$ یا $z \in I_x$. یعنی I_x یک ایده‌ال اول از R است. قسمت دوم برهان با توجه به اثبات قضیه ۱۴.۱.۱، واضح است. □

تعریف ۱۶.۱.۱. یک ایده‌ال سره و ناصفر I از حلقه R را Q-اولین نامیم، هرگاه ایده‌ال اول Q از R شامل I موجود باشد به طوری که $Z(\frac{R}{I}) = \frac{Q}{I}$.

مثال ۱۷.۱.۱. ایده‌ال $4\mathbb{Z}$ از حلقه $\mathbb{Z}$ یک ایده‌ال $2\mathbb{Z}$-اولین است.

لم ۱۸.۱.۱. *فرض کنید $S = \{P_i \mid i \in I\}$ یک مجموعه کلا مرتب از ایده‌ال های اول R باشد. در این صورت $\bigcup_{i\in I} P_i$ نیز یک ایده‌ال اول حلقه R است.*

برهان. واضح است. □

نتیجه ۱۹.۱.۱. *فرض کنید I ایده‌ال ۲-جاذب از R باشد به طوری که $I \neq Rad(I)$. در این صورت I یک ایده‌ال Q-اولین از R است به طوری که $Q = \bigcup_{x\in Rad(I)\setminus I} I_x$.*

برهان. فرض کنید $0 \neq a+I \in Z(\frac{R}{I})$ عنصری دلخواه باشد. در این صورت عنصر $b \in R \setminus I$ وجود دارد به طوری که $ab \in I$. نشان خواهیم داد که عنصر $f \in Rad(I) \setminus I$ وجود دارد به طوری که $a, b \in I_f$. با توجه به قضیه ۱۰.۱.۱، نتیجه می‌گیریم که $P = Rad(I)$ یک ایده‌ال اول R است به طوری که $P^2 \subseteq I$ یا $Rad(I) = P_1 \cap P_2$ به طوری که P_1 و P_2 تنها ایده‌ال های اول متمایز R اند که روی I کمین هستند و $P_1P_2 \subseteq I$.

در حالت اول، فرض کنید $Rad(I) = P$ یک ایده‌ال اول از R باشد. چون

$$ab \in I \subseteq Rad(I) = P$$

، پس $a \in P$ یا $b \in P$ و از این که $a, b \in R \setminus I$. بنابراین $a \in P \setminus I$ یا $b \in P \setminus I$. چون $P^2 \subseteq I$، پس $a, b \in I_a$ یا $a, b \in I_b$. در این صورت $a \in \cup_{x\in Rad(I)\setminus I} I_x$. در نتیجه $a + I \in \frac{Q}{I}$.

اکنون فرض کنید عنصر $a+I \in \cup_{x\in Rad(I)\setminus I}\frac{I_x}{I}$ دلخواه باشد. عنصر $b \in Rad(I) \setminus I$ وجود دارد به طوری که $a \in I_b$ و این یعنی $ab \in I$، پس $(a+I)(b+I) = I$. در نتیجه $a+I \in Z(\frac{R}{I})$.

می‌دانیم $I \neq Rad(I)$. فرض کنید

$$D = \{I_x \mid x \in Rad(I) \setminus I\}$$

یک مجموعه کلا مرتب از ایده‌ال های اول از R است. باتوجه به لم ۱۸.۱.۱، Q یک ایده‌ال اول است. با توجه به قضیه ۱۵.۱.۱،

$$Z(\frac{R}{I}) = \bigcup_{I_x\in D}(\frac{I_x}{I})$$

که یک ایده‌ال از $\frac{R}{I}$ است. لذا در این حالت I یک ایده‌ال Q-اولین از R است.

اکنون برای حالت دوم فرض کنید $Rad(I) = P_۱ \cap P_۲$ به طوری که $P_۱, P_۲$ تنها ایده‌ال های اول متمایز R هستند که روی I کمین اند و $P_۱P_۲ \subseteq I$. از این که $ab \in Rad(I)$، بدون این که از کلیت مطلب کاسته شود $a \in Rad(I) \setminus I$ یا $a \in P_۱ \setminus P_۲$ و $b \in P_۲ \setminus P_۱$. اگر $a \in Rad(I) \setminus I$، چون $ab \in I$ و $P_۱P_۲ \subseteq I$، آنگاه $a, b \in I_a$. اکنون فرض کنید $a \in P_۱ \setminus P_۲$ و $b \in P_۲ \setminus P_۱$. چون $I \neq Rad(I)$، پس عنصر $d \in Rad(I) \setminus I$ وجود دارد. از این که $P_۱P_۲ \subseteq I$. بنابراین $P_۱d \subseteq I$ و $P_۲d \subseteq I$. در نتیجه $P_۱ \subseteq I_d$ و $P_۲ \subseteq I_d$. حال از این که $a \in P_۱$ و $b \in P_۲$، پس $a, b \in I_d$. بنابراین $Z(\frac{R}{I}) = \frac{Q}{I}$. دوباره چون $I \neq Rad(I)$ و از طرفی بنا بر قضیه ۱.۱.۱۵،

$$D = \{\ I_x \mid x \in Rad(I) \setminus I\ \}$$

یک مجموعه کلا مرتب از ایده‌ال های اول R است که ایجاب می‌کند Q یک ایده‌ال اول از حلقه R باشد. □

قضیه ۱.۱.۲۰. *فرض کنید I یک ایده‌ال ازحلقه R باشد به طوری که $I \neq Rad(I)$ و $Rad(I)$ یک ایده‌ال اول از R است. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:*

(۱) *I یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است؛*

(۲) *برای هر $x \in Rad(I) \setminus I$، $I_x = \{\ y \in R \mid yx \in I\ \}$ یک ایده‌ال اول از R است.*

برهان. (۱) ⇐ (۲) با توجه به قضیه ۱.۱.۱۴ واضح است.
(۲) ⇐ (۱) فرض کنید برای $x, y, z \in R$، $xyz \in I$. از اینکه $Rad(I)$ یک ایده‌ال اول است، می‌توان فرض کرد $x \in Rad(I)$. اگر $x \in I$، آنگاه $xy \in I$ و حکم برقرار است. ولی اگر $x \in Rad(I) \setminus I$، آنگاه $yz \in I_x$ و چون I_x خود یک ایده‌ال اول است، پس $yx \in I$ یا $zx \in I$، یعنی I یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است. □

قضیه ۱.۱.۲۱. *فرض کنید I یک ایده‌ال از حلقه R باشد به طوری که $I \neq Rad(I) = P_۱ \cap P_۲$ در حالی که $P_۱$ و $P_۲$ ایده‌ال های اول متمایز از R باشد که روی I کمین هستند. در این صورت گزاره های زیر معادل اند:*

(۱) *I یک ایده‌ال ۲-جاذب از R است؛*

(۲) *$P_۱P_۲ \subseteq I$ و برای هر $x \in Rad(I) \setminus I$، $I_x = \{\ y \in R \mid yx \in I\ \}$ یک ایده‌ال اول از R است؛*

(۳) *برای هر $x \in (P_۱ \cup P_۲) \setminus I$، I_x یک ایده‌ال اول از R است.*