توسط

رساله ارائه شده به عنوان بخشی از ملزومات برای دریافت درجه

زیرنظر

دانشکده

دانشگاه صنعتی شریف

تهران

دانشگاه تربیت معلم

دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر

رساله دکتری ریاضی

ریاضی محض (جبر جابجایی)

عنوان

نظریه‌ی ایده‌ال‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی ضرایب هیلبرت و اعداد بتی مجتمع‌های متروید

تدوین

نعمت‌اله شیرمحمدی

استاد راهنما

دکتر حسین ذاکری

شهریور ماه ۱۳۸۷

قدردانی

بدین وسیله مراتب تشکر و امتنان خود را از استاد ارجمند آقای دکتر حسین ذاکری که در طول تحقیق و نگارش این رساله کمال محبت خویش را با راهنمایی‌هایشان نشان داده‌اند ابراز می‌دارم.

همچنین، از آقایان دکتر رحیم زارع نهندی، دکتر حسن حقیقی، دکتر محمدتقی دیبایی و دکتر عبدالجواد طاهری‌زاده که زحمت مطالعه و داوری این رساله را قبول کرده‌اند تشکر می‌کنم.

همچنین، لازم می‌دانم از دوست بسیار خوبم آقای حمید حسن‌زاده که اولین همکار علمی اینجانب بودند تشکر کنم. در پایان، بر خود واجب می‌دانم از زحمات همسر محترمم خانم اکرم محمودی که همواره یار و مشوق اینجانب در طول دوران تحصیلات تکمیلی‌ام بودند ، قدردانی کنم.

نعمت‌اله شیرمحمدی

تقدیم به همسرم

اکرم محمودی

چکیده

در این رساله نظریه‌ی ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی را مطرح می‌کنیم و در برخی موارد رفتار آنها را تحت پیوند می‌سنجیم. تحت شرطی خاص، نشان می‌دهیم که همبافت سیمیس و وسکانسلوس وابسته به این نوع ایده‌آل‌ها دقیق است. همچنین، نشان می‌دهیم که بعد متناهی حلقه‌ی خارج قسمتی یک ایده‌آل زمانی که آن ایده‌آل در یک کلاس پیوند زوج تغییر کند پایا می‌ماند. سپس، حدس‌های چندگانگی تعمیم یافته و عددهای بتی را برای حلقه‌ی استنلی-رایزنر مجتمع‌های ماترویید با روش‌های ساده اثبات می‌کنیم. در ادامه، با مقایسه‌ی کران‌های داده شده در حدس اعداد بتی برای آخرین عدد بتی و حدس چندگانگی یک نامساوی مطرح می‌کنیم و آن را حدس رابطه‌ی چندگانگی وآخرین عدد بتی می‌نامیم. به این حدس در حالاتی خاص پاسخ مثبت داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی:
۱) کوهن-مکالی تعمیم یافته ۲) پیوند ۳) ضرایب هیلبرت ۴) عدد بتی
۵) مجتمع ماترویید

پیشگفتار

آرتین و ناگاتا در مقاله‌ای مفهوم مقطع مانده‌ای را مطرح کردند و قضیه‌ای را در آن مقاله در حالت کلی اثبات نمودند. لیکن، هونیکه با ساختن مثالی نقض نشان داد که قضیه به آن صورتی که آن‌ها بیان کردند درست نیست. هونیکه، برای رفع این مشکل، خاصیتی در ایده‌آل‌ها بنام خاصیت کوهن-مکالی قوی مطرح کرد و به صورتی درست از قضیه‌ی آرتین و ناگاتا دست یافت. همچنین، او، بعداً، رفتار ایده‌آل‌های کوهن-مکالی قوی را تحت پیوند مطالعه کرد.

به پیروی از هونیکه نظریه‌ی ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی را مطرح می‌کنیم و در برخی موارد رفتار آنها را تحت پیوند می‌سنجیم. همچنین، تحت شرطی خاص، نشان می‌دهیم که همبافت سیمیس و وسکانسلوس وابسته به این نوع ایده‌آل‌ها دقیق است. لازم به ذکر است که سیمیس و وسکانسلوس این همبافت را به منظور بررسی برخی خواص جبرهای blowing up وابسته به ایده‌آل‌ها ساخته‌اند.

نتایج عمده‌ی فصل ۱ به قرار زیر هستند. در بخش ۱.۱، مطالب مقدماتی لازم برای مطالعه‌ی بخش‌های بعدی این فصل، به خصوص از نظریه‌ی پیوند، ارائه می‌شود. در بخش ۲.۱، ابتدا، اثباتی جدید به قضیه‌ی پایایی خاصیت کوهن-مکالی تعمیم یافته را تحت پیوند ارائه می‌کنیم. سپس، به معرفی ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی می‌پردازیم و برخی خواص آن را بیان و اثبات می‌کنیم. بالاخره، در پایان این بخش با ساخت مثالی نشان می‌دهیم که خاصیت‌های کوهن-مکالی قوی و کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی با هم تمایز دارند. در ادامه، در بخش ۳.۱، در راستای مسئله‌ی بررسی خاصیت‌هایی که تحت پیوند پایا می‌مانند، رفتار بعد متناهی را تحت پیوند مطالعه می‌کنیم و نشان می‌دهیم که بعد متناهی حلقه‌ی خارج قسمتی یک حلقه‌ی موضعی گرنشتاین توسط یک ایده‌آل در صورت جایگزینی آن ایده‌آل با ایده‌آلی در کلاس

پیوند زوج‌اش حفظ می‌شود. لیکن، در حالت پیوند فرد این مطلب هنوز بر ما روشن نیست. بالاخره، در بخش پایانی به ساختار ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی می‌پردازیم. در این بخش نشان می‌دهیم که ارتباط نزدیکی بین ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی و $d-$رشته‌های کوهن-مکالی وجود دارد. در واقع، در یک حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی، هرگاه ایده‌آل I علاوه بر کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی بودن دارای شرطی معروف به G_∞ باشد، آنگاه I با یک $d-$رشته‌ی کوهن-مکالی تولید می‌شود. بعلاوه معکوسی جزئی از این گزاره، بیان و اثبات شده است.
انگیزه‌ی مقایسه‌ی چندگانگی و عددهای بتی یک مدول با حاصل‌ضرب‌های انتقال‌های آن مدول در تحلیل آزاد مینیمال مدرج آن مدول از مقاله‌هایی که توسط هونیکه-میلر و هرتزوگ-کوهل نوشته شده است بدست می‌آید. آن‌ها روی مدول‌های مدرج کوهن-مکالی S/I با یک تحلیل خالص، که در آن S حلقه‌ی چندجمله‌ای روی یک میدان و I یک ایده‌آل همگن از آن است، تکیه داشتند. به این معنی که همه‌ی مولدهای مینیمال I با درجه‌ی یکسان، مثلاً، d_1، همه‌ی اولین سی‌زی‌جی‌های مینیمال I با درجه‌ی یکسان، مثلاً، d_2، و $\cdots$ فرض می‌شد. آن‌ها نشان دادند که چندگانگی و عددهای بتی S/I به وسیله‌ی فرمول‌هایی برحسب انتقال‌های d_1، d_2 و $\cdots$ داده می‌شود.
همان طور که هونیکه و میلر خاطر نشان کرده‌اند، به خاطر صحیح بودن عدد چندگانگی S/I، این فرمول‌ها شرایط بسیار قوی روی اعداد صحیحی که می‌توانند به عنوان انتقال‌های یک مدول با تحلیل خالص ظاهر شوند القاً می‌کند.
طبیعی است که فرمول‌هایی (یا نامساوی‌هایی) شبیه فرمول‌های داده شده توسط این افراد برای مدول‌های مدرج S/I که دارای تحلیل خالص نیستند جستجو شود. در این راستا، هونیکه و سرینیوازان در حالت کوهن-مکالی و هرتزوگ و سرینیوازان در حالت غیر کوهن-مکالی حدس چندگانگی را مطرح ساختند که چندگانگی S/I را بوسیله‌ی تابع‌هایی برحسب انتقال‌های ماکسیمال و مینیمال S/I در تحلیل آزاد مینیمال مدرج آن کراندار می‌کند. بعداً، این حدس توسط هرتزوگ و ژنگ به تمامی ضرایب هیلبرت یک S-مدول متناهی مولد مدرج کوهن-مکالی تولید شده در درجه‌ی صفر تعمیم داده شد. حدس آن‌ها در این رساله حدس چندگانگی تعمیم یافته نامیده شده است.
با الهام از کارهای بالا، رومر سوال طبیعی زیر را مطرح کرد که آیا، تحت شرط

کوهن-مکالی بودن S/I، $i-$امین عدد بتی کلی S/I می‌تواند با استفاده از انتقال‌های ماکسیمال و مینیمال S/I در تحلیل آزاد مینیمال مدرج S/I کراندار شود. این سوال به حدس عددهای بتی شهرت یافته است.
همه‌ی حدس‌های بالا در سال اخیر میلادی در پی کار غیرمنتظره‌ی ایزنباد و شرئر روی حدس بویچ-سودابرگ اثبات شدند. البته، ما در اینجا حدس‌های بالا رابرای حلقه‌ی استنلی-رایزنر مجتمع‌های متروید با روش‌های ساده اثبات می‌کنیم. همچنین با مقایسه‌ی حدس چندگانگی و کران‌های داده شده در حدس اعداد بتی، برای آخرین عدد بتی تحت شرط کوهن-مکالی یک نامساوی مطرح می‌کنیم و آن را حدس رابطه‌ی چندگانگی وآخرین عدد بتی می‌نامیم. به این حدس در حالاتی خاص پاسخ مثبت داده می‌شود. البته، قبل از اثبات این نامساوی در این حالت‌ها، این نامساوی برای حلقه‌ی خارج قسمتی توسط یک ایده‌آل کوهن-مکالی تراز با ارتفاع ۲، با استفاده از قضیه‌ی هیلبرت-برخ و مفهوم پیوند دوگانه‌ی پایه‌ای، اثبات نموده و بعداً تعمیم داده شده است.
کارهای انجام شده در فصل ۲ به صورت زیر است. در بخش ۱.۲، مطالب مقدماتی لازم برای مطالعه‌ی ضرایب هیلبرت و عددهای بتی حلقه‌ی استنلی-رایزنر مجتمع‌های متروید در بخش‌های بعدی این فصل ارائه می‌شود. بخش ۲.۲ به بررسی حدس چندگانگی تعمیم یافته برای حلقه‌ی استنلی-رایزنر مجتمع‌های متروید اختصاص دارد. در ادامه، در بخش ۳.۲، حدس اعداد بتی برای حلقه‌ی استنلی-رایزنر مجتمع‌های متروید مطالعه می‌شود. بالاخره، در بخش پایانی نامساوی گفته شده در مورد ارتباط چندگانگی و آخرین عدد بتی یک جبر مدرج استاندارد کوهن-مکالی روی یک میدان بیان کرده و آن را در برخی حالت‌های خاص اثبات می‌کنیم.

فهرست مندرجات

فصل ۱

نظریه‌ی ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی و کاربرد پیوند در آن

در این فصل با الهام از نظریه‌ی ایده‌آل‌های کوهن-مکالی قوی، ایده‌آل‌هایی بنام ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی بنا نموده و رفتار آنها را تحت پیوند بررسی می‌کنیم.

در بخش ۱.۱ مطالبی مقدماتی که در بخش‌های بعدی این فصل مورد نیاز است، به خصوص در نظریه‌ی پیوند، ارائه می‌شود. در بخش ۲.۱، ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی را معرفی کرده و برخی از خواص آن را بیان و اثبات می‌کنیم. در ادامه، در بخش ۳.۱، رفتار بعد متناهی را تحت پیوند مطالعه می‌کنیم. بالاخره، در بخش پایانی به ساختار ایده‌آل‌های کوهن-مکالی تعمیم یافته قوی می‌پردازیم.

۱.۱ پیش‌نیازهای فصل ۱

۱.۱.۱ پیوند

فرض کنیم M یک R–مدول باشد. دنباله‌ی $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_n$ از عناصر R یک M–رشته گفته می‌شود هرگاه، به ازای هر $i = 1, \ldots, n$، x_i یک مقسوم علیه غیرصفر روی $M/\sum_{t=1}^{i-1} x_t M$ باشد و $M \neq \sum_{t=1}^{n} x_t M$.

فرض کنیم k یک میدان بسته‌ی جبری و $S = k[x_0, \ldots, x_n]$ حلقه‌ی چندجمله‌ها روی k باشد. در ادامه ProjS مجموعه‌ی همه‌ی ایده‌آل‌های اول همگن S که شامل ایده‌آل ماکسیمال همگن $(x_0, \ldots, x_n)$ نیستند را نمایش خواهد داد. قرار می‌دهیم: $\mathbb{P}^n = \mathrm{ProjS}$. زیرطرح بسته‌ی X از $\mathbb{P}^n$ مقطع کامل حسابی نامیده می‌شود هرگاه $I(X)$ توسط یک S–رشته تولید شود. در اینجا منظور از نماد $I(V)$، به ازای زیرطرح بسته‌ی V از $\mathbb{P}^n$، ایده‌آل همگنی است که معرف V در نظریه‌ی طرح است.

تعریف ۱.۱.۱ فرض کنیم V و W زیرطرح‌های بسته‌ی $\mathbb{P}^n$ باشند به طوری که هیچ مؤلفه‌ی V در هیچ مؤلفه‌ی W قرار نگیرد و برعکس. در این صورت، گوییم V به طور هندسی و مستقیم با W توسط یک طرح بسته‌ی مقطع کامل حسابی X پیوند می‌خورد هرگاه $V \cup W = X$. از نقطه نظر ایده‌آل‌های معرف طرح‌ها، این بدین معنی است که $I(V) \cap I(W) = I(X)$. طرح V مانده‌ی W در X خوانده می‌شود.

مثال ۲.۱.۱ فرض کنیم V خم درجه سوم چپ یعنی تصویر $\mathbb{P}^1$ در $\mathbb{P}^3$ تحت نگاشت

$$(s : t) \longrightarrow (s^3 : s^2 t : s t^2 : t^3)$$

باشد. ایده‌آل V توسط کهادهای 2×2 ماتریس

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 \\ x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

تولید می‌شود. یعنی $I(V) = (x_0x_2 - x_1^2, x_1x_3 - x_2^2, x_0x_3 - x_1x_2)$. قرار می‌دهیم: $f_1 = x_0x_2 - x_1^2$ و $f_2 = x_1x_3 - x_2^2$. در این صورت، ایده‌ال (f_1, f_2) یک ایده‌آل مقطع کامل است و لذا طرح X تعریف شده با این ایده‌آل مقطع کامل حسابی است. اکنون، هرگاه W یک خط قاطع V باشد، مثلاً، خط $x_1 = x_2 = 0$، به سادگی می‌توان مشاهده کرد که $X = V \cup W$.

این رابطه ما بین خم‌ها اولین بار در کارهای کیلی دیده شد، دوباره، بعد از زمانی که آپه‌ری[1] و بعد از آن گاتا[2] نشان دادند که هرگاه V و W دو خم در $\mathbb{P}^3$ با حلقه‌های مختصاتی همگن کوهن-مکالی باشد، آنگاه V و W به هم پیوند می‌خورند، مورد توجه واقع شد تا این که در ۱۹۷۴ پسکین[3] و اسپیرو[4] آن را به صورتی که در بالا تعریف شد تعمیم داده و صورتی جبری از آن را نیز ارائه کردند.

مثال ۳.۱.۱ با نمادهای مثال بالا می‌خواهیم نشان دهیم که $I(W) = I(V) : (f_1, f_2)$. چون

$$\begin{aligned} x_1(x_0x_3 - x_1x_2) &= x_2f_1 + x_0f_2, \\ x_2(x_0x_3 - x_1x_2) &= x_3f_1 + x_1f_2. \end{aligned}$$

پس، $I(W) \supseteq I(V) : (f_1, f_2)$. حال، فرض کنیم $f \in I(V) : (f_1, f_2)$. در این صورت، $I(V)f \subseteq (f_1, f_2)$ و لذا $(x_0x_3 - x_1x_2)f \in (x_0x_2 - x_1^2, x_1x_3 - x_2^2)$. با قرار دادن $x_1 = x_2 = 0$، حاصل می‌شود:

$$x_0x_3f(x_0, 0, 0, x_3) = 0.$$

در نتیجه $f(x_0, 0, 0, x_3) = 0$. بنابراین $f \in (x_1, x_2) = I(W)$. پس

$$(f_1, f_2) : I(V) \subseteq I(W).$$

---

[1] Apéry
[2] Gaeta
[3] Peskine
[4] Szpiro

بنابراین $I(V) = I(W) : (f_1, f_2)$.

این تصادفی نیست زیرا در حالت کلی می‌توان نشان داد که اگر زیرطرح‌های بسته‌ی V و W توسط X به هم پیوند بخورند، آنگاه $I(V) = I(W) : I(X)$ و $I(W) = I(V) : I(X)$. (۵.۱.۵ از [۱۹] ملاحظه شود.) این همان چیزی است که پسکین و اسپیرو آن را پیوند جبری نامیدند.

تعریف ۴.۱.۱ فرض کنیم I و J دو ایده‌آل از حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی R باشند. گوییم I و J توسط R-رشته‌ی $\mathrm{x} = x_1, \ldots, x_c$ پیوند می‌خورند هرگاه $I = (\mathrm{x}) : J$ و $J = (\mathrm{x}) : I$. در این حالت می‌نویسیم $I \sim J$ یا $I \overset{\mathrm{x}}{\sim} J$. همچنین، گوییم I و J به طور هندسی پیوند می‌خورند هرگاه $I \sim J$ و $\mathrm{grade(I + J) > c}$.

مثال ۵.۱.۱

۱) هرگاه $\mathrm{x} = x_1, \ldots, x_c$ یک R-رشته باشد، آنگاه $(\mathrm{x}) : (\mathrm{x}) = (x_1^2, x_2, \ldots, x_c)$.

۲) فرض کنیم $S = k[x_0, x_1, x_2, x_3]$ حلقه‌ی چندجمله‌ها روی یک میدان k باشد. در این صورت،

$$(x_1, x_2) = (x_0x_1, x_2) : (x_0, x_2) \text{ و } (x_0, x_2) = (x_0x_1, x_2) : (x_1, x_2).$$

۳) با مفروضات (۲)، $(x_0, x_1) = (x_0x_1, x_0 + x_1) : (x_0, x_1)$.

لم زیر برخی از خواص اولیه‌ی پیوند را نشان می‌دهد.

لم ۶.۱.۱ فرض کنیم I و J دو ایده‌آل از حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی R باشند و $I \overset{\mathrm{x}}{\sim} J$. در این صورت،

۱) $\mathrm{Ass(R/I)} \cup \mathrm{Ass(R/J)} = \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$، بخصوص، I و J خالص هستند و $\mathrm{grade(I)} = \mathrm{grade(J)} = \mathrm{c}$. همچنین $\dim(R/I) = \dim(R/J)$.

۲) پیوند I و J هندسی است اگر و تنها اگر $I \cap J = (\mathbf{x})$.

برهان. فرض کنیم $I = (a_۱, \ldots, a_n)$ و همریختی $\varphi : R \longrightarrow (R/(\mathbf{x}))^n$ را با ضابطه‌ی $\varphi(r) = (ra_۱ + (\mathbf{x}), \ldots, ra_n + (\mathbf{x}))$، به ازای هر $r \in R$، تعریف می‌کنیم. به سادگی نتیجه می‌شود که $\ker\varphi = (\mathbf{x}) : I = J$. بنابراین $\mathrm{Ass(R/J)} \subseteq \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))^n} = \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$. به همین ترتیب $\mathrm{Ass(R/I)} \subseteq \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$، لذا، $\mathrm{Ass(R/I)} \cup \mathrm{Ass(R/J)} \subseteq \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$. اکنون نشان می‌دهیم $\mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))} \subseteq \mathrm{Ass(R/I)} \cup \mathrm{Ass(R/J)}$. بدین منظور $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$ را تثبیت می‌کنیم. چون $IJ \subseteq (\mathbf{x}) \subseteq \mathfrak{p}$، پس، $I \subseteq \mathfrak{p}$ یا $J \subseteq \mathfrak{p}$. فرض کنیم $I \subseteq \mathfrak{p}$. در این صورت $q \in \mathrm{Ass(R/I)}$ی یافت می‌شود به طوری که $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$. به علت خلوص $(\mathbf{x})$ و $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass(R/I)} \subseteq \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$ نتیجه می‌شود که $\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$. بنابراین $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass(R/I)}$. لذا، $\mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))} \subseteq \mathrm{Ass(R/I)} \cup \mathrm{Ass(R/J)}$. بنابراین، $\mathrm{Ass(R/I)} \cup \mathrm{Ass(R/J)} = \mathrm{Ass(R/(\mathbf{x}))}$. اکنون، چون $(\mathbf{x})$ خالص است، پس، I و J نیز خالص می‌شوند. بقیه‌ی احکام به راحتی بدست می‌آیند.
به منظور اثبات (۲)، با گذر به حلقه‌ی $R/(\mathbf{x})$ می‌توان فرض کرد که $(\mathbf{x}) = ۰$. بنابراین $J = ۰ : I$ و $I = ۰ : J$. لذا، $(I + J) : ۰ = I \cap J$. بنابراین، $\mathrm{grade(I + J)} > 0$ اگر و تنها اگر $I \cap J = ۰$. پس، پیوند I و J هندسی است اگر و تنها اگر $I \cap J = ۰$. □

بنابراین، یک ایده‌آل ناخالص نمی‌تواند با ایده‌آل دیگری پیوند داشته باشد. همچنین، بعد حلقه‌ی خارج قسمتی توسط یک ایده‌آل تحت پیوند حفظ می‌شود.
همان طور که مثال بالا نشان می‌دهد، می‌توان پیوند را برای وابسته کردن یک ایده‌آل جدید J به ایده‌آل داده شده‌ی I به کار برد که ساختاری به مراتب ساده‌تر از I داشته باشد. بدین منظور، بایستی روشی برای معرفی پیوند $J \sim I$ با شروع از I داشته

باشیم.
قضیه‌ی بعدی در [۲۳] بیان و اثبات شده است. برای راحتی خواننده اثبات آن را به تفصیل می‌آوریم.

قضیه ۷.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی گرنشتاین و I ایده‌آلی خالص از آن باشد به طوری که $\mathrm{gradeI} = \mathrm{c}$. فرض کنیم $\mathbf{x} = x_1, \ldots, x_c$ یک $R-$رشته باشد که $(\mathbf{x}) \subsetneqq I$. در این صورت، $(\mathbf{x}) : I \overset{\mathbf{x}}{\sim} I$.

برهان. با گذر به حلقه‌ی گرنشتاین $R/(\mathbf{x})$، قضیه را به حالتی کاهش می‌دهیم که در آن $(\mathbf{x}) = 0$. پس، فرض کنیم I ایده‌آلی با ارتفاع صفر در حلقه‌ی موضعی گرنشتاین R باشد. در این صورت، I و $0 : I$ به هم پیوند می‌خورند. بدین منظور، بایستی نشان دهیم که $0 : (0 : I) = I$. به سادگی ملاحظه می‌شود که $I \subseteq 0 : (0 : I)$. بنابراین، برای نشان دادن تساوی $0 : (0 : I) = I$، کافی است، برای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{AssR/I}$، ثابت کنیم $0 : (0 : I_{\mathfrak{p}}) = I_{\mathfrak{p}}$. بنابر فرض، به ازای چنین ایده‌آل اول $\mathfrak{p}$، $R_{\mathfrak{p}}$ حلقه‌ی موضعی گرنشتاین با بعد صفر است. بنابراین، ۳.۲.۱۵ از [۴] اثبات را کامل می‌کند. $\square$

با بررسی اثبات قضیه‌ی اخیر، به سادگی معلوم می‌شود که هرگاه در مفروضات قضیه گرنشتاین بودن R را با کوهن-مکالی بودن R و گرنشتاین بودن $R_{\mathfrak{p}}$، به ازای هر $\mathfrak{p} \in \mathrm{AssR/I}$، عوض کنیم دوباره حکم قضیه برقرار خواهد بود.
به منظور ساده کردن یک ایده‌آل با استفاده از پیوند، در حالت کلی، یک پیوند کافی نیست. ممکن است فرایند پیوند دادن تکرار شود و دنباله‌ای از پیوندها در نظر گرفته شود. ممکن است انتظار داشته باشیم تا این فرایند به یک ایده‌آل مقطع کامل ختم شود. گرچه، همیشه این فرایند این‌گونه ختم نمی‌شود.

تعریف ۸.۱.۱

۱) دو ایده‌آل I و J در یک کلاس پیوند (پیوند زوج) هستند هرگاه دنباله‌ای از پیوندهای $I = I_۰ \sim I_۱ \sim \cdots \sim I_n = J$ (با n زوج) موجود باشد.

۲) I یک ایده‌آل $licci$ است هرگاه I در کلاس پیوند یک ایده‌آل مقطع کامل باشد.

مثال ۹.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی باشد. همانند اثبات ۲۱.۲۲ از [۷] می‌توان دید که هر دو $R-$رشته با تعداد عناصر یکسان در یک کلاس پیوند قرار دارند.

در نظریه‌ی پیوند همواره سؤالات زیر مورد توجه است.

سؤال ۱. کدام خاصیت‌ها تحت پیوند پایا هستند؟ به عبارت دیگر، به ازای دو ایده‌آل پیوند خورده چه خاصیت‌هایی از یکی به دیگری منتقل می‌شود؟

سؤال ۲. به ازای دو ایده‌آل داده شده چه شرایطی لازم است تا آنها در یک کلاس پیوند یا به صورت ضعیفتر در یک کلاس پیوند زوج باشند؟

در مورد سؤال ۲ اطلاعات کمی در دست است. در مورد سؤال ۱ دو نتیجه در قضیه‌ی بعدی داده شده است که اولین بار توسط پسکین و اسپیرو در [۲۱] بیان و اثبات شده است. برای راحتی خواننده اثبات آن را به تفصیل می‌آوریم. به منظور بیان و اثبات قضیه‌ی بعدی تعریف زیر مورد نیاز است.

تعریف ۱۰.۱.۱ فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی باشد. $R-$مدول کوهن-مکالی ماکسیمال از نوع ۱ و با بعد انژکتیو متناهی را یک مدول متعارفی R می‌گوییم. در صورت وجود، آن را با ω_R نمایش می‌دهند.

برای کسب اطلاعات بیشتر در مورد مدول متعارفی به عنوان مثال می‌توان بخش ۳.۳ از [۴] را ملاحظه کرد.

قضیه ۱۱.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی گرنشتاین و I و J دو ایده‌آل از R باشند به طوری که $I \overset{\mathbf{x}}{\sim} J$. در این صورت،

۱) R/I کوهن-مکالی است اگر و تنها اگر R/J چنین باشد.

۲) $\omega_{R/I} \cong J/(\mathbf{x})$ و $\omega_{R/J} \cong I/(\mathbf{x})$.

برهان. با گذر به حلقه‌ی $R/(\mathbf{x})$ می‌توان فرض کرد که $(\mathbf{x}) = ۰$. پس، $J = ۰ : I \cong \mathrm{Hom_R(R/I, R) = (R/I)^*}$ که در آن $\mathrm{-^* = Hom_R(-, R)}$. به منظور اثبات (۱)، فرض کنیم که R/I کوهن-مکالی است و نشان می‌دهیم که $\mathrm{depth(R/J) \geq d}$ که در آن $d = \dim R$. چون R گرنشتاین و R/I کوهن-مکالی با بعد d است، پس، بنابر (۲) (d) ۳.۳.۱۰ از [۴]، $\mathrm{Ext^i_R(R/I, R) = 0}$ برای هر $i \neq ۰$. اکنون، فرض کنیم

$$\cdots \longrightarrow F_۲ \longrightarrow F_۱ \longrightarrow R \longrightarrow R/I \longrightarrow ۰$$

یک R-تحلیل آزاد برای R/I باشد. در این صورت،

$$۰ \longrightarrow (R/I)^* \longrightarrow R^* \longrightarrow F_۱^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_d^*$$

دقیق است. نگاشت $(R/I)^* \longrightarrow R^*$ را می‌توان با شمول طبیعی $J \hookrightarrow R$ جایگزین کرد. بنابراین، رشته‌ی دقیق

$$۰ \longrightarrow R/J \longrightarrow F_۱^* \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_d^*$$

حاصل می‌شود که آن نیز به نوبه‌ی خود نتیجه می‌دهد که $\mathrm{depth(R/J) \geq d}$. لذا اثبات (۱) به اتمام می‌رسد.

به منظور اثبات (۲) کافی است نشان دهیم که $\omega_{R/I} \cong J$. لیکن این نیز بنابر ۳.۳.۷ از [۴] به سادگی به دست می‌آید:

$$\omega_{R/I} \cong \mathrm{Ext^0_R(R/I, \omega_R) \cong Hom_R(R/I, R) \cong J.}$$

□

نتیجه ۱۲.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی گرنشتاین و I ایده‌آلی خالص از R باشد به طوری که

۱) $(\circ : I) \cap I = \circ$ و

۲) R/I کوهن-مکالی است.

در این صورت، $R/(\circ : I)$ کوهن-مکالی است.

برهان. هرگاه $(\circ : I) = \circ$، آنگاه حکم به سادگی به دست می‌آید. پس، می‌توان فرض کرد که $(\circ : I) \neq \circ$. در این صورت، $\mathrm{gradeI} = 0$. بنابراین، بنابر ۷.۱.۱ از همین رساله، $(\circ : I) \sim I$. اکنون حکم به سادگی از قضیه‌ی قبلی به دست می‌آید. $\square$

بنابراین، اگر R گرنشتاین باشد، خاصیت کوهن-مکالی تحت پیوند پایاست. پسکین و اسپیرو با ساختن مثالی جالب نشان دادند که در قضیه‌ی بالا فرض گرنشتاین قابل جایگزینی با فرض کوهن-مکالی نیست. بنابراین هرگاه R حلقه‌ی کوهن-مکالی باشد، ممکن است خاصیت کوهن-مکالی تحت پیوند حفظ نشود.

۲.۱.۱ ایده‌آل‌های کوهن-مکالی قوی

آرتین[۱] و ناگاتا[۲] در [۱] مفهوم مقطع مانده‌ای را مطرح کردند و قضیه‌ای را در آن مقاله در حالت کلی اثبات نمودند. لیکن، هونیکه با ساختن مثالی نقض در [۱۵] نشان داد که قضیه به آن صورتی که آنها بیان کردند درست نیست. هونیکه[۳] برای رفع این مشکل مفهومی بنام کوهن-مکالی قوی مطرح کرد و به صورتی درست از قضیه‌ی آرتین و ناگاتا دست یافت. در اینجا مختصری درباره‌ی این مفهوم بحث

[۱] Artin
[۲] Nagata
[۳] Huneke

می‌کنیم و ارتباط آن را با پیوند بیان می‌کنیم. برای معرفی این مفهوم به مانستگی همبافت کوزول نیاز است.

فرض کنیم $\mathbf{x} := x_1, \ldots, x_n$ دنباله‌ای از عناصر حلقه‌ی R باشد. همبافت کوزول R نسبت به دنباله‌ی $\mathbf{x}$ حاصل ضرب تانسوری همبافت‌های $0 \longrightarrow R \xrightarrow{x_i} R \longrightarrow 0$ است. i-امین مدول مانستگی این همبافت کلی با نماد $H_i(\mathbf{x}; R)$ نشان داده می‌شود. به منظور کسب اطلاعات و خواصی بیشتر در مورد همبافت کوزول و مانستگی آن خواننده می‌تواند به بخش ۱.۶ از [۴] مراجعه کند.

لم بعدی در [۱۴] بیان و اثبات شده است. برای راحتی خواننده اثبات آن را به تفصیل می‌آوریم.

لم ۱۳.۱.۱ فرض کنیم R یک حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی باشد. فرض کنیم I ایده‌آلی از R و $\mathbf{x} := x_1, \ldots, x_n$ مولدی برای I باشد. در این صورت، $\dim H_i(\mathbf{x}; R) = \dim(R/I)$ برای iهایی که $H_i(\mathbf{x}; R) \neq 0$.

برهان. بنابر خاصیت صلبی همبافت کوزول (برای مثال، ۱.۶.۳۱ از [۴] ملاحظه شود.)، $\mathrm{SuppH_{i+1}}(\mathbf{x}; \mathrm{R}) \subseteq \mathrm{SuppH_i}(\mathbf{x}; \mathrm{R})$ برای هر i. پس، هرگاه $\mathbf{y} := y_1, \ldots, y_m$ یک R-رشته‌ی ماکسیمال در داخل I باشد، آنگاه

$$\mathrm{SuppH_{n-m}}(\mathbf{x}; \mathrm{R}) \subseteq \cdots \subseteq \mathrm{SuppH_0}(\mathbf{x}; \mathrm{R}) = \mathrm{Supp(R/I)}.$$

لذا $\dim H_{n-m}(\mathbf{x}; R) \leq \dim H_i(\mathbf{x}; R) \leq \dim(R/I)$ به ازای هر $i = 0, \ldots, n-m$. همچنین می‌توان نوشت:

$$\dim H_{n-m}(\mathbf{x}; R) = \dim(\mathbf{y} : I)/(\mathbf{y}) = \dim R/(\mathbf{y} : (\mathbf{y} : I)).$$

پس، کافی است ثابت کنیم که $\dim R/(\mathbf{y} : (\mathbf{y} : I)) = \dim(R/I)$. در اثبات این تساوی نیز می‌توان حالتی را در نظر گرفت که در آن $(\mathbf{y}) = 0$، یعنی، فرض کنیم R حلقه‌ی موضعی کوهن-مکالی و I ایده‌آلی از R باشد به طوری که $\mathrm{gradeI} = 0$.