دانشگاه شهید باهنر کرمان

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض ـ جبر

عنوان:

برخی کلاس‌های ویژه گروه‌های nـ آبلی

مولف :

زهرا میدانی

استاد راهنما:

دکتر نصرت الله شجره پور صلواتی

شهریور ۹۲

این رساله به عنوان یکی از شرایط احراز درجه کارشناسی ارشد به

دانشکده ریاضی

دانشگاه شهید باهنر کرمان

تسلیم شده است و هیچ گونه مدرکی به عنوان فراغت از تحصیل دوره مزبور شناخته نمی‌شود.

دانشجو:

استاد راهنما:

داور ۱ :

داور ۲ :

نماینده تحصیلات تکمیلی در جلسه دفاع:

معاون آموزشی و پژوهشی دانشکده:

حق چاپ محفوظ و مخصوص دانشگاه شهید باهنر کرمان است

تقدیم به: پدر و مادر، همسر و فرزندم.

تشکر و قدردانی: سپاس خدایی را که به ما فکرت آموخت، لذت آموزش و یادگیری را به ما هدیه کرد و همواره دانایانی را راهنمای انسان‌ها قرار داد. از باب من لم یشکر المخلوق، لم یشکر الخالق، از زحمات و راهنمائیهای ارزشمند و بی شائبه استاد گران‌مایه و فرهیخته‌ام، جناب آقای دکتر نصرت الله شجره پور صلواتی تشکر و قدردانی می‌کنم.

چکیده

فرض کنید n عدد صحیح باشد و G یک گروه و $\varphi_n : G \to G$ با ضابطه $\varphi_n(x) = x^n$ باشد. اگر φ_n همریختی باشد، گروه G را $n-$آبلی و اگر φ_n تکریختی (بروریختی) باشد، آنگاه G را از رده B_n (C_n)، به ترتیب، می‌نامیم. در این پایان نامه گروه‌های $n-$آبلی را مطالعه کرده و یک مشخصه سازی برای گروه‌های واقع در B_n یا C_n ارائه می‌دهیم. همچنین یک توصیف حسابی از مجموعه همهٔ اعداد صحیح n به طوری که G در $U_n = B_n \cap C_n$ باشد، ارائه می‌دهیم.

فهرست مطالب

پیشگفتار

از مباحث اصلی وبنیادی در نظریه گروه‌ها، بحث گروه‌های آبلی می‌باشد و بدین جهت تعمیم‌های مختلفی از مفهوم گروه‌های آبلی ارائه شده است. یکی از این تعمیم‌ها مفهوم گروه‌های nـآبلی می‌باشد که اولین بار توسط لِوِی[۱] در سال ۱۹۴۴ ارائه شد [۷]. سپس مطالعات مختلفی روی گروه‌های nـآبلی صورت گرفت به ویژه اینکه سعی شد نتایجی را که در مورد گروه‌های آبلی برقرار می‌باشند را به گروه‌های nـآبلی تعمیم دهند. برخی از این نتایج توسط بائر[۲] در سال ۱۹۵۳ به دست آمدند[۵]. آلپرین[۳] در ۱۹۶۹ [۴] یک توصیف از pـ گروه‌های متناهی و pـآبلی ارائه داده است. آلپرین در ۱۹۶۹ [۴] نتایجی در مورد رده‌بندی و ساختار گروه‌های nـآبلی ارائه داد.

همچنین سعی شد رده‌های خاصی از گروه‌های nـآبلی معرفی گردد که بدین ترتیب رده‌های B_n، C_n و U_n تعریف و مطالعه شدند که برخی از این مطالعات توسط شنکمن[۴] در ۱۹۵۸ [۹]، تروتر در ۱۹۶۵ [۱۰] و مک هال[۵] در ۱۹۷۴ [۸] صورت گرفت. بررسی رده‌ها و شناخت

[۱] Levi

[۲] Baer

[۳] Alperin

[۴] Shenkman

[۵] Machale

ساختار و دسته‌بندی آنها ادامه پیدا کرد که به عنوان نمونه به [۶] و [۳] ارجاع داده می‌شود.

در این پایان نامه برخی از این مطالعات انجام شده روی گروه‌های nـآبلی و رده بندی B_n، C_n و U_n بررسی شده و نتاجی در مورد ساختار گروه‌های واقع در این رده‌ها مطالعه می‌شوند. سازمان این پایان نامه به شرح زیر است:

در فصل اول، برخی پیشنیازها و مقدمات مورد نیاز برای فصول بعد بیان خواهند شد.

در فصل دوم، گروه‌های nـآبلی تعریف شده و برخی خواص و رده‌هایی از آنها مشخص گردیده‌اند. در ادامه نتایجی در باره ساختار این گروه‌ها بیان می‌شود. نتایج اصلی این فصل از مقالات[۳]، [۴] و [۵] می‌باشد.

در فصل سوم رده‌های B_n، C_n و U_n از گروه‌های nـآبلی معرفی می‌شود. برای اینکار، ابتدا برخی خواص این رده‌ها بررسی شده و سپس نتایجی در باره ساختار گروه‌های واقع در $B_n \cup C_n$ بیان می‌شود. مطالب اصلی این فصل از مراجع [۳]، [۸، ۹، ۱۰] می‌باشد.

در فصل چهارم به یک توصیف حسابی از گروه‌های واقع در ردهٔ $U_n = B_n \cap C_n$ پرداخته که این مطلب از [۶] می‌باشد.

فصل ۱

پیشنیازها و مقدمات

در این فصل به معرفی مفاهیم و نتایجی می‌پردازیم که در فصول بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مطالعه بیشتر خواننده را به [۱، ۲] ارجاع می‌دهیم.

- یک مجموعه ناتهی S همراه با یک عمل دوتایی * که شرکت‌پذیر است، نیم‌گروه نام دارد. نیم‌گروه S با عمل دوتایی * را با $(S, *)$ نشان می‌دهیم و اگر عمل مشخص باشد به طور خلاصه آنرا با S نشان می‌دهیم. عمل * روی S را عمل ضرب روی S نیز می‌نامیم. به عنوان مثال مجموعه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$، همراه با عمل ضرب روی آن یک نیم گروه می‌باشد.

فرض کنید $(S, *)$ یک نیم‌گروه باشد، یک زیر نیم‌گروه S یک زیرمجموعه مانند T است که با عمل $*$ روی آن یک نیم‌گروه باشد. در واقع $T \subseteq S$ یک زیر نیم‌گروه است هر گاه تحت عمل $*$ بسته باشد. به عنوان مثال مجموعه اعداد طبیعی $\mathbb{N}$ با عمل ضرب روی آن

یک نیم‌گروه اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ است.

فرض کنید $(S,*)$ یک نیم‌گروه و $A\subseteq S$ باشد. زیر نیم‌گروه تولید شده توسط A عبارتست از مجموعه همه حاصل‌ضرب‌های متناهی اعضای A. یعنی عبارتست از مجموعه زیر

$$\{x_1*x_2*...*x_n|x_1,...,x_n\in A, n\in \mathbb{N}\}$$

- نیم‌گروهی را که دارای عنصر همانی باشد و وارون هر عنصر تحت عمل دوتایی موجود باشد، یک گروه می‌نامیم. به عنوان مثال $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ مجموعه اعداد حقیقی ناصفر با عمل ضرب گروه می‌باشد. زیر مجموعه ناتهی H از G یک زیر گروه می‌نامند اگر H با عمل دوتایی روی G یک گروه تشکیل دهد. اگر H یک زیرگروه G باشد، می‌نویسیم $H\leq G$. به عنوان مثال $(\mathbb{Z},+)$ یک زیرگروه $(\mathbb{R},+)$ است. گروه G را آبلی یا تعویض‌پذیر می‌نامیم هر گاه به ازای هر $x,y\in G$ داشته باشیم $xy=yx$. گروه‌های جمعی $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ آبلی می‌باشند. اما گروه خطی عام ماتریس‌های 2×2 روی میدان $\mathbb{R}$
$$GL_2(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4\end{pmatrix}|a_1,a_2,a_3,a_4\in\mathbb{R}, a_1a_4-a_2a_3\neq 0\right\}$$
با ضرب معمولی ماتریس‌ها، یک گروه غیر آبلی می‌باشد.

- فرض کنید G یک گروه باشد. مرکز گروه G را با $Z(G)$ نشان داده و عبارت است از:

$$Z(G)=\{y\in G|xy=yx,\ x\in G\text{به ازای هر}\}$$

به وضوح $Z(G)$ یک زیرگروه آبلی G است.

- گروه G را تابدار می‌گوییم هرگاه هر عضو آن مرتبه متناهی داشته باشد. اگر هر عضو G غیر از عضو همانی e مرتبه نامتناهی داشته باشد آنگاه گروه G را بدون تاب می‌نامیم. به عنوان مثال هر گروه متناهی گروهی تابدار است. گروه‌های جمعی $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Q}$ بدون تاب می‌باشند. بخش تابدار یک گروه عبارتست از مجموعه همه اعضایی از G که دارای مرتبه متناهی هستند و با $T(G)$ نشان داده می‌شود.

- گروه آبلی G بخش‌پذیر است هرگاه به ازای هر عدد صحیح مثبت n و هر $x \in G$ عضو $y \in G$ وجود داشته باشد بطوری‌که $ny = x$. به ازای یک عدد اول p، گروه آبلی G، pـ بخش‌پذیر است هرگاه به‌ازای هر $x \in G$ عضو $y \in G$ موجود باشد بطوریکه $py = x$. به عنوان مثال گروه جمعی $\mathbb{Q}$ هم pـ بخش‌پذیر و هم nـ بخش‌پذیر است اما $\mathbb{Z}$ بخش‌پذیر نیست.

- فرض کنید G یک گروه و S زیرمجموعه ای از آن باشد. اشتراک تمام زیرگروه‌های H از G به طوری که $S \subseteq H$، زیرگروه تولید شده به وسیله S نامیده می‌شود و با $< S >$ نشان داده می‌شود. اگر $G =< S >$، آنگاه S را یک مجموعه مولد برای G نامند. هرگاه S تک عضوی باشد G را دوری می‌نامند.

- فرض کنید N یک زیرگروه، گروه G باشد. N یک زیرگروه نرمال G نامیده می‌شود اگر به ازای هر $x \in G$ و هر $n \in N$داشته باشیم$xnx^{-1} \in N$. به وضوح $Z(G)$ یک زیرگروه نرمال G است.

اگر N یک زیرگروه نرمال گروه G باشد آنگاه مجموعه خارج‌قسمتی $\frac{G}{N}$ تشکیل گروه می‌دهد.

- فرض کنید G یک گروه باشد و $x, y \in G$، در این صورت عنصر $x^{-1}y^{-1}xy$ را که به صورت $[x, y]$ نشان می‌دهیم جابجاگر عناصر x و y می‌نامیم.

زیرگروه تولید شده توسط جابجاگرها را زیرگروه مشتق G نامیده و با G' نشان می‌دهیم.

اگر N زیرگروه نرمالی از G و $\frac{G}{N}$ آبلی باشد آنگاه $G' \subseteq N$. بنابراین $\frac{G}{G'}$ بزرگترین گروه خارج قسمتی آبلی G است.

- فرض کنید $\{G_i | 1 \leq i \leq n\}$ خانواده‌ای از گروه‌ها باشد. همچنین فرض کنید:

$$G = G_1 \times G_2 \times ... \times G_n$$

با عمل دوتایی زیر، مجموعه G ، یک گروه می‌باشد که آن را حاصلضرب خارجی $G_1, ..., G_n$ می‌نامیم.

$$(x_1, x_2, ..., x_n)(y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1y_1, x_2y_2, ..., x_ny_n)$$

به ازای هر $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in G$

اگر G حاصلضرب مستقیم زیرگروه‌های H و K خود باشد داریم $\frac{G}{K} \cong H$ و $\frac{G}{H} \cong K$

- فرض کنید F یک گروه، X یک مجموعه و $\theta : X \to F$ تابعی باشد. در این صورت (F, θ) را بر X آزاد گوییم هرگاه به ازای هر گروه مانند G و هر تابع $\alpha : X \to G$ یک

همریختی منحصربه فرد مانند $\beta : F \to G$ موجود باشد به‌طوریکه $\alpha = \theta\beta$.

گروه F را بر X آزاد گوییم درصورتیکه تابعی مانند $\theta : X \to F$ موجود باشد به‌طوریکه (F, θ) بر X آزاد باشد. گروه F را یک گروه آزاد گوییم هرگاه بر مجموعه‌ای آزاد باشد.

در [۲] نشان داده شده است که هر گروه تصویر همریخت یک گروه آزاد است.

اگر F گروهی آزاد باشد می‌دانیم $\frac{F}{F'}$ گروهی آبلی است، پس $\frac{F}{F'}$ گروهی آبلی آزاد و بی تاب است.

فصل ۲

گروه‌های n_آبلی

۱.۲ مقدمه

گروه‌های آبلی از مفاهیم بنیادی در نظریه گروه‌ها می‌باشند و به همین جهت سعی شده است که تعمیم‌های گوناگونی از آنرا معرفی کنند. یکی از این تعمیم‌ها گروه‌های n_آبلی می باشند که در [۷] معرفی شدند و سپس مطالعات مختلفی روی این گروه‌ها و تعیین ساختار آنها انجام گرفت که به عنوان نمونه به [۳، ۴، ۵] ارجاع داده می‌شود. در این فصل ابتدا گروه‌های n_آبلی را به عنوان تعمیمی غیر بدیهی از گرههای آبلی معرفی کرده [به عنوان مثال اگر G به ازای سه عدد متوالی $m = i, i+۱, i+۲$، m_آبلی باشد آنگاه G، گروهی آبلی است.] و سپس به بررسی برخی از نتایج مربوط به این گروه‌ها می‌پردازیم.

۲.۲ تعریف و مثال‌ها

اگر G یک گروه آبلی باشد، آنگاه به ازای هر عدد صحیح n و به ازای هر $x, y \in G$ داریم $(xy)^n = x^n y^n$ یا به طور معادل به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، نگاشت $\varphi_n : G \to G$ با ضابطه $\varphi_n(x) = x^n$ یک درونریختی است [با استقرا به آسانی ثابت می‌شود].

اگر G یک گروه و n عددی صحیح باشد به طوری که نگاشت $\varphi_n : G \to G$ با ضابطه $\varphi_n(x) = x^n$ یک درونریختی باشد، آنگاه لزومی ندارد که G یک گروه آبلی باشد، که این مطلب را در مثال‌های بعد بررسی می‌کنیم.

مثال ۱.۲.۲. فرض کنید $S = \{۱, ۲, ۳\}$ و مجموعه $S_۳$ را به عنوان مجموعه همه توابع یک به یک و پوشا از S به S در نظر بگیرید. در این صورت $S_۳$ با عمل ترکیب توابع یک گروه تشکیل می‌دهد که آنرا گروه جایگشت $S_۳$ می‌نامیم. $S_۳$ گروهی غیرآبلی است که $|S_۳| = ۶$. بنابراین به ازای هر $\alpha \in S_۳$ داریم $\alpha^۶ = e$. در این صورت به ازای هر $\alpha, \beta \in S_۳$ و به ازای $n = ۶$ داریم.

$$(\alpha\beta)^۶ = e = \alpha^۶\beta^۶$$

یعنی نگاشت $\varphi_۶ : S_۳ \to S_۳$ با ضابطه $\varphi_۶(\alpha) = \alpha^۶$ یک درونریختی است. همچنین $\varphi_{۱۳}$ نیز درونریختی است. زیرا برای هر $x \in S_۳$ داریم: $x^{۱۳} = x^{۱۲}x = x$ بنابراین

$$(xy)^{۱۳} = (xy)^{۱۲}(xy) = (xy) = x^{۱۳}y^{۱۳}$$

اکنون به مثال دیگری توجه می‌کنیم. فرض کنید G گروه تولید شده توسط s, t باشد یعنی

$G = \langle s, t \rangle$ به طوریکه $s^3 = t^2 = (st)^2$.

با فرض $z = st^2$ می‌توان نتیجه گرفت $G =< z, t | z^3 = t^4 = e, tzt^{-1} = z^{-1} >$. زیرا

$$s^3 = t^2 = stst \Rightarrow \begin{cases} s^2 = tst & * \\ t = sts & ** \\ t^2 = stst & *** \end{cases}$$

نشان می‌دهیم $t^4 = z^3$

$$t^4 = t^2t^2 \overset{*}{=} (stssts)t^2 = stsst(st^2) = (sts)stz \overset{**}{=} (tst)z \overset{*}{=} s^2z$$

زیرا $s^2 = z^2$

$$s^2 \overset{*}{=} tst \overset{**}{=} (sts)st = sts^2t \overset{*}{=} st(tst)t = st^2st^2 = zz = z^2$$

بنابراین

$$t^4 = s^2z = z^2z = z^3.$$

حال ثابت می‌کنیم $t^4 = z^3 = e$

$$t^4 = z^3 = (st^2)^3 = st^2st^2st^2 \Rightarrow t^4 = st^2st^2st^2 \to t^2 = st^2st^2s$$

بنا به فرض داریم $s^3 = t^2$ پس

$$s^3 = t^2 = st^2st^2s$$

با حذف یک s از سمت راست و یک s از سمت چپ داریم

$$s = t^{۲}st^{۲} = s^{۳}st^{۲} = s^{۴}t^{۲} \Rightarrow s^{۳}t^{۲} = e$$

چون $s^{۳} = t^{۲}$ پس $s^{۳}t^{۲} = t^{۴} = e$. پس $t^{۴} = z^{۳} = e$.

همچنین چون $z^{۳} = e$ پس $z^{-۱} = z^{۲} = s^{۲}$

$$z^{-۱} = s^{۲} \overset{*}{=} tst = t(stt)t^{-۱} = tst^{۲}t^{-۱} = tzt^{-۱}$$

حال نشان می‌دهیم $G = \langle s, t\rangle = \langle z, t\rangle$. به وضوح $\langle z, t\rangle \leq \langle s, t\rangle$ و چون $zt^{۲} = st^{۴} = se = s$ پس $\langle s, t\rangle \leq \langle z, t\rangle$ بنابراین

$$G = \langle s, t\rangle = \langle z, t\rangle$$

در این صورت به سادگی می‌توان بررسی کرد G یک گروه از مرتبه ۱۲ است و غیر آبلی است چون $tzt^{-۱} = z^{-۱}$. نشان می‌دهیم نگاشت $\varphi : G \to G$ با ضابطه $x \mapsto x^{۷}$ یک همریختی است. یعنی باید نشان دهیم $\forall x, y \in G\ (xy)^{۷} = x^{۷}y^{۷}$. کافی است نشان دهیم $(z^{\alpha}t^{\beta})^{۷} = (z^{\alpha})^{۷}(t^{\beta})^{۷}$.

چون $t^{۴} = ۱$ پس β یکی از اعداد ۰, ۱, ۲ یا ۳ است. اگر $\beta = ۰$ باشد آنگاه به وضوح φ همریختی است. اگر $\beta = ۱$ داریم

$$(z^{\alpha}t)^{۷} = z^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t$$

$$= z^{\alpha}z^{-\alpha}ttz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t \qquad (\text{چون } tz = z^{-۱}t)$$

$$= t^{۲}z^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t$$

$$= z^{\alpha}t^{3}z^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t$$

$$= t^{3}tz^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t = t^{4}z^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t$$

$$= z^{\alpha}tz^{\alpha}tz^{\alpha}t$$ (چون $t^{4} = e$)

$$= ttz^{\alpha}t = t^{2}z^{\alpha}t = z^{\alpha}t^{3}$$

$$(z^{\alpha})^{7}t^{7}$$ (چون $t^{4} = e$ و $z^{3} = e$)

پس ثابت شده $(z^{\alpha}t)^{7} = (z^{\alpha})^{7}t^{7}$.

حال اگر $\beta = 2$ باشد

$$(z^{\alpha}t^{2})^{7} = z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}$$

$$= z^{2\alpha}t^{4}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}$$ (چون $tz = z^{-1}t$)

$$= z^{\alpha}t^{4}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2} = z^{2\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}z^{\alpha}t^{2}$$ (چون $t^{4} = 1$)

$$= z^{3\alpha}t^{4}z^{\alpha}t^{2} = z^{\alpha}t^{2} = (z^{\alpha})^{7}(t^{2})^{7}$$

زیرا $(t^{2})^{7} = t^{14} = t^{12}t^{2} = t^{2}$

به همین ترتیب برای $\beta = 3$ ثابت می‌شود $(z^{\alpha}t^{3})^{7} = (z^{\alpha})^{7}(t^{3})^{7}$. بنابراین φ_{7} همریختی است. این نگاشت بدیهی نیست زیرا $t^{7} = t^{8}t^{-1} = t^{-1}$.

با توجه به این مثال، تعمیمی از گروه‌های آبلی تحت عنوان گروه‌های nـآبلی به دست می‌آید که غیر بدیهی می‌باشد. این تعریف به صورت زیر است:

تعریف ۲.۲.۲. فرض کنید G یک گروه و n یک عدد صحیح باشد. گروه G، n_آبلی نامیده می‌شود هرگاه نگاشت $\varphi_n : G \to G$ با ضابطه $\varphi_n(x) = x^n$ یک درونریختی باشد یا به طور معادل به ازای هر $x, y \in G$ داشته باشیم $(xy)^n = x^n y^n$.

هر گروه آبلی به ازای هر $n \in \mathbb{Z}$، n_آبلی است و بنابر مثال ۱.۲.۲ ، S_3 یک گروه ۶_آبلی است. همچنین هر گروه ۰ , ۱_آبلی است.

توجه شود که مثال ۱.۲.۲ ما را به رده‌ای از گروه‌ها راهنمایی می‌کند که n_آبلی می‌باشند. برای ذکر این رده از گروه‌ها نخست تعریف زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳.۲.۲. فرض کنید G یک گروه باشد به طوری که ازای یک عدد صحیح مثبت n و به ازای هر $x \in G$ رابطه $x^n = e$ برقرار باشد. در این صورت میگوییم G دارای نمایه است و نمایه G را که با $\exp\ G$ نشان می‌دهیم، عبارتست از کوچکترین عدد صحیح مثبت m به طوری که به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم $x^m = e$.

با توجه به تعریف هر گروه دارای نمایه، تابدار است و هر گروه متناهی G دارای نمایه است. به ازای هر گروه متناهی G، $\exp\ G$ مرتبه G را عاد می‌کند. همچنین اگر یک گروه G دارای نمایه باشد آنگاه به ازای هر $x \in G$، مرتبه x یعنی $o(x)$، عدد $\exp\ G$را عاد می‌کند. توجه شود که اگر $\exp\ G = 1$ آنگاه $G = \{e\}$ و اگر $\exp\ G = 2$ آنگاه G آبلی است (زیرا برای هر $x, y \in G$ از رابطه $x^2 = e$ نتیجه می‌شود که $x = x^{-1}$ بنابراین $(xy)^{-1} = xy$ لذا $y^{-1}x^{-1} = (xy) = (xy)^{-1}$ بنابراین چون $x = x^{-1}, y = y^{-1}$ پس $xy = yx$) در مثال