دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

دنباله نرخ‌های نزول در فرآیندهای QBD دو طرفه

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آمار ریاضی)

سیده سمیه چاشیانی

استاد راهنما

دکتر صفیه محمودی

۱۳۹۰

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آمار ریاضی) خانم سیده سمیه چاشیانی

تحت عنوان

دنباله نرخ‌های نزول در فرآیندهای QBD دو طرفه

در تاریخ ۱۳۹۰/۶/۲۲ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱ــ استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر صفیه محمودی
۲ــ استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر مهدی مهدوی
۳ــ استاد داور ۱	دکتر افشین پرورده (دانشگاه اصفهان)
۴ــ استاد داور ۲	دکتر سعید پولادساز

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده   دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده

به طور کلی در فرآیندهای مارکوف ارگودیک دو بعدی یافتن فرم بسته‌ی توزیع ایستا، تنها برای حالات خیلی خاص امکان‌پذیر است. با توجه به این مشکل و نیز با توجه به اهمیت توزیع ایستا، بررسی و مطالعه‌ی رفتار مجانبی توزیع این مدل‌ها مورد توجه قرار گرفته است. زنجیر قدم زدن تصادفی دو بعدی که در برخی متون به آن فرآیند QBD دو طرفه نیز می‌گویند، یکی از این فرآیندها است. یک فرآیند QBD زمان گسسته یک زنجیر مارکوف دو بعدی است. اولین متغیر را طبقه و دومین متغیر را فاز می‌نامند و ماتریس احتمال انتقال آن دارای ساختار سه قطری بلوکی است (انتقال در جهت طبقه پرش آزاد است). در صورتی که متغیر فاز نیز دارای خاصیت پرش آزاد باشد، زنجیر یک فرآیند QBD دو طرفه است. هدف ما در این پایان‌نامه بررسی روش‌های به دست آوردن مجانب‌های دقیق و نرخ‌های نزول سخت توزیع ایستای این زنجیر در جهت‌های مختصات و همچنین توزیع‌های کناری آن بر اساس مقاله میازاوا [۳۳] است. برای این منظور، با استفاده از روش‌های تحلیل ماتریسی، نمایش هندسی—ماتریسی توزیع ایستای زنجیر بررسی شده و با استفاده از توابع مولد گشتاور و احتمالات انتقال یک مرحله‌ای نرخ‌های نزول به دست آمده است. در نهایت از این نتایج برای به دست آوردن نرخ‌های نزول شبکه جکسون دو گره‌ای و اصلاح یافته آن به عنوان مثال‌های مورد توجه در نظریه صف استفاده می‌شود.

رده‌بندی موضوعی: ۶۰K۲۵، ۹۰B۲۵

کلمات کلیدی: فرآیند شبه زاد و مرگ، توزیع ایستا، نرخ نزول سخت، مجانب‌های دقیق، قدم زدن تصادفی بازتابی، پرش آزاد.

فصل ۱

مقدمه

۱—۱ مقدمه

امروزه مطالعه و بررسی علمی سیستم‌های مختلف صف به منظور شناخت و بهبود عملکرد آن‌ها یک امر لازم در روند سریع پیشرفت‌های صنعتی، اقتصادی و خدماتی است. از آن جا که فرآیند تصمیم گیری پیچیده است لذا شناخت و احاطه‌ی بیشتر نسبت به رفتار تحلیلی سیستم تحت شرایط گوناگون، مهندسین و طراحان سیستم را در امر پیش بینی رفتار سیستم در آینده یاری می‌دهد. فرآیند شبه زاد و مرگ یا QBD یکی از فرآیندهایی است که در تحلیل و مدل‌سازی بسیاری از سیستم‌های صنعتی مورد استفاده قرار می‌گیرد و به همین دلیل توجه زیادی را به خود معطوف ساخته است. در این پایان نامه به مطالعه و بررسی حالت خاصی از این فرآیند پرداخته شده است. یک فرآیند شبه زاد و مرگ زمان گسسته یک زنجیر مارکوف دو بعدی است که ماتریس احتمال انتقال آن دارای ساختار سه قطری بلوکی است. اولین متغیر فرآیند QBD، طبقه و دومین متغیر، فاز گفته می‌شود. خصوصیات فرآیندهای QBD با تعداد فازهای متناهی به طور گسترده‌ای مطالعه شده است. برای مثال نیوتس [۳۷] و لاتوش و رامازوامی [۲۵] این فرآیند را با تعداد متناهی فاز مورد مطالعه قرار داده‌اند. برای یک فرآیند QBD بازگشتی مثبت با تعداد فازهای متناهی، توزیع ایستا در جهت طبقه به طور هندسی نزول می‌یابد (وقتی طبقه افزایش می‌یابد). همچنین ثابت شده است که نرخ نزول این توزیع، شعاع همگرایی ماتریس نرخ نیوتس (ماتریس R) است و به طور اکید از یک کمتر است.

برای مدل‌های دو بعدی که تعداد فاز و طبقه، هر دو، نامتناهی باشد، محاسبه توزیع‌های احتمال ایستای دقیق بسیار مشکل است. برای مثال روش انحرافی توسط آدان [۴] برای محاسبه توزیع احتمال توأم یک کلاس ویژه‌ای از فرآیندهای دو بعدی معرفی شده است. ولی این روش برای صف دو مرحله‌ای بررسی شده توسط هاکو و همکاران [۱۷] نمی‌تواند مورد استفاده قرار بگیرید. به دلیل این مشکلات و همچنین بنا به اهمیت توزیع ایستا، تجزیه و تحلیل رفتارهای دم (دنباله) توزیع ایستا در جهت طبقه و یا فاز، مورد توجه قرار گرفته است.

به عنوان یک مثال از فرآیندهای QBD، یک فرآیند قدم زدن تصادفی پرش آزاد در دو بعد با مرز بازگشت در محورهای مختصات را در نظر بگیرید. در این پایان‌نامه رفتار مجانبی این زنجیر در دو جهت مثبت محورهای مختصات بررسی شده است. بنابراین فضای وضعیت این زنجیر به صورت زیر می‌باشد:

$$S \;=\; \mathbb{Z}_+^{۲} = \{۰, ۱, ۲, \ldots\} \times \{۰, ۱, ۲, \ldots\}$$

یکی از جهت‌ها به عنوان طبقه و دیگری به عنوان فاز نام برده شده است. این زنجیر را به عنوان یک فرآیند QBD زمان گسسته با تعداد فاز نامتناهی در نظر بگیرید. با توجه به اینکه انتقال در جهت فاز نیز تنها به یکی از دو فاز مجاور و یا به همان فاز مجاز است، این زنجیر یک فرآیند QBD دو طرفه است. حداقل دو دلیل وجود دارد که چرا QBDها مورد توجه هستند:

۱) فرآیند QBD دارای ساختار انتقال ساده‌تری است در حالی که شامل گروه بزرگی از مدل‌های صف است، مخصوصاً وقتی که مشتری‌ها به تنهایی وارد و خارج می‌شوند و در مقایسه با روش‌های دیگر، برای به دست آوردن نرخ نزول در بعضی کاربردها، تنها به یک سری محاسبات پایه‌ای و ساده نیاز است.

۲) این فرآیند با روش تحلیل ماتریسی نتایج بیشتری را به دست می‌دهد.

این ویژگی‌های QBD باعث شده است که برای مطالعه نرخ نزول دنباله، از این فرآیند استفاده شود.

یکی از اهداف این پایان‌نامه به دست آوردن مجانب‌های دقیق و نرخ نزول توزیع ایستا است.

مسائل نرخ نزول در صف‌ها به طور گسترده‌ای در تحقیقات مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و این به دلیل اهمیت آن بوده است. از روش‌ها و رهیافت‌های معروف در این زمینه می‌توان به نظریه‌ی انحرافات بزرگ[۸، ۱۱] اشاره کرد. این نظریه، زمانی بسیار مفید است که زمان‌های ورود مشتری‌ها کاملاً به هم وابسته باشند. هر چند در رابطه با این نظریه دو مشکل وجود دارد:

۱) این نظریه فقط نزول نمایی را به دست می‌دهد.

۲) ممکن است کاربرد این نظریه برای مطالعه‌ی دنباله‌ی توزیع‌های چند بعدی در شبکه‌های صف مشکل باشد و این به خاطر این است که رفتار این سیستم‌ها در مرز فضاهای وضعیت‌شان متفاوت است.

مسائل نرخ نزول برای زنجیرهای همگن N—جزئی (که کلی‌تر از قدم زدن تصادفی دو بعدی است) توسط بروکوف [۸] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. در مطالعه‌ی این گونه از زنجیرها از نظریه‌ی انحرافات بزرگ استفاده شده است. همچنین مجانب های دقیق و سخت (غیر دقیق) در همه‌ی جهت ها برای زنجیر همگن ۰—جزئی که فرآیند شبه زاد و مرگ دو طرفه حالت خاصی از آن است نیز بررسی شده‌اند، اما نرخ نزول حتی برای این حالت خاص نیز به طور واضح مشخص نشده است. در این پایان‌نامه این مسائل به روشی متفاوت از نظریه انحرافات بزرگ که در بسیاری از نوشته‌ها مورد استفاده قرار گرفته است[۲۰ ،۸]، یعنی روش تحلیلی ماتریسی و با استفاه از توابع مولد گشتاور بررسی خواهد شد. همچنین رفتار مجانبی توزیع ایستای آن در جهت‌های مختصات بررسی شده است و این باعث می‌شود که بتوان از ساختار هندسی توزیع ایستا که در متون روش تحلیلی ماتریسی به آن نمایش هندسی—ماتریسی گفته می‌شود، استفاده کرد. از این‌رو توزیع ایستا مستقیماً بررسی می‌شود.
روش‌های تحلیلی ماتریسی به ابزار مدل سازی معروف هستند. به این دلیل که، این روش‌ها توانایی ساخت و تحلیل یک کلاس وسیعی از مدل‌های تصادفی را ایجاد می‌کنند. این روش‌ها در چندین حوزه کاربرد دارد که تجزیه و تحلیل سیستم‌های مخابراتی در حال حاضر پرکاربردترین آن‌هااست.
در این پایان‌نامه بر اساس مقاله میازاوا[۳۳]، طیف کامل ماتریس نرخ برای نمایش هندسی—ماتریسی به دست آمده و نرخ‌های نزول به عنوان یک جواب مسأله بهینه‌سازی مشخص شده‌اند و مجانب‌های دقیق و سخت به کمک تفسیر گرافیکی طیف به دست می‌آیند. این کار تنها با استفاده از داده‌های اولیه مدل، برای مثال، احتمالات انتقال یک مرحله‌ای انجام می‌گیرد. به کمک این روش نه تنها با فرضیات ضعیف‌تر مسأله‌ی نرخ نزول برای این فرآیند حل خواهد شد بلکه می‌توان مجانب‌های دقیق و سخت توزیع‌های کناری را نیز به دست آورد. در اصل برای این کار از حل یک معادله بهینه‌سازی برحسب تابع مولد گشتاور فرآیند استفاده شده است و جواب این معادله نرخ نزول سخت فرآیند است.
در متون نظریه‌ی انحرافات بزرگ، مسأله نرخ نزول به صورت قابل ملاحظه‌ای بررسی شده است. برای مثال، انحرافات بزرگ مسیر نمونه‌ای گفته شده برای توزیع ایستای یک فرآیند بازتابی چند بعدی زمان پیوسته، معرفی شده است [۲۸]. یک نظریه‌ی کلیدی در حل مسأله‌ی نرخ نزول در دو بعد، چگونگی ترکیب تأثیر مرزی برای به دست آوردن یک جواب صحیح است. رهیافت انحرافات بزرگ این مسأله را به پیدا کردن یک مسیر بهینه که هزینه در طول آن می‌نیمم می‌شود، کاهش می‌دهد. به جای این کار ما به طور همزمان تأثیرات دو وجه مرزی را برای به دست آوردن یک مسأله بهینه‌سازی دیگر بررسی

می‌کنیم و این متناظر با این است که در رهیافت انحرافات بزرگ، مسیر بهینه چگونه انتخاب شود. برای مثال مطالعات اخیر [۷، ۲۷، ۱۸، ۳۵] بر روی QBDهای زمان گسسته و فرآیندهای $GI/G/1$ با تعداد فازهای نامتناهی شرایط قوی‌تری برای بررسی تأثیر مرز فرض کرده‌اند. توضیح اینکه، هاکو و همکاران در سال ۲۰۰۵ در [۱۸] شرایط کافی برای اینکه بردار احتمال ایستای یک فرآیند QBD با تعداد فازها و طبقات نامتناهی به‌طور هندسی نزول بیابد را به وسیله‌ی z^{-1} و بردار چپ و z−پایای ماتریس نرخ R $(\mathbf{x})$ مشخص کرده‌اند.

میازاوا و زائو [۳۵] رفتارهای مجانبی دنباله احتمالات ایستای یک صف $GI/G/1$ گسسته با تعداد فاز نامتناهی را بررسی کرده‌اند. آن‌ها نرخ نزول را در حالت دم−سبک و مخصوصاً در حالتی که دنباله احتمالات به‌طور هندسی نزول می‌یابد، تعیین کرده‌اند. این مطالعه به وسیله نمونه جمعی مارکوف میازاوا [۳۰] که استفاده از فرآیندهای جمعی مارکوف یک بعدی را در مطالعه‌ی مسائل نرخ نزول پیشنهاد می‌کند، انجام شده است. قبل از مطالعات لی و همکاران، مسأله‌ی نزول هندسی دم توزیع ایستای یک زنجیر مارکوف $GI/G/1$ با تعداد طبقات و فازهای نامتناهی بررسی شده است [۳۵]. این تحقیق با روش تحلیل ماتریسی انجام گرفته است و سادگی روش، مزیت اصلی و اساسی آن بوده است. هرچند تنها زمانی می‌توان از نتایج این تحقیقات استفاده کرد که ماتریس نرخ z−مثبت باشد. لی و همکاران [۲۷] در تحقیقات خود، فرآیند QBD را به عنوان حالت خاصی از صف $GI/G/1$ در نظر گرفتند. این کار باعث می‌شود که با توجه به نمایش هندسی−ماتریسی توزیع ایستا نه تنها بعضی از نتایج و عبارات اصلاح شود، بلکه می‌توان مطالعه و بررسی رفتار مجانبی توزیع ایستا را در حالت z−مثبت نبودن ماتریس نرخ نیز بسط داد.

مسأله نرخ نزول برای مدل‌های گوناگون با چند صف مثل پیوستن به کوتاه‌ترین صف‌ها و نیز شبکه‌های جکسون تعمیم یافته بررسی شده است [۳۲، ۲۷، ۲۳، ۱۵، ۱۱].

به جز این دو رهیافت (نظریه انحرافات بزرگ و روش تحلیل ماتریسی)، روش‌های دیگری نیز برای مسأله‌ی نرخ نزول در دو بعد وجود دارد. برای مثال تلاش‌هایی به تقریب‌های عددی برای توزیع‌های ایستا اختصاص داده شده است [۲۶، ۵].

این پایان نامه شامل پنج فصل می‌باشد. در فصل دوم بعد از معرفی فرآیندهای مارکوف، ماتریس‌های نامنفی تحویل‌ناپذیر تعریف و روابط بین این ماتریس‌ها و اندازه‌های پایا بررسی می‌شود. همچنین فرآیندهای QBD معرفی و نمایش هندسی−ماتریسی توزیع ایستای آن، در حالت ایستایی فرآیند، نشان داده می‌شود. فصل سوم یک آشنایی اولیه با مدل‌های صف به حساب می‌آید. در فصل چهارم فرآیندهای QBD دوطرفه معرفی شده است و به روش تحلیلی ماتریسی و با استفاده از توابع مولد گشتاور نرخ‌های نزول هندسی و سخت توزیع ایستای آن به دست آمده است. در فصل پنجم از نتایج فصل

چهارم برای به دست آوردن نرخ نزول توزیع ایستای شبکه جکسون دو گره‌ای استفاده شده است.

فصل ۲

مفاهیم و پیش نیازها

۲—۱ مقدمه

در این فصل ابتدا فرآیندهای مارکوف معرفی می‌شوند و شرایط وجود توزیع ایستا برای این فرآیندها توضیح داده می‌شود. در ادامه مفاهیم و روابطی که در فصل‌های بعدی مورد نیاز است ذکر خواهد شد. همچنین به روش تحلیلی ماتریسی، نمایش توزیع ایستای فرآیند QBD به دست خواهد آمد. از دلایل پرداختن به این فرآیند، شامل شدن بسیاری از مدل‌های صف و کاربرد وسیع آن است.

۲—۲ فرآیندهای تصادفی

برای یک مجموعه‌ی T، خانواده‌ی متغیرهای تصادفی $\{X_t, t \in T\}$ را که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند، یک فرآیند تصادفی با فضای پارامتر T و فضای وضعیت S می‌گویند؛ به طوری که S، مجموعه‌ی تمام مقادیری است که متغیرهای تصادفی $X(t)$، به ازای هر $t \in T$، می‌توانند اختیار کنند.

تعریف **۱.۲ فرآیند شمارشی:** فرآیند تصادفی $\{N(t), t \geq ۰\}$ را فرآیند شمارشی می‌نامند، هر گاه در شرایط زیر صدق کند.

۱) $N(t) \geq ۰$

۲) مقادیر $N(t)$ صحیح باشند

۳) به ازای $s < t$، $N(s) \leq N(t)$

نمونه‌هایی از فرآیندهای شمارشی عبارتند از:

• تعداد حوادث رانندگی در یک شهر که در مدتی معین اتفاق می‌افتد.

• تعداد بچه‌هایی که در مدت معینی در یک بیمارستان متولد می‌شوند.

• تعداد مشتریانی که تا لحظه‌ی t وارد یک سیستم صف شده و یا از آن خارج شده‌اند.

تعریف ۲.۲ فرآیند شمارشی دارای نموهای مستقل است، اگر تعداد پیشامدها در فاصله‌های زمانی جدا از هم، مستقل باشند. یعنی برای هر t و s تعداد پیشامدها تا زمان t (یعنی، $N(t)$) مستقل از تعداد پیشامدها بین زمان‌های t و $t+s$ ($N(t+s)-N(t)$) است.

تعریف ۳.۲ فرآیند پواسون: فرآیند پواسون حالت خاصی از فرآیند شمارشی محسوب می‌شود. فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ یک فرآیند پواسون با پارامتر λ است، هر گاه:

۱) $N(۰) = ۰$

۲) فرآیند دارای نموهای مستقل و مانا باشد

۳) تعداد پیشامدها در هر فاصله دلخواه به طول t دارای توزیع پواسون با میانگین λt باشد. یعنی، به ازای هر $s, t \geq ۰$ تساوی زیر برقرار باشد.

$$P(N(t+s)-N(s)=n) \quad = \quad e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \qquad , \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

همچنین تعریف دیگری از فرآیند پواسون به صورت زیر می‌باشد.

تعریف ۴.۲ فرآیند شمارشی $\{N(t), t \geq ۰\}$ یک فرآیند پواسون با نرخ λ ($\lambda > ۰$) نامیده می‌شود اگر:

۱) $N(۰) = ۰$

۲) فرآیند دارای نموهای مستقل و مانا باشد

۳) $P(N(h) = ۱) = \lambda h + o(h)$

۴) $P(N(h) \geq ۲) = o(h)$

۲—۲—۱ فرآیندهای مارکوف

برای روشن شدن مفهوم کلی فرآیند مارکوف، می‌توان گفت اگر زمان در این فرآیند، به سه دوره‌ی گذشته، حال و آینده تقسیم شود، آینده‌ی این فرآیند، به شرط دانستن حال، بستگی به مسیری که در گذشته طی کرده است، ندارد و تنها به موقعیت آن در زمان حال وابسته است. مثلاً فرآیند پواسون نوعی فرآیند مارکوف است، چنانچه وضعیت فرآیند در لحظاتی مانند $t_۱, t_۲, \ldots, t_n$ مشخص باشد، می‌توان گفت که برای پیش‌بینی حرکت آینده‌ی این فرآیند، تنها آخرین اطلاعات، یعنی وضعیت فرآیند در لحظه‌ی t_n، کافی است.
خاصیت مارکوفی یک فرآیند را می‌توان به زبان ریاضی نیز بیان کرد. مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t), t \geq ۰\}$ را در نظر بگیرید. اگر $X(t)$ طبق فرآیند مارکوف عمل کند، به ازای تمام مقادیر $x_۱, x_۲, \ldots, x_n$ و $t_۱ < \ldots < t_{n+۱}$ رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$P[X(t_{n+۱}) \leq x | X(t_n) = x_n, \ldots, X(t_۲) = x_۲, X(t_۱) = x_۱] = P[X(t_{n+۱}) \leq x | X(t_n) = x_n]$$

فرآیندهای مارکوف را، به طور کلی، بر حسب دو عامل طبقه‌بندی می‌کنند:
الف. پارامتر t، که می‌تواند پیوسته یا گسسته باشد. گسسته بودن t را می‌توان چنین تفسیر کرد که رفتار فرآیند تنها در مقاطع مشخصی از زمان مطالعه می‌شود. در صورتی که t گسسته باشد، $X(t)$ با متغیری به شکل X_n جایگزین می‌شود.
ب. مجموعه‌ی مقادیری را که $X(t)$ می‌تواند انتخاب کند، بر حسب تعریف، وضعیت (حالت) فرآیند می‌نامند. وضعیت فرآیند نیز می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

۲—۳ زنجیرهای مارکوف

زنجیرهای مارکوف حالت خاصی از فرآیندهای مارکوف هستند که در آن هم پارامتر t و هم وضعیت فرآیند فقط مقادیر گسسته را انتخاب می‌کند. براین اساس یک رشته متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, \ldots$ را زنجیره‌ی مارکوف می‌نامند، اگر به ازای تمام مقادیر n و تمام حالت‌های i و j رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+۱} = j | X_۱ = i_۱, X_۲ = i_۲, \ldots, X_n = i] = P[X_{n+۱} = j | X_n = i]$$

در اینجا به n، مرحله نیز گفته می‌شود.

تعریف ۵.۲ زنجیر مارکوف زمان–همگن : زنجیرهای مارکوف زمان–همگن، کلاس خاصی از زنجیرهای مارکوف است که در آن احتمال گذار زنجیر از هر وضعیت به وضعیت دیگر مستقل از مرحله‌ی آن (n) باشد. به این زنجیرها، زنجیر مارکوف با احتمالات انتقال ایستا گفته می‌شود. به بیان ریاضی، زنجیره‌ی مارکوف دارای احتمالات انتقال ایستا است در صورتی که به ازای تمام وضعیت‌های i و j و مرحله‌ی n رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$P[X_{n+1} = j | X_n = i] = P[X_1 = j | X_0 = i] = p_{ij}$$

بنابراین در یک زنجیره‌ی مارکوف با احتمال انتقال ایستا، p_{ij} معرف احتمال تغییر وضعیت زنجیر از i به j است.

فرآیند قدم زدن تصادفی، مثالی از زنجیرهای مارکوف زمان–همگن می‌باشد. در ادامه همواره فرض می‌شود که فرآیندهای مورد بحث، زمان همگن هستند.

تعریف ۶.۲ ماتریس احتمال انتقال: ماتریسی است که عنصر تشکیل دهنده‌ی آن در سطر i و ستون j، مقدار p_{ij}، احتمال تغییر وضعیت فرآیند از i به j است و به صورت زیر نمایش داده می‌شود: (در حالتی که فضای وضعیت نامتناهی باشد)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} & \cdots \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ p_{i1} & p_{i2} & p_{i3} & p_{i4} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

بدیهی است که تمام عناصر این ماتریس غیرمنفی است. مجموع عناصر هر سطر برابر با یک است (مجموع عناصر یک ستون لزوماً یک نیست).

در یک زنجیر مارکوف، احتمال اینکه زنجیر با شروع از وضعیت i در nامین قدم به وضعیت j برسد به وسیله‌ی معادله‌ی چپمن–کلموگروف به‌صورت زیر داده شده است:

$$p_{ij}^{n} = \sum_{k \geq 0} p_{ik}^{m} p_{kj}^{n-m} \qquad 0 \leq m \leq n.$$

و به این معناست که احتمال تغییر وضعیت فرآیند از i به j در n مرحله برابر با مجموع احتمال تغییر وضعیت‌های فرآیند از i به هر وضعیت دیگر ، مثلاً k در m مرحله و سپس از k به j در $n-m$ مرحله است.

قدم زدن تصادفی یک بعدی

قدم زدن تصادفی یک بعدی یک زنجیر مارکوف است که فضای وضعیت آن زیر مجموعه‌ای متناهی یا نامتناهی مانند $\{a, a+1, \dots, \}$ از اعداد صحیح است و در هر انتقال ، اگر زنجیر در وضعیت i باشد، تنها مجاز است که به یکی از دو وضعیت مجاور $i-1$ و $i+1$ برود و یا در همان وضعیت i بماند. اگر فضای وضعیت مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی گرفته شود، ماتریس انتقال آن به صورت زیر می‌باشد:

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

که در آن $r_i \geq 0$، $q_i, p_i > 0$ و

$$\begin{aligned} q_i + r_i + p_i &= 1 \qquad\qquad i = 1, 2, \dots \\ r_0 + p_0 &= 1 \qquad\qquad r_0, p_0 \geq 0 \end{aligned}$$

به طور مشخص، هر گاه $X_n = i$ باشد، آن‌گاه به ازای $i \geq 1$ روابط زیر برقرار است.

$$\begin{cases} P\{X_{n+1} = i+1 | X_n = i\} = p_i \\ P\{X_{n+1} = i-1 | X_n = i\} = q_i \\ P\{X_{n+1} = i | X_n = i\} = r_i \end{cases}$$

تعریف ۷.۲ زنجیر مارکوف همگن فضایی (مکان–همگن) : فرض کنید $\{X_n, n \geq 1\}$ یک زنجیر مارکوف با ماتریس احتمال انتقال p_{ij} باشد. در صورتی که احتمالات انتقال برای هر i و j تنها به $j-i$ وابسته باشد، زنجیر یک زنجیر همگن فضایی است.

در سراسر این پایان‌نامه منظور از زنجیرهای همگن، زنجیرهای همگن فضایی با احتمال انتقال ایستا است.

رده‌بندی وضعیت‌های یک زنجیر

وضعیت j در دسترس وضعیت i است اگر به ازای عددی صحیح مانند $n \geq 0$، $p_{ij}^n > 0$ باشد. به بیان دیگر وضعیت j در دسترس وضعیت i است اگر زنجیر با یک احتمال مثبت در تعداد متناهی انتقال از وضعیت i شروع و به وضعیت j برسد. دو وضعیت i و j که در دسترس یکدیگرند مرتبط نامیده می‌شوند و فرآیندی تحویل‌ناپذیر است که تمام وضعیت‌ها با هم مرتبط باشند.

بازگشت

در یک زنجیر مارکوف، وضعیت i بازگشتی است اگر و تنها اگر، با شروع از وضعیت i، احتمال بازگشت به وضعیت i پس از مدت زمان متناهی یک باشد. وضعیت غیربازگشتی را گذرا می‌گویند. در مورد خاصیت بازگشتی بودن قضیه زیر ثابت شده است.

قضیه ۱.۲ وضعیت i بازگشتی است اگر و تنها اگر

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{n} = \infty$$

اثبات. اثبات این قضیه در مرجع [۲۲] آمده است. ■

مثال ۱.۲ قدم زدن تصادفی یک بعدی بر اعداد صحیح مثبت و منفی را در نظر بگیرید که در هر انتقال ذره با احتمال p یک قدم به راست و با احتمال q یک واحد به چپ حرکت می‌کند ($p+q=1$). به آسانی دیده می‌شود [۲۲]، $\sum_{n=0}^{\infty} p_{00}^{n} = \infty$ اگر و تنها اگر $p = \frac{1}{2}$ باشد. در نتیجه با توجه به قضیه ۱.۲ قدم زدن تصادفی یک بعدی بازگشتی است اگر و تنها اگر $p = q = \frac{1}{2}$.

اگر وضعیت i بازگشتی باشد دو حالت وجود دارد، یا بازگشتی پوچ است و یا بازگشتی مثبت.

تعریف ۸.۲ اگر در زنجیر مارکوف X_n با فضای وضعیت S، $W_i = min\{n > 0 : X_n = i\}$ اولین زمان برخورد با وضعیت i باشد و $w_i = E_i(W_i)$ نشان دهنده‌ی میانگین زمان بازگشت به وضعیت i برای زنجیر با شروع از وضعیت i باشد، آن‌گاه وضعیت i بازگشتی مثبت نامیده می‌شود، هر گاه $w_i < \infty$ و بازگشتی پوچ نامیده می‌شود هر گاه $w_i = \infty$.

تعریف ۹.۲ دوره‌ی تناوب وضعیت i، که به صورت $d(i)$ نوشته می‌شود، عبارت است از بزرگترین مقسوم علیه مشترک تمام اعداد صحیح $n \geq 1$ که به ازای آن‌ها $p_{ii}^{n} > 0$ است. در حالت خاص اگر $d(i) = 1$ باشد، اصطلاحاً وضعیت i را نادوره‌ای می‌نامند.

فرآیند قدم زدن تصادفی با احتمال درجا زدن مثبت، یک فرآیند تحویل‌ناپذیر و نادوره‌ای است.

۲—۳—۱ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر نامنفی و زنجیرهای مارکوف

مطالب این بخش بر اساس مرجع [۴۲] می‌باشد.

تعریف ۱۰.۲ ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر ماتریس $n \times n$ نامنفی T، تحویل‌ناپذیر است اگر برای هر جفت i, j از مجموعه‌ی اندیس گذار، یک عدد صحیح و مثبت $m \equiv m(i,j)$ وجود داشته باشد به طوری که $t_{ij}^{(m)} > 0$، که $t_{ij}^{(m)}$ درایه‌ی ijام ماتریس T^m است. یک ماتریس تحویل ناپذیر دوره‌ای با دوره‌ی d گفته می‌شود، اگر دوره‌ی هر یک از وضعیت‌های آن بزرگتر از یک باشد ($d > 1$) و نادوره‌ای است اگر $d = 1$ باشد.

قضیه پرون—فروبنیوس (Perron – Frobenius) برای ماتریس‌های تحویل‌ناپذیر

قضیه ۲.۲ فرض کنید T یک ماتریس تحویل‌ناپذیر نامنفی $n \times n$ باشد. برای ماتریس T یک مقدار ویژه‌ی r وجود دارد به طوری که:

(a) r حقیقی و مثبت است.

(b) بردارهای ویژه‌ی چپ و راست متناظر r اکیداً مثبت هستند.

(c) برای هر مقدار ویژه $\lambda \neq r$، $r \geq |\lambda|$.

(d) اگر $\underline{0} \leq B \leq T$ و β یک مقدار ویژه B باشد، آنگاه $r \leq |\beta|$ و نیز اگر $r = |\beta|$ باشد آنگاه $B = T$.

(e) بردارهای ویژه‌ی متناظر r، یکتا هستند.

(f) r یک ریشه ساده‌ی معادله مشخصه T است.

به r، مقدار ویژه پرون—فروبنیوس نیز گفته می‌شود.

تبصره ۱.۲ مقدار ویژه‌ی پرون—فروبنیوس برای ماتریس T را با نماد $sp(T)$ نشان می‌دهند.

حال برای مشاهده نتایج این قضیه، با یک مثال، ماتریس T را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$T = \begin{pmatrix} 1/9 & 1/9 & 0 & 2/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 2/4 & 0 \\ 0 & 1/6 & 1/6 & 0 & 1/6 & 2/6 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

همان‌طور که دیده می‌شود ماتریس T، تحویل‌ناپذیر و نامنفی است. در اینجا با استفاده از نرم افزار Matlab، مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این ماتریس به صورتی که در جدول زیر نشان داده شده، به دست آمده است (برنامه شماره ۱ در پیوست الف. مربوط به این قضیه است).

I	I'
۰/۸۹۶۷	۰/۸۹۶۷
−۰/۳۰۲۹ + ۰/۱۹۲۵i	−۰/۳۰۲۹
−۰/۳۰۲۹ − ۰/۱۹۲۵i	−۰/۳۰۲۹
۰/۰۹۶۶	۰/۰۹۶۶
۰/۳۶۱۸ + ۰/۰۸۶۲i	۰/۳۶۱۸
۰/۳۶۱۸ − ۰/۰۸۶۲i	۰/۳۶۱۸

جدول ۲—۱: مقادیر ویژه ماتریس T و مقدار حقیقی آن‌ها

$Y_۱$	$Y_۲$	$Y_۳$
۰/۲۹۵۹	−۰/۲۲۷۰ − ۰/۱۰۶۷i	−۰/۲۲۷۰ + ۰/۱۰۶۷i
۰/۴۴۵۳	۰/۶۴۶۷	۰/۶۴۶۷
۰/۴۱۱۴	−۰/۳۹۰۸ + ۰/۰۶۶۹i	−۰/۳۹۰۸ − ۰/۰۶۶۹i
۰/۳۷۲۹	−۰/۳۹۰۸ + ۰/۰۶۶۹i	۰/۱۱۸۶ − ۰/۰۹۴۹i
۰/۴۴۴۹	−۰/۰۸۲۹ + ۰/۲۶۸۹i	−۰/۰۸۲۹ − ۰/۲۶۸۹i
۰/۴۵۶۰	۰/۲۲۹۹ − ۰/۴۵۴۵i	۰/۲۲۹۹ + ۰/۴۵۴۵i

$Y_۴$	$Y_۵$	$Y_۶$
۰/۲۳۳۶	۰/۰۹۳۲ − ۰/۰۲۱۵i	۰/۰۹۳۲ + ۰/۰۲۱۵i
۰/۷۱۹۶	۰/۷۱۲۱	۰/۷۱۲۱
−۰/۳۸۵۴	۰/۵۷۲۰ - ۰/۰۰۱۱i	۰/۵۷۲۰ + ۰/۰۰۱۱i
−۰/۲۸۹۵	−۰/۲۷۷۸ − ۰/۰۹۵۳i	−۰/۲۷۷۸ + ۰/۰۹۵۳i
۰/۲۱۴۹	۰/۱۸۲۷ + ۰/۱۳۴۱i	۰/۱۸۲۷ − ۰/۱۳۴۱i
−۰/۳۸۶۲	−۰/۱۱۲۲ + ۰/۰۸۰۳i	−۰/۱۱۲۲ − ۰/۰۸۰۳i

جدول ۲—۲: بردارهای ویژه‌ی ماتریس T

در جدول ۲—۱، بردار I نشان دهنده‌ی مقادیر ویژه‌ی ماتریس T و بردار I' نشان دهنده‌ی قدرمطلق این مقادیر ویژه است. همچنین در جدول ۲—۲، ستون iام (یعنی Y_i) نشان دهنده‌ی بردار ویژه چپ نظیر مقدار ویژه iام در جدول ۲—۱ است. همان گونه که دیده می‌شود در این جا، $r =$ ۰/۸۹۶۷ بزرگترین مقدار ویژه حقیقی و بردار ویژه متناظر آن، یعنی $Y_۱$، اکیداً مثبت است.

لم ۱.۲ اگر T یک ماتریس $n \times n$ نامنفی تحویل‌ناپذیر با مقدار ویژه پرون—فروبنیوس r باشد، آن گاه

$$s \leq r \leq S$$