بسم الله الرحمن الرحیم

۱۵-۹۵ - ۲۰۲۹۳۹۲

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
دانشکده علوم پایه

پایان نامه
جهت اخذ درجه کارشناسی ارشد
رشته ریاضی محض

خمیدگی اصلی ابررویه‌های ایزوپارامتریک در CP^n

استاد راهنما:
دکتر اسمعیل عابدی

استاد مشاور:
دکتر قربانعلی حقیقت‌دوست

پژوهشگر:
سیده خدیجه شیخ‌الاسلامی علمداری

آذر/ ۱۳۸۹

تبریز/ ایران

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری
پژوهشگاه علوم و فناوری اطلاعات ایران
IRANDOC
مرکز اطلاعات و مدارک علمی ایران
۱۵۰۰۹۵
۱۳۸۹/۱۰/ ۲۰

دانشگاه تربیت معلم آذربایجان
وزارت علوم تحقیقات و فناوری

بسمه تعالی

تاریخ:
شماره:
پیوست:

صورت جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

طبق درخواست شماره ۶۰۰/۹۷۲ مورخ ۱۳۸۹/۸/۱۱ تحصیلات تکمیلی دانشکده علوم پایه و مجوز شماره ۴۱۷/۴۸۲ مورخ ۱۳۸۹/۸/۱۵ تحصیلات تکمیلی دانشگاه جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد خانم **سیده خدیجه شیخ الاسلامی علمداری** به شماره دانشجویی ۸۷۱۹۱۱۳۰۵ در رشته ریاضی گرایش محض تحت عنوان **خمیدگی های اصلی ابررویه های ایزوپارامتریک در فضای تصویری مختلط** به ارزش ۶ واحد در ساعت ۱۰/۳۰ مورخ ۸۹/۹/۲ در حضور هیات داوران مرکب از:

۱. استاد راهنما : دکتر اسمعیل عابدی

۲. استاد مشاور : دکتر قربانعلی حقیقت دوست

۳. عضو هیات داوران: دکتر رضا چاوش خاتمی

برگزار و با درجه ......عالی...... نمره ......۱۹......... ارزشیابی گردید.
نوزده

مدیر گروه آموزشی ریاضی
دکتر قربانعلی حقیقت دوست

رئیس دانشکده
دکتر حسن ولیزاده

نماینده شورای تحصیلات تکمیلی دانشگاه در گروه ریاضی
دکتر ناصر آقازاده

تاییدیه اعضا هیات داوران حاضر در جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

اعضای هیات داوران نسخه نهایی پایان نامه خانم سیده خدیجه شیخ الاسلامی علمداری تحت عنوان

خمیدگی های اصلی ابررویه های ایزوپارامتریک در فضای تصویری مختلط

را از نظر شکل و محتوا بررسی نموده ، پذیرش آن را جهت نیل به درجه کارشناسی ارشد مورد تایید قرار دادند.

اعضای هیات داوران	نام و نام خانوادگی	رتبه علمی	امضا
۱. استاد راهنما:	دکتر اسمعیل عابدی	استادیار	
۲. استاد مشاور:	دکتر قربانعلی حقیقت دوست	استادیار	
۳. عضو هیات داوران:	دکتر رضا چاوش خاتمی	استادیار	
۴. نماینده تحصیلات تکمیلی دانشگاه:	دکتر ناصر آقازاده	استادیار	

تقدیم به ؛

پدر و مادر عزیزم

که تمام دارایی من هستند.

تقدیر و تشکر

سپاس و ستایش خدای را که سپاس را بهای نعمتهایش و پناهگاه از بلایش و وسیله به سوی بهشتش و موجب افزایش احسانش قرار داده و درود بر رسولش پیامبر رحمت و امام پیشوایان و چراغ امت، انتخاب شده از طینت بزرگواری و خلاصه ی شرافت پیشین و رستنگاه افتخار پاک ریشه دار و شاخه ی بلند پر برگ و ثمر و درود بر اهل بیتش چراغهای تاریکیها و نگهبان امتها و مشعلگاه روشن دین و میزانهای سنگین فضیلت که درود خدا بر تمام آنان باد، درودی در برابر فضلشان و پاداش بر عملشان و در خور پاکی و فرع و اصلشان تا زمانی که سپیده می درخشد و ستاره ی طلوع کرده غروب می کند.

سپاس بی کران خدای را، به واسطه ی نعمت پدر و مادر که کودک را در راه تعالی و پرورش اذهانش مساعدت می کنند و او را به سعادت و کمال رهنمون می شوند.

با سپاس از تمام زحمات بی پایان والدینم که مرا در راه نیل به درجات علمی و معنوی یاریگر بودند. امید که ثمری شایسته برای آنان باشم.

با سپاس از زحمات اساتید محترم استاد عابدی و استاد حقیقت دوست که مرا در تهیه ی این پایان نامه یاری کرده اند.

سیده خدیجه شیخ الاسلامی

آذر ۱۳۸۹

چکیده:

فرض کنیم M یک ابررویهٔ ایزوپارامتریک در $\mathbb{C}P^n$ باشد و $\overline{M}$ تصویر وارون M تحت نگاشت هاف $p:\mathbb{S}^{2n+1}\to\mathbb{C}P^n$ باشد. با استفاده از رابطهٔ بین مقادیر ویژهٔ عملگر شکل M و $\overline{M}$ اثبات می‌کنیم که M همگن است اگر و تنها اگر g و l ثابت باشند که g تعداد خمیدگی‌های اصلی متمایز M و l تعداد فضاهای ویژهٔ غیرافقی از عملگر شکل روی $\overline{M}$ باشند.

کلمات کلیدی: ابررویهٔ ایزوپارامتریک، خمیدگی اصلی، عملگر شکل، فضای تصویری مختلط، مقادیر ویژه

فهرست مندرجات

مقدمه

در ریاضیات در حوزهٔ توپولوژی، تاربندی هاف (کلاف هاف یا نگاشت هاف) یک ۳- کره (یک ابر کره در فضای ۴ بعدی) را در روابط دایره ها و کرهٔ معمولی توصیف می‌کند. این مطالب در سال ۱۹۳۱ توسط هِنز هاف ($HeinzHopf$) کشف شد. تاربندی هاف یک مثال اولیهٔ قدرتمند برای کلاف تاری است. بطور تکنیکی، هاف بیش از یک تابع پیوسته (یا نگاشت پیوسته) از ۳- کره به ۲- کره یافت بطوری که هر نقطهٔ مشخص از ۲- کره توسط یک دایرهٔ مشخص از ۳- کره ایجاد می‌شود. بنابراین ۳- کره ترکیبی از تارهایی است که هر تار یک دایره و یک نقطه از ۲- کره است. ساختار این کلاف تاری توسط $\mathbb{S}^{1} \hookrightarrow \mathbb{S}^{3} \xrightarrow{p} \mathbb{S}^{2}$ نمایش داده می‌شود که $\mathbb{S}^{3}$ (۳- کره) فضای کلی و $\mathbb{S}^{2}$ (۲- کره معمولی) فضای پایه و $\mathbb{S}^{1}$ (دایره) فضای تاری و $p : \mathbb{S}^{3} \to \mathbb{S}^{2}$ (نگاشت هاف) تصویر کلافی است. تاربندی هاف شبیه هر کلاف تاری یک فضای حاصلضرب موضعی است. هر چند، آن یک کلاف تاری بدیهی نیست؛ یعنی $\mathbb{S}^{3}$ بصورت حاصلضرب $\mathbb{S}^{2}$ در $\mathbb{S}^{1}$ نیست. این معانی بسیاری دارد: برای مثال، وجود این کلاف نشان می دهد که هموتوپی گروه های بالاتر، در حالت عمومی بدیهی نیست. همچنین یک مثال پایه از یک کلاف اصلی به وسیلهٔ یکی کردن تار با گروه دایره بدست می‌آید. تاربندی هاف را می‌توان بصورت

نگاشتی از کرهٔ $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ به فضای تصویری مختلط $\mathbb{C}P^n$ با تارهای $\mathbb{S}^1$ تعمیم داد.

در این پایان نامه ابررویه های ایزوپارامتریک در $\mathbb{C}P^n$ مطالعه شده است. به عنوان مثال ثابت شده که یک ابررویهٔ M در $\mathbb{C}P^n$ ایزوپارامتریک است اگر و تنها اگر تصویر وارون $\pi^{-1}(M)$ تحت نگاشت هاف، ایزوپارامتریک در $\mathbb{S}^{2n+1}$ باشد که در آن $\pi : \mathbb{S}^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ نگاشت هاف است. ابررویه‌های ایزوپارامتریک در $\mathbb{C}P^n$ جذابیت‌های زیاد و نمودهای قابل توجهی دارند که بعضی کاملاً متفاوت از نوع موجود در کره‌ها هستند. برای مثال، ابررویه‌های ایزوپارامتریک زیادی در $\mathbb{C}P^n$ موجود هستند که خمیدگی‌های اصلی ثابت ندارند. یک ابررویه ایزوپارامتریک M در $\mathbb{C}P^n$ خمیدگی‌های اصلی ثابت دارد اگر و تنها اگر M همگن باشد. در [۱۶]، $L.Xiao$ زیر خمینه‌های ایزوپارامتریک زیادی در $\mathbb{C}P^n$ شامل ابررویه‌ها یافته است. مخصوصاً ابررویه‌های ایزوپارامتریک زیادی بدست آورده که همگن نیستند اما تصویر وارون همگن دارند.

در سال ۱۹۹۰ میلادی، $Terng$ و $Thorbergsson$، در [۱۴] قضیهٔ عمیقی دربارهٔ زیرخمینه‌های کانونی در فضاهای متقارن یافتند. مطابق با این قضیه، یک ابررویهٔ کانونی در $\mathbb{C}P^n$ دقیقاً یک ابررویهٔ ایزوپارامتریک است. فرض کنید M یک ابررویهٔ ایزوپارامتریک در $\mathbb{C}P^n$ و $\overline{M} = \pi^{-1}(M)$ باشد. فرض کنید g تعداد خمیدگی‌های اصلی متمایز M و l تعداد فضاهای ویژهٔ غیرافقی عملگر شکل روی $\overline{M}$ باشد. در [۸]، پارک سعی کرد یک رده‌بندی برای ابررویه‌های ایزوپارامتریک در $\mathbb{C}P^n$ ایجاد کند. اما متاسفانه، اثبات اینکه هر دو g و l برای هر ابررویهٔ ایزوپارامتریک M در $\mathbb{C}P^n$ ثابتند، که در قضایای A و B و $Table1$ در [۸] آمده، نادرست است. زیرا قضایای ۳.۱۲ و ۳.۱۳ نادرستند. بعضی

از مثال‌های نقض در این پایان‌نامه آمده است. بنابراین یک سوال طبیعی برای پرسیدن این است که چه زمانی ابررویهٔ ایزوپارامتریک M، g یا l ثابت دارد؟ در این پایان‌نامه یک جواب کامل به این سوال می‌دهیم. قضیهٔ اصلی، قضیهٔ زیر است.

قضیه: فرض کنید M یک ابررویهٔ ایزوپارامتریک کامل در $\mathbb{C}P^n$ باشد و $\overline{M}$ تصویر وارون M تحت نگاشت هاف باشد. در اینصورت M همگن است اگر و تنها اگر g و l ثابت باشند.

این پایان نامه دو قسمت دارد. در قسمت اول، تعاریف پایه و روابط بین عملگرهای شکل یک ابررویهٔ M در $\mathbb{C}P^n$ و تصویر وارون $\overline{M}$ تحت نگاشت هاف را یادآوری می‌کنیم و در قسمت دوم، قضیهٔ اصلی را به این صورت ثابت می‌کنیم که نشان می‌دهیم اگر M یک ابررویهٔ ایزوپارامتریک در $\mathbb{C}P^n$ باشد ولی همگن نباشد آنگاه g و l ثابت نیستند.

فصل ۱

مفاهیم مقدماتی

۱ــ۱ تعاریف هندسی

تعریف ۱ . فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. یک کلاف برداری (حقیقی) از مرتبهٔ k روی M عبارتست از یک خمینهٔ هموار E همراه با یک نگاشت پوشا و هموار $F : E \to M$ که در روابط زیر صادق باشد.

(۱) به ازای هر $p \in M$، مجموعهٔ $E_p = F^{-1}(p) \subset E$ (که تار E روی p است) یک فضای برداری حقیقی k بعدی باشد.

(۲) برای هر $p \in M$ یک همسایگی U از p در M و یک دیفیومورفیسم $\Phi : U \times R^k \to F^{-1}(U) \subset E$ موجود باشد بطوری که برای هر $q \in U$ نگاشت $v \to \Phi(q, v)$ یک ایزومورفیسم خطی از R^k به $F^{-1}(q)$ باشد.

تعریف ۲. فرض کنید $F : E \to M$ یک کلاف برداری روی خمینهٔ هموار M باشد. فرض کنید $\Gamma(E)$ فضای برش‌های هموار E باشد. نگاشتی مانند $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \Gamma(E) \to \Gamma(E)$ با ضابطهٔ $(X,s) \mapsto \nabla_X(s)$ را التصاق در E گویند هر گاه:

(۱) $\nabla_X(s)$ نسبت به X، $C^\infty(M)$ خطی باشد.

$$\nabla_{fX_1+gX_2}(s) = f\nabla_{X_1}(s) + g\nabla_{X_2}(s) \qquad f,g \in C^\infty(M)$$

(۲) $\nabla_X(s)$ نسبت به s، $\mathbb{R}$ - خطی باشد.

$$\nabla_X(as_1 + bs_2) = a\nabla_X(s_1) + b\nabla_X(s_2) \qquad a,b \in \mathbb{R}$$

(۳) ∇ در قاعدهٔ ضربی زیر صدق کند.

$$\nabla_X(fs) = f\nabla_X(s) + (Xf)s \qquad f \in C^\infty(M)$$

در حالتی که $E = TM$ کلاف برداری مماس باشد آنگاه به وضوح $\Gamma(E) = \mathcal{X}(M)$. در این صورت ∇ را التصاق خطی و $\nabla_X(s)$ را مشتق کواریان s در امتداد X گوییم.

تعریف ۳. فرض کنید (M,g) یک خمینهٔ ریمانی باشد. در این صورت التصاق خطی منحصر به فردی مانند $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ با شرایط زیر موجود است.

(۱) $\nabla_X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X(Y),Z\rangle + \langle Y,\nabla_X(Z)\rangle$ (سازگار با متر)

(۲) $[X,Y] = \nabla_X(Y) - \nabla_Y(X)$ (متقارن)

اگر ∇ در شرایط (۱) و (۲) صدق کند، آن راالتصاق ریمانی یا لیوی سیویتا [1] می‌نامند.

[1] Levi-Civita

تعریف ۴. فرض کنید M یک خمینهٔ ریمانی باشد. M را همگن گوییم هر گاه به ازای هر $p, q \in M$، یک ایزومتری ϕ از M چنان موجود باشد که $\phi(p) = q$.

به عبارت دیگر گروه ایزومتری‌های M، روی M بطور متعدی عمل می‌کند. گروه ایزومتری‌های M را با نماد $I(M)$ نمایش می‌دهیم. اگر M یک فضای همگن باشد، آنگاه هر ویژگی هندسی یک نقطهٔ M، برای نقاط دیگر M نیز صادق است.

تعریف ۵. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. خمینهٔ N یک زیر خمینه از خمینهٔ M خواهد بود اگر:

(۱) N یک زیر فضای توپولوژیکی M باشد.

(۲) نگاشت شمول $i : N \subset M \to M$ هموار باشد و در هر نقطهٔ $p \in N$ نگاشت $(i_*)_p$ یک‌به‌یک باشد.

تعریف ٦. فرض کنید D یک زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbb{C}^n$ باشد. تابع $F : D \to \mathbb{C}$ را هولومورفیک در روی D گویند هر گاه در هر نقطه از D هموار باشد.

از طرفی تابع $F = u + \sqrt{-1}v$ هولومورفیک است اگر و تنها اگر مولفه‌های F در معادلات کوشی–ریمن[۲] صدق کند.

[۲] Cauchy-Riemann

فرض کنید D یک زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbb{C}^n$ باشد. نگاشت $\psi : D \to \mathbb{C}^n$ هولومورفیک است اگر تک‌تک مولفه‌هایش هولومورفیک باشد.

تعریف ۷. یک فضای هاسدورف M را یک خمینهٔ مختلط $n-$ بعدی (مختلط) گویند هر گاه در دو شرط زیر صدق کند:

(۱) یک پوشش بازی مانند $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ از M و برای هر α یک همئومورفیسم مانند $\psi_\alpha : U_\alpha \to \psi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{C}^n$ موجود باشد.

(۲) برای هر دو مجموعهٔ باز U_α و U_β که دارای اشتراک غیر تهی هستند، نگاشت‌های

$$\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

$$\psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

هولومورفیک باشند.

تعریف ۸. فرض کنید $\widetilde{M}$ یک خمینهٔ مختلط باشد. M را یک زیر خمینهٔ مختلط از $\widetilde{M}$ گویند هر گاه:

(۱) M یک زیر خمینهٔ هموار از $\widetilde{M}$ باشد.

(۲) نگاشت یک‌به‌یک $\imath : M \to \widetilde{M}$ هولومورفیک باشد.

تعریف ۹ . فرض کنید M و N دو خمینهٔ هموار باشند. نگاشت هموار $F : M \to N$ یک فروبری[۳] نامیده می‌شود، هر گاه $(F_*)_p$ در هر نقطهٔ $p \in M$ پوشا باشد. (یا $rankF = \dim N$).

M به کمک زیر خمینه‌های $F^{-1}(q)$ که $q \in N$ افراز می‌شود. اگر $m \geq n$ باشد، تصویر $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ که $(t_1, \ldots, t_m)$ را به $(t_1, \ldots, t_n)$ انتقال می‌دهد، به وضوح یک فروبری است.

تعریف ۱۰ . فرض کنید M و N دو خمینهٔ هموار باشند. نگاشت هموار $F : M \to N$ یک غوطه‌وری[۴] نامیده می‌شود، هر گاه $(F_*)_p$ در هر نقطهٔ $p \in M$ یک‌به‌یک باشد. (یا $rankF = \dim M$).

تعریف ۱۱ . فرض کنید M یک خمینه باشد. یک زیر خمینهٔ N از M، یک ابررویه در M نامیده می‌شود در صورتی که دارای نقص بعد ۱ باشد. ($\dim M - \dim N = 1$)

هر گاه $f \in C^\infty(M)$ و c یک مقدار منظم f باشد آنگاه $f^{-1}(c)$ زیر خمینه‌ای با نقص بعد ۱ از M است که آن را ابررویه تراز f گوییم.

---

[۳] submersion
[۴] immersion

تعریف ۱۲ . فرض کنید M و $\widetilde{M}$ دو خمینهٔ هموار باشند. فرض کنید $F:\widetilde{M}\to M$ یک فروبری پوشا باشد و g متر ریمانی M و $\tilde{g}$ متر ریمانی $\widetilde{M}$ باشد. F را فروبری ریمانی[۵] گویند هرگاه مترها را حفظ کند؛ یعنی $\tilde{g}(X,Y)=g(F_*X,F_*Y)$ که X و Y متعلق به $\ker F_*^{\perp}$ می‌باشند.

به ازای هر $y\in M$ تار y برابر $F^{-1}(y)\subset\widetilde{M}$ است که با نماد $\widetilde{M}_y$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۱۳ . فرض کنید M ابررویهٔ $\widetilde{M}$ باشد و $\widetilde{\nabla}$ التصاق ریمانی $\widetilde{M}$ باشد. فرض کنید X و Y متعلق به $\mathcal{X}(M)$ باشند. میدان‌های برداری X و Y را به میدان‌های برداری $\widetilde{M}$ توسیع داده و دوباره آن ها را با X و Y نشان می‌دهیم. در نقاط M داریم:

$$\widetilde{\nabla}_X(Y)=(\widetilde{\nabla}_X(Y))^{\top}+(\widetilde{\nabla}_X(Y))^{\perp}$$

فرم اساسی دوم M را با نماد II نمایش می‌دهیم که عبارت از نگاشتی به صورت $II:\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathcal{X}(M)^{\perp}$ با ضابطهٔ $II(X,Y):=(\widetilde{\nabla}_X(Y))^{\perp}$ است. فرم اساسی دوم، متقارن و دوخطی است.

تعریف ۱۴ . فرض کنید ξ یک میدان برداری قائم واحد روی یک ابررویهٔ ریمانی $M\subset\widetilde{M}$ باشد. میدان $(۱,۱)$ تانسور A با ضابطهٔ $\langle A(X),Y\rangle=\langle II(X,Y),\xi\rangle$ را که در آن $X,Y\in\mathcal{X}(M)$، عملگر شکل- M گوییم. می‌توان نشان داد که $A(X)=-\widetilde{\nabla}_X(\xi)$.

[۵] Riemannian submersion

تعریف ۱۵ . اگر M یک خمینهٔ ریمانی باشد. در هر نقطهٔ $p \in M$، عملگر شکل روی فضای مماس T_pM یک تبدیل خطی خود الحاق است. لذا قطری شدنی است، یعنی یک پایهٔ متعامد یکه مانند $\{e_1, \ldots, e_n\}$ برای T_pM موجود است بطوری که عملگر شکل قطری شود. مقادیر ویژهٔ عملگر شکل را با $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ نشان می‌دهیم و داریم: $A(e_i) = \lambda_i e_i$. مقادیر ویژهٔ A را خمیدگی‌های اصلی A یا انحنای اصلی M در p گوییم. بردارهای ویژهٔ متناظر با خمیدگی‌های اصلی را امتدادهای اصلی می‌گویند.

تذکر: فضاهای ویژهٔ تولید شده توسط مقادیر ویژه می‌توانند از بعد یک تا بعد خود خمینه باشند. زیرا ممکن است که بعضی از مقادیر ویژه با هم برابر باشند.

تعریف ۱۶ . فرض کنید $Z = (z^1, z^2, \ldots, z^{n+1})$ و $W = (w^1, w^2, \ldots, w^{n+1})$ متعلق به $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ باشند. اگر یک عدد مختلط غیر صفر مانند α موجود باشد بطوری که $W = \alpha Z$ آنگاه $W \sim Z$ خواهد بود و $\sim$ رابطه هم ارزی در $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ است. فضای تصویری مختلط $\mathbb{C}P^n$ مجموعهٔ کلاس‌های هم ارزی $(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$ با توپولوژی خارج قسمتی از $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ است. مجموعهٔ باز U_α را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$U_\alpha = \{[(z^1, \ldots, z^\alpha, \ldots, z^{n+1})] \in \mathbb{C}P^n | z^\alpha \neq 0\}$$

و فرض کنید نگاشت $\psi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^n$ به صورت زیر باشد.

$$\psi_\alpha([(z^1, \ldots, z^\alpha, \ldots, z^{n+1})]) = (\frac{z^1}{z^\alpha}, \ldots, \frac{z^{\alpha-1}}{z^\alpha}, \frac{z^{\alpha+1}}{z^\alpha}, \ldots, \frac{z^{n+1}}{z^\alpha}).$$

آنگاه داریم:

$$\psi_\alpha^{-1}(w^1,\ldots,w^n)=[(w^1,\ldots,w^{\alpha-1},1,w^\alpha,\ldots,w^n)].$$

و بنابراین

$$\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}(z^1,\ldots,z^n)=(\frac{z^1}{z^\beta},\ldots,\frac{z^{\alpha-1}}{z^\beta},\frac{1}{z^\beta},\frac{z^\alpha}{z^\beta},\ldots,\frac{z^{\beta-1}}{z^\beta},\frac{z^{\beta+1}}{z^\beta},\ldots,\frac{z^n}{z^\beta}).$$

بنابراین $\psi_\beta\circ\psi_\alpha^{-1}$ هولومورفیک است و فضای تصویری مختلط یک خمینهٔ مختلط است. در ادامه خواهیم دید که فضای تصویری مختلط $\mathbb{C}P^n$، یک فضای متقارن کاهلر[6] ریمانی با بعد $2n$ است که فشرده و همبند ساده نیز هست و $\mathbb{C}P^n$ خمیدگی هولومورفیک ثابت ۴ دارد.

تعریف ۱۷ . فرض کنید M یک خمینهٔ مختلط n بعدی باشد. فضای مماس $T_x(M)$ در یک نقطهٔ $x\in M$ دارای یک پایهٔ طبیعی به صورت $\{(\frac{\partial}{\partial x^1})_x,(\frac{\partial}{\partial y^1})_x,\ldots,(\frac{\partial}{\partial x^n})_x,(\frac{\partial}{\partial y^n})_x\}$ است. آنگاه J_x یک ایزومورفیسم $J_x:T_x(M)\to T_x(M)$ است بطوری که

$$J_x(\frac{\partial}{\partial x^i})_x=(\frac{\partial}{\partial y^i})_x \qquad J_x(\frac{\partial}{\partial y^i})_x=-(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$$

است. فرض کنید M یک خمینهٔ هموار باشد. ساختار تقریبا مختلط J روی M یک میدان $(1,1)$ تانسوراست بطوری که $J^2=-id$ باشد. اگر یک خمینهٔ M یک ساختار تقریبا مختلط بپذیرد، به آسانی می‌توان نشان داد که M دارای بعد زوج است.

---
[6] kahler