بسم الله الرحمن الرحیم

۸۷/۱/۱۰۱۱۶۸
۸۷/۱۰/۸

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه ی کارشناسی ارشد رشته ی ریاضی محض

قضایای نقطه ثابت، انتخاب و بهترین تقریب در فضاهای R-درخت برای نگاشت های چندمقداری

استاد راهنما

دکتر مجید فخار

استاد مشاور:

دکتر جعفر زعفرانی

پژوهشگر:

زینب سلطانی رنانی

۱۳۸۷/۹/۲۳

شهریور ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه
رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض خانم زینب سلطانی رنانی

تحت عنوان:

قضایای نقطه ثابت، انتخاب و بهترین تقریب در فضاهای R – درخت برای نگاشت های چند مقداری

در تاریخ ... ۸۷/۶/۳۰ ..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ......عالی..................... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه	دکترمجید فخار	با مرتبه علمی استادیار	امضاء
۲- استاد مشاور پایان نامه	دکتر جعفر زعفرانی	با مرتبه علمی استاد	امضاء
۳- استاد داور داخل گروه	دکتر محمدرضا پوریای ولی	با مرتبه علمی دانشیار	امضاء
۴- استاد داور خارج گروه	دکتر علیرضا امینی هرندی	با مرتبه علمی استادیار	امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

تقدیم به

گرانبهاترین سرمایه های زندگی ام

پدر و مادر عزیزم

تقدیر و تشکر

الحمد لله الذی تحبب الی و هو غنی عنی

ستایش خدای را که به من اظهار کمال دوستی فرمود با آن که از من بی نیاز بود .

این مجموعه را مرهون راهنمایی های استاد گرامی و بزرگوارم جناب آقای دکتر فخار می دانم که فراتر از یک استاد راهنما در نهایت صبر و شکیبایی مرا تشویق و راهنمایی نموده اند. بر خود لازم می دانم از زحمات بی دریغ ایشان صادقانه سپاسگزاری کنم گرچه تشکر من قطره ای در برابر دریای بیکران محبت ها و کمک های ایشان می باشد. از درگاه ایزد منان توفیقی روز افزون برای ایشان خواهانم .

از جناب آقای دکتر زعفرانی که افتخار شاگردی ایشان را دارم کمال تشکر را دارم .

زحمات اساتید داور جناب آقای دکتر پوریای ولی داور داخلی و جناب آقای دکتر امینی داور خارجی ارج نهاده و از ایشان تشکر می کنم.

همچنین از زحمات سرکار خانم ها گرامی، غازی، فرهمند و معارکه در تدوین این پایان نامه یاری نموده اند سپاسگزارم .

چکیده

در این پایان نامه قضیه های نقطه ثابت، انتخاب و بهترین تقریب را برای نگاشت های چندمقداری با مقادیر محدب توسعه می دهیم. قضیه ی انتخاب برای نگاشت های چندمقداری غیرانبساطی در فضای ژئودوزی، تعدادی نتایج نقطه ثابت را برای فضای متریک درختی نتیجه می دهد و قضیه های بهترین تقریب و نقطه ثابت برای نگاشت های چندمقداری تقریباً نیم پیوسته ی پایینی، گسترش یافته ی نتایج نقطه ثابت و بهترین تقریب برای نگاشت های پیوسته ی نقطه ای مقدار در فضای متریک درختی می باشد.

واژه های کلیدی: فضای ابرمحدب، فضای ژئودوزی، فضای متریک درختی، قضیه نقطه ثابت، قضیه انتخاب، قضیه بهترین تقریب، نگاشت تقریباً نیم پیوسته ی پایینی.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

پیشگفتار

فضاهای متریک درختی برای اولین بار توسط تیتز[1] [۲۱] در سال ۱۹۷۷ معرفی شد. آکسوی[2] و موریزی[3] به بررسی رابطه‌ی نزدیک فضای متریک درختی و فضای ابرمحدب پرداختند و نشان دادند که هر فضای متریک درختی کامل یک فضای ابرمحدب می‌باشد. در سال ۲۰۰۴ کرک[4] [۱۶] قضایای نقطه ثابت را برای نگاشت‌های نقطه‌ای مقدار و به دنبال آن در سال ۲۰۰۶ آکسوی و خمسی[5] [۳]، این قضایا را برای نگاشت‌های چندمقداری بیان نمودند. معادل با برخی از این نتایج، در فضاهای ابرمحدب برای نگاشت‌های با مقادیر مجاز یا نگاشت‌های با مقادیر ابرمحدب خارجی وجود دارد. در این پایان نامه، قضیه‌های نقطه ثابت، انتخاب و بهترین تقریب را برای نگاشت‌های چندمقداری با مقادیر محدب توسعه می‌دهیم. قضیه‌ی انتخاب برای نگاشت‌های چندمقداری غیرانبساطی در فضای ژئودوزی، تعدادی نتایج نقطه ثابت را برای فضای متریک درختی نتیجه می‌دهد [۱] و قضیه‌های بهترین تقریب و نقطه ثابت برای نگاشت‌های چندمقداری تقریباً نیم پیوسته‌ی پایینی، گسترش یافته‌ی نتایج نقطه ثابت و بهترین تقریب برای نگاشت‌های پیوسته‌ی نقطه‌ای مقدار در فضای متریک درختی می‌باشد [۱۶]. این پایان نامه شامل پنج فصل است:

در فصل اول به مطالعه‌ی فضای ابرمحدب و به بیان قضیه‌ی انتخاب و نتایج نقطه

[1] J. Tits

[2] A. G. Aksoy

[3] B. Maurizi

[4] W. A. Kirk

[5] M. A. Khamsi

ثابت آن می‌پردازیم. همچنین به بیان تعاریف و مفاهیم مقدماتی و بعضی قضایا و نتایج کلیدی می پردازیم.

در فصل دوم به مطالعه‌ی فضای متریک درختی و بررسی خواص آن و ارتباط آن با فضای ابرمحدب می‌پردازیم. همچنین به معرفی فضای $CAT(k)$ پرداخته و به موازات آن قضایای نقطه ثابت و بهترین تقریب برای نگاشت‌های پیوسته‌ی نقطه‌ای مقدار در فضای متریک درختی را بیان می‌داریم.

در فصل سوم قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی در فضای متریک درختی کامل بیان می‌کنیم و در ادامه ثابت می‌کنیم که یک نگاشت پیوسته از یک فضای متریک درختی فشرده به خودش دارای خاصیت نقطه ثابت می‌باشد. و در انتها قضیه‌ی نقاط ثابت از نگاشت‌های لیپ‌شیتز یکنواخت در فضای متریک درختی بیان می‌داریم.

در فصل چهارم ابتدا قضیه‌ی انتخاب را برای نگاشت‌های غیرانبساطی چندمقداری در فضای متریک درختی و فضای ژئودوزی بیان می‌کنیم که تعدادی قضیه‌ی نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی در فضای متریک درختی نتیجه می‌دهد و در ادامه قضیه‌ی بهترین تقریب در فضای متریک درختی را برای نگاشت‌های چندمقداری که تقریباً نیم‌پیوسته‌ی پایینی هستند را بیان می‌داریم.

در آخر به عنوان کاربردی از قضایای نقطه ثابت برای نگاشت‌های غیرانبساطی در فضای متریک درختی کامل، قضیه‌ی یال ثابت برای نگاشت‌های یال نگه‌دار بیان می‌داریم.

فصل ۱

مفاهیم اولیه

۱—۱ فضای ابرمحدب

تعریف ۱.۱ . فرض کنید (M,d) یک فضای متریک و $\mathcal{M}$ خانواده‌ی زیرمجموعه‌های بسته و کراندار از M باشد. متریک هاسدورف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$d_H(A,B)=inf\{\varepsilon>\circ\ :\ A\subset N_\varepsilon(B)\ ;\ B\subset N_\varepsilon(A)\}.$$

که $N_\varepsilon(A)=\{x\in M\ :\ d(x,A)\leq\varepsilon\}$ و $d(x,A)=inf\{d(x,a);\ a\in A\}$.

تعریف ۲.۱ . یک فضای متریک (M,d) ابر محدب[۱] گفته می‌شود اگر برای هر گردایه $(B(x_\alpha,r_\alpha))_{\alpha\in\Gamma}$ از گوی‌های بسته در M که $d(x_\alpha,y_\beta)\le r_\alpha+r_\beta$، برای هر $\alpha,\beta\in\Gamma$، داشته باشیم

$$\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha,r_\alpha)\neq\emptyset.$$

گزاره ۳.۱ . هر فضای ابرمحدب کامل می‌باشد.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

فرض کنید (M,d) یک فضای متریک و A یک زیرمجموعه‌ی کراندار غیر تهی از M باشد. قرار می‌دهیم

$$co(A)=\bigcap\{B\ :\ A\subseteq B \text{ و } B \text{ یک گوی بسته}\}.$$

زیرمجموعه‌ی A، مجموعه‌ی مجاز[۲] نامیده می‌شود اگر $co(A)=A$ (یعنی A مقطع گوی‌های بسته می‌باشد). خانواده‌ی همه‌ی مجموعه‌های مجاز با $A(M)$ نشان داده می‌شود.

تعریف ۴.۱ . یک زیرمجموعه‌ی C از فضای متریک M ابرمحدب خارجی[۳] نسبت به M گفته می‌شود اگر برای هر گردایه $(B(x_\alpha,r_\alpha))_{\alpha\in\Gamma}$ از گوی‌های بسته در M که $d(x_\alpha,y_\beta)\le r_\alpha+r_\beta$ و $d(x_\alpha,C)\le r_\alpha$ داشته باشیم

$$C\cap\Big(\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha,r_\alpha)\Big)\neq\emptyset$$

[۱] hyperconvex

[۲] admissible

[۳] externally hyperconvex

گزاره ۱.۵ . ۱. هر زیرمجموعه‌ی مجاز از یک فضای ابرمحدب M، ابرمحدب خارجی نسبت به M می‌باشد.

۲. زیر مجموعه‌ی ابرمحدب خارجی از M مجموعه‌ی تقریبی [۴] می‌باشد. (یعنی، اگر C ابرمحدب خارجی نسبت به M باشد و اگر $x \in M$، آن‌گاه $c^* \in C$ وجود دارد به قسمی که $(d(x,c^*) = d(x,C)$.)

اثبات . ۱. فرض کنید $C \in \mathcal{A}(M)$ در نتیجه $C = \bigcap B(x_i,r_i)$. همچنین فرض کنید برای هر گردایه $(B(x_\alpha,r_\alpha))_{\alpha\in\Gamma}$ از گوی‌های بسته در M که $d(x_\alpha,y_\beta) \leq r_\alpha + r_\beta$ و $d(x_\alpha,C) \leq r_\alpha$. به ازای هر $x \in C$ داریم

$$d(x_\alpha,x_i) \leq d(x_\alpha,x) + d(x,x_i) \leq r_\alpha + r_i.$$

چون M ابرمحدب است در نتیجه

$$\bigcap B(x_i,r_i) \cap (\bigcap_{\alpha\in\Gamma} B(x_\alpha,r_\alpha)) \neq \emptyset.$$

۲. خانواده‌ی $\{B(x,d(x,C)+\frac{1}{i}) \ : \ x \in M\}$ در نظر می‌گیریم. چون M ابرمحدب خارجی‌است، پس

$$C \cap (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B(x,d(x,C)+\frac{1}{i})) \neq \emptyset.$$

حال فرض کنید $c^* \in C \cap (\bigcap_{i\in\mathbb{N}} B(x,d(x,C)+\frac{1}{i}))$. در این صورت $d(c^*,x) \leq d(x,C)$ و $c^* \in C$. از طرف دیگر با توجه به تعریف $d(x,C)$ داریم $d(c^*,x) \geq d(x,C)$. بنابراین $d(c^*,x) = d(x,C)$ و $c^* \in C$ نقطه‌ی مورد نظر است. ■

[۴] proximinal

فرض کنید M یک فضای متریک و $T : M \to M$. گوییم نگاشت T لیپ‌شیتز است اگر یک عدد نامنفی k وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $x, y \in C$ داشته باشیم

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y).$$

در صورتی که $k = ۱$ باشد T غیرانبساطی نامیده می‌شود.

تعریف ۶.۱ . فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و $T : M \to M$ غیرانبساطی باشد. گوییم M دارای مدار کراندار است اگر برای هر $x \in M$ یک عدد $M(x)$ وجود داشته باشد به قسمی که برای هر $n \geq ۱$، $d(x, T^n(x)) \leq M(x)$.

تعریف ۷.۱ . فرض کنید X, Y دو فضای توپولوژی و $f : X \to Y$ یک نگاشت پیوسته‌ی یک به یک باشد. فرض کنید Z تصویر $f(X)$ باشد. در این صورت، تابع $f' : X \to Z$ که از تحدید حوزه مقادیر f بدست می‌آید دوسویی است. اگر f' هومئومورفیسمی بین X و Z باشد، می‌گوییم نگاشت $f : X \to Z$ یک نشاننده‌ی توپولوژیک، یا مختصراً یک نشاننده‌ی X در Y نامیده می‌شود.

گزاره ۸.۱ . هر فضای متریک کامل M ایزومتریک با یک زیرمجموعه‌ی بسته‌ی یک فضای باناخ می‌باشد.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

تعریف ۹.۱ . فرض کنید (M, d) یک فضای متریک و $S \subseteq M$ و $r : M \to S$ یک نگاشت غیرانبساطی باشد به قسمی که به ازای هر $x \in S$ داشته باشیم $r(x) = x$. در این صورت به نگاشت r یک درون‌بر[۵] غیرانبساطی گویند و S درون‌بر M نامیده می‌شود.

[۵] nonexpansive retraction

تعریف ۱۰.۱ . فضای متریک (M,d) را تزریقی[۶] گوییم هر گاه برای هر فضای متریک (X,φ) و زیرفضای $Y \subseteq X$ و نگاشت غیرانبساطی $f : Y \to M$ یک گسترش غیرانبساطی $\tilde{f} : X \to M$ موجود باشد.

قضیه ۱۱.۱ . فضای متریک (M,d) ابرمحدب است اگر و فقط اگر تزریقی باشد.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

بنابراین با توجه به این قضیه و تعریف فضای تزریقی، اگر M ابرمحدب و در فضای متریک X نشانده شده باشد و $I : M \to M$، آن‌گاه یک گسترش غیرانبساطی $\tilde{I} : X \to M$ موجود است. در این صورت M یک درون‌بر فضای X می‌باشد.

تعریف ۱۲.۱ . فرض کنید (M,d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq M$ کراندار و غیرتهی باشد. تعریف می‌کنیم

۱. $diam\,(A) = \sup\{d\,(x,y)\ :\ x,y \in A\}$.

۲. $r_x(A) = sup\{d(x,y)\ :\ y \in A,\ x \in M\}$.

۳. $r\,(A) = \inf\{r_x\,(A)\ :\ x \in A\}$.

۴. $r_M\,(A) = \inf\{r_x\,(A)\ :\ x \in M\}$.

لم ۱۳.۱ . فرض کنید M یک فضای ابرمحدب باشد و $A \subseteq M$ کراندار و غیرتهی باشد. در این صورت

۱. $co(A) = \bigcap\{B(x,r_x(A))\ :\ x \in M\}$.

۲. $r_x(co(A)) = r_x(A)$ به ازای هر $x \in M$.

[۶] injective

۳. $r_M(co(A)) = r_M(A)$.

۴. $r_M(A) = \frac{1}{2} diam\,(A)$.

۵. $diam\,(coA) = diam\,(A)$.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۴.۱ . اگر M یک فضای ابرمحدب باشد و $A \in \mathcal{A}(M)$، آن‌گاه A ابرمحدب است.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۵.۱ . اگر M یک فضای ابرمحدب کراندار و $T : M \to M$ غیرانبساطی باشد، آن‌گاه $Fix(T) \neq \emptyset$ (مجموعه‌ی نقاط ثابت T) و ابرمحدب می‌باشد.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

تعریف ۱۶.۱ . فرض کنید (M,d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq M$. در این صورت برای هر $\varepsilon > 0$ تعریف می‌کنیم

$$A + \varepsilon = N_\varepsilon(A) = \bigcup_{x \in A} B(x,\varepsilon)$$

گزاره ۱۷.۱ . اگر M یک فضای ابرمحدب باشد و $A \in \mathcal{A}(M)$ و $\varepsilon > 0$، آن‌گاه $N_\varepsilon(A) \in \mathcal{A}(M)$. در واقع اگر $A = \bigcap_{i\in I} B(x_i, r_i)$، آن‌گاه

$$A + \varepsilon = N_\varepsilon(A) = \bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i + \varepsilon).$$

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۱۸.۱ . فرض کنید M یک فضای ابرمحدب و $T : M \to M$ غیرانبساطی باشد و $\varepsilon > 0$. در این صورت مجموعه‌ی زیر ابرمحدب است

$$F_\varepsilon(T) = \{x \in M : \ d(x, T(x)) < \varepsilon\}.$$

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

قضیه ۱۹.۱ .(قضیه‌ی شودر[۷]). فرض کنید K یک زیرمجموعه‌ی محدب فشرده از فضای باناخ X و $f : K \to K$ پیوسته باشد. در این صورت f حداقل دارای یک نقطه ثابت است.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

گزاره ۲۰.۱ . اگر X یک فضای باناخ و $A \subseteq X$ فشرده باشد، آن‌گاه $\overline{conv}(A)$ فشرده است.

اثبات . به [۱۳] رجوع کنید. ■

۱—۲ قضیه‌ی انتخاب در فضای ابرمحدب

در این بخش قضیه‌ی انتخاب را در فضای ابرمحدب بیان می‌کنیم.

در سرتاسر این بخش $\mathcal{E}(M)$ نشان دهنده‌ی خانواده‌ی زیرمجموعه‌های کراندار غیرتهی ابرمحدب خارجی از M که همراه با متریک هاسدورف یک فضای متریک می‌باشد.

قضیه ۲۱.۱ . فرض کنید M یک فضای ابرمحدب باشد و $T^* : M \to \mathcal{E}(M)$. در این صورت یک نگاشت $T : M \to M$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in M$، $T(x) \in T^*(x)$ و

[۷] Schauder theorem

برای هر $x, y \in M$ داریم

$$d(T(x), T(y)) \leq d_H(T^*(x), T^*(y)).$$

اثبات . فرض کنید $\mathcal{F}$ نشان دهنده‌ی گردایه‌ای از همه‌ی جفت‌های (A, T) به قسمی که برای هر $a \in A$، و $x, y \in A$ داریم

$$\begin{cases} T : A \to M, \\ T(a) \in T^*(a), \\ d(T(x), T(y)) \leq d_H(T^*(x), T^*(y)) \end{cases}$$

توجه کنید که $\mathcal{F} \neq \emptyset$. چون $(\{x_\circ\}, T) \in \mathcal{F}$ برای هر انتخاب $x_\circ \in M$ و $T(x_\circ) \in T^*(x_\circ)$.

یک رابطه‌ی ترتیبی روی $\mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(A_1, T_1) \preceq (A_2, T_2) \Leftrightarrow A_1 \subset A_2 \ , \ T_2|_{A_1} = T_1.$$

اگر $\{(A_\alpha, T_\alpha)\}$ یک زنجیر صعودی در $(\mathcal{F}, \preceq)$ باشد، آن‌گاه $(\bigcup_\alpha A_\alpha, T) \in \mathcal{F}$، جایی‌که $T|_{A_\alpha} = T_\alpha$. به وضوح این عضو یک کران بالا برای این خانواده نسبت به ترتیب تعریف شده می‌باشد. بنابراین طبق لم زورن این زنجیر دارای عضو ماکسیمال $\{(A, T)\}$ در $(\mathcal{F}, \preceq)$ است.

نشان می‌دهیم $A = M$. فرض کنید چنین نباشد و $x_\circ \in M \setminus A$. قرار می‌دهیم $\tilde{A} = A \cup \{x_\circ\}$ و مجموعه‌ی زیر را در نظر می‌گیریم

$$J = \bigcap_{x \in A} B\left(T(x) ; d_H(T^*(x), T^*(x_\circ))\right) \cap T^*(x_\circ).$$

چون برای هر $x \in M$ داریم $T^*(x_\circ) \in \varepsilon(M)$، لذا $J \neq \emptyset$ اگر و فقط اگر برای هر $x \in A$،

$$d(T(x), T^*(x_\circ)) \leq d_H(T^*(x), T^*(x_\circ)). \qquad (1)$$

همچنین، چون $T^*(x_\circ)$ یک زیرمجموعه‌ی تقریبی از M می‌باشد، رابطه‌ی (۱) درست است اگر و فقط اگر برای هر $x \in A$،

$$B(T(x); d_H(T^*(x), T^*(x_\circ)) \cap T^*(x_\circ) \neq \emptyset.$$

با توجه به تعریف متریک هاسدورف برای هر $\varepsilon > \circ$

$$T^*(x) \subset N_{d_H(T^*(x),T^*(x_\circ))+\varepsilon}(T^*(x_\circ)).$$

فرض می‌کنیم $T(x) \in T^*(x)$. بنابراین برای هر $\varepsilon > \circ$،

$$B(T(x); d_H(T^*(x), T^*(x_\circ)) + \varepsilon) \cap T^*(x_\circ) \neq \emptyset.$$

چون $T^*(x_\circ)$ یک زیرمجموعه‌ی تقریبی از M است، در نتیجه

$$B(T(x); d_H(T^*(x), T^*(x_\circ)) \cap T^*(x_\circ) \neq \emptyset.$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $J \neq \emptyset$. $y_\circ \in J$ را انتخاب می‌کنیم و تعریف می‌کنیم

$$\tilde{T}(x) = \begin{cases} y_\circ & x = x_\circ \\ T(x) & x \in A \end{cases}$$

چون

$$d(\tilde{T}(x_\circ), \tilde{T}(x)) = d(y_\circ, T(x)) \leq d_H(T^*(x), T^*(x_\circ))$$

لذا $(A \cup \{x_\circ\}, \tilde{T}) \in \mathcal{F}$ که با ماکزیمال بودن (A, T) در تناقض است. بنابراین $A = M$. ■

نتیجه ۲۲.۱ . فرض کنید M یک فضای ابرمحدب و کراندار باشد و $T^* : M \to \mathcal{E}(M)$ غیرانبساطی باشد. در این صورت T^* دارای نقطه ثابت است، یعنی $x \in M$ وجود دارد به قسمی

که $x \in T^*(x)$.

اثبات . اگر T^* غیرانبساطی باشد، آن‌گاه با توجه به قضیه‌ی ۲۱.۱ دارای انتخاب غیرانبساطی T می‌باشد. وجود نقطه ثابت برای نگاشت T از قضیه‌ی ۱۵.۱ نتیجه می‌شود. بنابراین $x = T(x) \in T^*(x)$. ■

قضیه ۲۳.۱ . فرض کنید M یک فضای ابرمحدب باشد و $T^* : M \to \mathcal{E}(M)$ غیرانبساطی باشد و فرض کنید $Fix(T^*) \neq \emptyset$. در این صورت یک نگاشت غیرانبساطی $T : M \to M$ وجود دارد به قسمی که برای هر $x \in M$، $T(x) \in T^*(x)$ و $Fix(T) = Fix(T^*)$.

اثبات . فرض کنید $\mathcal{F}$ نشان دهنده‌ی گردایه‌ای از همه‌ی جفت‌های (A, T) باشد، که $Fix(T^*) \subset A$ و برای هر $x, y, a \in A$ و هر $x \in Fix(T^*)$ داریم

$$\begin{cases} T : A \to M, \\ T(a) \in T^*(a), \\ T(x) = x, \\ d(T(x), T(y)) \leq d(x, y), T^*(y)) \end{cases}$$

با توجه به فرض $(Fix(T^*), Id) \in \mathcal{F}$، بنابراین $\mathcal{F} \neq \emptyset$. یک رابطه‌ی ترتیبی روی $\mathcal{F}$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$(A_1, T_1) \preceq (A_2, T_2) \Leftrightarrow A_1 \subset A_2,\ T_2|_{A_1} = T_1.$$

اگر $\{(A_\alpha, T_\alpha)\}$ یک زنجیر صعودی در $(\mathcal{F}, \preceq)$ باشد، آن‌گاه $(\bigcup_\alpha A_\alpha, T) \in \mathcal{F}$، جایی‌که $T|_{A_\alpha} = T_\alpha$. به وضوح این عضو یک کران بالا برای این خانواده نسبت به ترتیب تعریف شده می‌باشد. بنابراین طبق لم زورن این زنجیر دارای عضو ماکسیمال $\{(A, T)\}$ در $(\mathcal{F}, \preceq)$