بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه لرستان
دانشکده علوم ریاضی
گروه ریاضی

عنوان:

ویژگی‌های تقریبی، نرم‌های عملگری- القایی روی فضاهای هیلبرت

نگارش:

فاطمه امانی

استاد راهنما:

دکتر ناصر عباسی

استاد مشاور:

دکتر امیرقاسم غضنفری

پایان‌نامه جهت دریافت درجه کارشناسی ارشد

رشته ریاضی محض

گرایش آنالیز

پائیز ۱۳۹۲

تقدیم به بهترین هایم:

پدرم

که عالمانه به من آموخت تا چگونه در عرصه زندگی، با غرور ایستادگی را تجربه نمایم؛

مادرم

دریای بی کران فداکاری و عشق که وجودم برایش همه رنج بود و وجودش برایم همه مهر؛

همسرم

که مسیح وار با صبرش در تمامی لحظات رفیق راه بود و امید آینده.

با تشکر

از استاد راهنما جناب آقای دکتر ناصر عباسی و استاد مشاور جناب آقای دکتر امیرقاسم غضنفری که در جهت انجام و تدوین هرچه بهتر این پایان‌نامه مرا یاری نمودند.

از استاد گرامی جناب آقای دکتر علی ثامری‌پور که زحمت داوری این پایان‌نامه را عهده‌دار شدند.

از تمام کسانی که در انجام این پایان‌نامه به بنده کمک کردند.

نام خانوادگی: امانی	**نام:** فاطمه
عنوان پایان‌نامه: ویژگی‌های تقریبی، نرم‌های عملگری-القایی روی فضاهای هیلبرت	
استاد راهنما: دکتر ناصر عباسی **استاد مشاور:** دکتر امیرقاسم غضنفری	
درجه تحصیلی: کارشناسی ارشد **محل تحصیل:** دانشگاه لرستان **تاریخ فارغ التحصیلی:** پائیز ۱۳۹۲	**رشته:** ریاضی محض **دانشکده:** علوم پایه **تعداد صفحه:** ۷۵
کلید واژه‌ها: تقریب L^2، نرم تجربی، فضاهای هیلبرت با بازآفرینی هسته‌ها، آنالیزی از M-برآورد کننده‌ها.	

چکیده:

ما در این پایان‌نامه به یک کلاس از عملگرهای القایی نرم‌دار می‌پردازیم. بدین صورت که جایگزین‌هایی با بعد متناهی برای L^2-نرم درنظر می‌گیریم، و خواص تقریب روی زیرفضاهای هیلبرت از (L^2) را مطالعه می‌کنیم. این کلاس شامل بازآفرینی هسته فضای هیلبرت (RKHS) خواهد بود. نتایج به‌طور ضمنی برای تجزیه و تحلیل پایه روی فضاهای خطی با بعد متناهی خواهد بود و مسائلی در این زمینه را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فهرست مطالب

نمادها

ما در سرتاسر این نوشتار علایم زیر را به‌کار می‌بریم.

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت p، $\mathbb{S}_+^p$ را برای نمایش مخروط ماتریس‌های نیمه‌معین مثبت $p \times p$ استفاده می‌کنیم.

برای هر ماتریس مربعی A فرض می‌کنیم که $\lambda_{\min}(A)$ و $\lambda_{\max}(A)$ مقادیر ویژه‌ی مینیمال و مقادیر ویژه ماکسیمال را به‌ترتیب نشان بدهد.

از دو $\sqrt{A}$ و $A^{\frac{۱}{۲}}$ برای اشاره کردن به ریشه‌های دوم از $A \in \mathbb{S}_+^p$ استفاده می‌کنیم.

از $\{x_k\} = \{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ برای نمایش یک دنباله‌ی شمارش‌پذیری از عناصر استفاده خواهیم کرد.

نمادهای $\ell_۲ = \ell_۲(N)$ برای اشاره به فضای دنباله هیلبرت به‌کار می‌روند که از دنباله‌هایی با مقادیر حقیقی تشکیل شده‌اند و با حاصل‌ضرب داخلی $\langle \{x_k\}, \{y_k\} \rangle := \sum_{k=۱}^{\infty} x_k y_k$ تجهیز شده‌اند.

نرم متناظر $\ell_۲$ با نماد $\|\cdot\|_{\ell^۲}$ نمایش داده می‌شود.

مقدمه

در این پایان‌نامه، ما مسایلی برای حالت‌هایی از فضای هیلبرت $\mathcal{H}$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.
ایجاد تقریب‌هایی با L^2-نرم و اندازه‌ی $\mathbb{P}$ که بعدی متناهی دارد و مطالعه کیفیت تقریب بر روی گوی واحد بعضی از فضاهای هیلبرت $\mathcal{H}$ سودمند هستند و در L^2 نشانده می‌شود. برای مثال، در نظریه تقریب و آمار ریاضی مجموعه‌ای از نقاط طراحی شده n در x، اغلب تعریف جایگزینی برای L^2-نرم است.

در جایگذاری دیگر، تعدادی پایه متعامد یکه از $L^2(x, \mathbb{P})$ مفروض است و تقریب پایه روی مجموعه مربعات اولین ضرایب فوریه تعمیم یافته n تعریف می‌شود. برای مسایلی از این‌گونه، رسیدن به فهم دقیق از درستی تقریب با جملاتی از اندازه n و دیگر پارامترهای مسأله جالب توجه است.
یکی دیگر از اهداف ما، مطالعه این است که چگونه به نحو مطلوب $\|f\|_{\phi_n}$ را با $\|f\|_{L^2}$ بر روی گوی واحدی از $\mathcal{H}$ به‌عنوان یک تابع از n، و پارامترهای دیگر مسأله تقریب زنیم.
به‌منظور اندازه‌گیری کیفیتی از تقریب روی $\mathcal{H}$، کمیت $R_\phi(\varepsilon)$ را روی گوی واحدی از $\mathcal{H}$ درنظر می‌گیریم.
انگیزه ما دستیابی درست به کرانه‌های بالایی بر روی R_ϕ است. البته، یک متغیر مستقل نسبتاً پیشروی مستقیم را می‌توان برای انتقال چنین کرانه‌های بالایی با کرانه‌های پایین روی کمیت مربوطه $\underline{T}_\phi(\varepsilon)$ به‌کار برد.

ما همچنین می‌توانیم برای تصور کاملی از رابطه میان نیم‌نرم $\|\cdot\|_\phi$ و L^2-نرم، زوج $(T_\phi, \underline{R}_\phi)$ را نسبت دهیم. روش ما نیز برای این کمیت‌ها عملی است ولی شیوه‌مان را به $(R_\phi, \underline{T}_\phi)$ محدود می‌کنیم.
باید توجه داشت که نمونه‌های خاص و مشخص از عملگرهای خطی ϕ و تابع‌های وابسته مورد

مطالعه و بررسی قرار می‌گیرد.

در نمونه‌ی خاص $\varepsilon = 0$، $R_{\phi(0)}$ کمیتی است که مطابق با قطر مربع از $B_{\mathcal{H}} \cap \ker(\phi)$ که در L^2-نرم سنجیده شده را داریم. کمیت‌هایی از این نوع در نظریه تقریب استاندارد می‌باشند. برای نمونه در این زمینه گلفند[1] و کلموگروف[2] کار کرده‌اند.

بهره‌ی اولیه ما، در این‌جا، جایگذاری بسیار کلی با $\varepsilon > 0$ است، برای فاکتورهای اضافی که در فرآیند کنترل $R_\phi(\varepsilon)$ دخیل هستند.

در آمار، آثاری روی این حالت وجود دارد که ϕ یک عملگر نمونه‌گیری است، که هر تابع f را در یک بردار از نمونه‌های n تصویر می‌کند و نرم $\|\cdot\|_\phi$ مطابق با L^2-نرم با این مثال‌ها تعریف می‌شود. زمانی‌که نمونه‌ها به‌طور تصادفی انتخاب می‌شوند، در این‌صورت شیوه‌های حاصل از نظریه مراحل تجربی را می‌توان به‌کار برد.

نتایج ما، پیامدهایی برای این‌گونه جایگذاری از نمونه‌گیری تصادفی را دارد.

ما در این مسیر، کلاسی از نرم‌های عملگری-القایی را که شامل بازآفرینی هسته فضای هیلبرت (RKHS[3]) است را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و خواص تقریب روی زیرفضاهای هیلبرت از (L^2) را مطالعه می‌کنیم و مسایلی در زمینه تجزیه و تحلیل روی فضای تقریب با بعد متناهی را رسیدگی می‌کنیم.

ما در این پایان‌نامه، مقاله زیر را مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم:

A.A. Amini and M.J. Wainwright, ”Approximation properties of certain operator-induced norms on Hilbert spaces, Journal of approximation theory”, Vol. **164**, (2012) 320–345.

[1] Gelfand
[2] Kolomogrov
[3] Reproducing kernel Hilbert space

فصل اول

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱.۱ تعاریف مقدماتی

این فصل شامل تعاریف و مفاهیمی است که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

تعریف ۱.۱.۱. یک نیم‌نرم بر فضای برداری X تابعی است حقیقی مانند ρ بر X به‌طوری‌که به‌ازای هر x و y در X و جمیع اسکالرهای α،

۱) $\rho(x) \geq ۰$

۲) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\rho(x)$

۳) $\rho(x+y) \leq \rho(x) + \rho(y)$ (خاصیت زیرجمعی)

نیم‌نرم ρ در صورت صدق کردن در

۴) $x \neq ۰ \Rightarrow \rho(x) \neq ۰$

یک نرم است.

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم H یک فضای برداری مختلط باشد و به هر زوج مانند (x,y) از $H \times H$ عنصری از $\mathbb{C}$ مانند $\langle x,y\rangle$ منسوب شده باشد به‌طوری‌که:

۱) $\langle x,y\rangle = \langle\overline{y,x}\rangle$.

۲) اگر $x_۱, x_۲, y \in H$، $\langle x_۱ + x_۲, y\rangle = \langle x_۱, y\rangle + \langle x_۲, y\rangle$.

۳) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x,y\rangle$ که $x,y \in H$ و α یک اسکالر است.

۴) $\langle x,x\rangle \geq ۰$ که $x \in H$.

۵) $\langle x,x\rangle = ۰$ اگر و فقط اگر $x = ۰$.

آن‌گاه H را یک فضای ضرب داخلی می‌گویند و تعریف می‌کنیم $\|x\| = (\langle x, x\rangle)^{\frac{۱}{۲}}$.

تعریف ۳.۱.۱. فرض کنیم f یک تابع بر بازه (a, b) باشد. در این‌صورت f را قطعه‌ای پیوسته خوانیم هرگاه تابع f در همه‌ی نقاط جز در مجموعه‌ای متناهی از نقاط بازه (a, b) پیوسته، و در نقاط ناپیوستگی خود دارای حد یک طرفه باشد.

دسته همه توابع قطعه‌ای پیوسته در بازه (a, b) را با $C_p(a, b)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴.۱.۱. فرض کنیم f و g دو تابع در فضای $C_p(a, b)$، و w یک تابع پیوسته و مثبت بر بازه‌ی (a, b) باشد.

۱) حاصل‌ضرب داخلی f و g بر بازه (a, b) نسبت به تابع وزن w را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) d\,x.$$

۲) نرم f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{\frac{۱}{۲}}.$$

۳) دو تابع f و g را نسبت به تابع وزن w بر بازه (a, b) متعامد خوانیم هرگاه؛

$$\langle f, g\rangle = ۰.$$

۴) دو تابع f و g را متعامد ساده خوانیم هرگاه f و g متعامد باشند و به‌ازای هر $x \in (a, b)$؛

$$w(x) = ۱.$$

۵) تابع f را نرمال شده خوانیم هرگاه؛

$$\|f\| = ۱.$$

۶) دنباله توابع $\{\psi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را یک مجموعه متعامد خوانیم هرگاه این توابع دوبه‌دو متعامد باشند. به‌عبارت دیگر، به‌ازای هر $m \neq n$ داریم:

$$\langle \psi_m, \psi_n \rangle = ۰.$$

۷) دنباله توابع $\{\psi_n\}_{n=۰}^{\infty}$ را یک مجموعه متعامد یکه خوانیم هرگاه یک مجموعه متعامد باشد و نیز به‌ازای هر n؛

$$\|\psi_n\| = ۱.$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم V یک فضای برداری از توابع، و L یک عملگر خطی بر V به‌صورت $L : V \to V$ باشد. در این‌صورت λ را یک مقدار ویژه L نامیم هرگاه $f \in V$ای موجود باشد که $L(f) = \lambda f$ و در این‌صورت f را نیز یک تابع ویژه نامیم.

تعریف ۶.۱.۱. یک فضای ضرب داخلی X را یک فضای هیلبرت می‌نامیم، هرگاه X نسبت به نرم تولید شده توسط ضرب داخلی کامل باشد.

تعریف ۷.۱.۱. فضای نرم‌دار X، فضایی برداری می‌باشد، که یک نرم روی آن تعریف می‌شود، فضای نرم‌دار کامل یا باناخ، فضایی است، که هر دنباله کشی در آن همگرا باشد.

تعریف ۸.۱.۱. فرض کنیم f تابعی دلخواه متعلق به $C_p(a,b)$ باشد، و $\{\phi_n\}$ مجموعه‌ای متعامد در $C_p(a,b)$ با تابع وزن w باشد، همچنین $f(x)$ به‌ازای هر x متعلق به بازه (a,b) را بتوان به‌وسیله

یک سری نامتناهی نشان داد، که در همه نقاط به‌جز احتمالاً تعدادی متناهی نقطه در بازه (a,b) به $f(x)$ همگراست، و به‌صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$f(x) = \sum_{k=۱}^{\infty} c_k \phi_n$$

با ضرب دو طرف معادله در $w(x)\phi_n(x)$ و انتگرال‌گیری روی (a,b) داریم:

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\|\phi_n\|^۲}.$$

c_nها را ضرایب فوریه تابع f نسبت به مجموعه $\{\phi_n\}$ و سری فوق را سری فوریه $f(x)$ گویند.

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم $\{f_n(x)\}$ دنباله‌ای از توابع متعلق به کلاس $L^۲(a,b)$ باشد، اگر تابع $f \in L^۲(a,b)$ موجود باشد، به‌طوری‌که $\|f - f_n\|_۲ \to ۰$ آن‌گاه گوییم که $\{f_n\}$ در میانگین به f همگراست.

تعریف ۱۰.۱.۱. اگر هر سطر (یا ستون) ماتریس متناوب باشد و در هر دوره تناوب فقط یک کسر به صفر رسیده از عناصر، بزرگ باشد؛ ماتریس را متناوب پراکنده می‌نامیم.

۲.۱ تعاریف پیچیدگی‌های رادمیچر موضعی

ما در این‌جا، $(\mathcal{X}, P)$ را فضای احتمال درنظر می‌گیریم. همچنین $\mathcal{F}$ را یک کلاس از توابع اندازه‌پذیر از $\mathcal{X}$ به $\mathbb{R}$ علامت‌گذاری می‌کنیم. مجموعه $X_۱, \ldots, X_n$ را متغیرهای تصادفی مستقل که بر طبق P توزیع شده‌اند، نمادگذاری می‌کنیم. فرض کنیم $\sigma_۱, \sigma_۲, \ldots, \sigma_n$، متغیرهای تصادفی رادمیچر[1] مستقل باشند، به‌طوری‌که متغیرهای تصادفی مستقل برای هر

$$Pr(\sigma_i = ۱) = Pr(\sigma_i = -۱) = \frac{۱}{۲}.$$

[1] Rademacher

تعریف ۱.۲.۱. برای یک تابع $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$، تعریف می‌کنیم:

$$P_n f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \ \ , \ \ Pf = \mathbb{E}f(X) \ \ , \ \ R_n f = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sigma_i f(X_i).$$

برای یک کلاس $\mathcal{F}$، مجموعه زیر را تعریف می‌کنیم:

$$R_n\mathcal{F} = \sup_{f\in\mathcal{F}} R_n f.$$

تعریف ۲.۲.۱. $\mathbb{E}_\sigma$ امید نسبت به متغیرهای تصادفی $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$، که محدود روی هم متغیرهای تصادفی است.

میانگین رادمیچر از $\mathcal{F}$، $\mathbb{E}R_n\mathcal{F}$ است.

میانگین رادمیچر تجربی (یا شرطی) از $\mathcal{F}$ به‌صورت زیر است:

$$\mathbb{E}_\sigma R_n\mathcal{F} = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}\sum_{i=1}^{n}\sigma_i f(X_i) \mid X_1, \ldots, X_n\right).$$

تعریف ۳.۲.۱. غلاف* از $\mathcal{F}$ حول f_0 به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{star}(\mathcal{F}, f_0) = \left\{f_0 + \alpha(f - f_0) : \ f \in \mathcal{F}, \ \alpha \in [0, 1]\right\}.$$

تعریف ۴.۲.۱. تابع $\psi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ زیرریشه است، اگر تابعی نامنفی و غیرصعودی باشد و اگر $r \mapsto \psi(r)/\sqrt{r}$ برای هر $r > 0$ غیرصعودی باشد. تابع‌های زیرریشه نابدیهی، توابع زیرریشه‌ای هستند که $\psi \equiv 0$ نباشد.

تعریف ۵.۲.۱. کلاس زیان وابسته به $\mathcal{F}$ را کلاس توابع نامنفی به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\ell_{\mathcal{F}} = \{\ell_f : \ f \in \mathcal{F}\} = \{(x, y) \mapsto \ell(f(x), y) : \ f \in \mathcal{F}\}.$$

تعریف ۶.۲.۱. نگاشت‌های خطی از X به توی میدان اسکالر را تابعک‌های خطی می‌نامند.

تعریف ۷.۲.۱. تابع $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ را که در آن $-\infty \leq a < b \leq \infty$، محدب می‌گوییم، هرگاه به‌ازای هر $x_1, x_2 \in (a,b)$ و $0 \leq \lambda \leq 1$ داشته باشیم:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

تعریف ۸.۲.۱. کلاس هسته رگرسیون، رده‌ای از توابع هم‌ارزی با هسته معین مثبت $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ می‌باشد.

تعریف ۹.۲.۱. نقطه $x_0 \in X$ را برای تابع $f: X \to Y$ یک نقطه ثابت می‌گویند، هرگاه:

$$f(x_0) = x_0.$$

تعریف ۱۰.۲.۱. اگر z_1، z_2، ... و z_n و w_1، w_2، ... و w_n اعدادی مختلط باشند، آن‌گاه نامساوی کشی-شوارتز[۲] به‌صورت زیر است:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k\right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |w_k|^2\right).$$

اگر $B = \sum_{k=1}^{n} |w_k|^2$ و $C = \sum_{k=1}^{n} z_k \overline{w}_k$ باشند، آن‌گاه تساوی در نامساوی کشی-شوارتز وقتی برقرار است که به‌ازای هر k، $1 \leq k \leq n$ داشته باشیم:

$$Bz_k = Cw_k.$$

[۲] Cauchy-Schwartz

تعریف ۱.۲.۱۱. تابع $f:(X,d)\to(Y,\rho)$ در شرط لیپ‌شیتز[۳] از مرتبه α ($\alpha>0$) صدق می‌کند. هرگاه عدد مثبتی مانند M موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$\forall x,y\in X,\quad \rho(f(x),f(y))\leq M(d(x,y))^{\alpha}.$$

اگر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ باشد، تعریف فوق به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\quad |f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^{\alpha}.$$

تعریف ۱.۲.۱۲. اگر تابع f در شرط لیپ‌شیتز از مرتبه $\alpha=1$ و $M<1$ صدق کند، آن‌گاه f را یک تابع انقباض گویند.

قضیه ۱.۲.۱۳. **(نامساوی ینسن[۴])** *فرض کنیم μ یک اندازه مثبت بر σ-جبر m در مجموعه Ω باشد به‌طوری‌که $\mu(\Omega)=1$. هرگاه f یک تابع حقیقی در $L^1(\mu)$ بوده و به‌ازای هر $x\in\Omega$، $a<f(x)<b$ و φ بر (a,b) محدب باشد، آن‌گاه:*

$$\varphi\left(\int_{\Omega}f\,d\mu\right)\leq\int_{\Omega}(\varphi\circ f)\,d\mu.$$

تعریف ۱.۲.۱۴. **(نامساوی هولدر[۵])** اگر x_1، x_2، ... و x_n اعداد حقیقی مثبت باشند، هرگاه $r,s>1$ و $\frac{1}{r}+\frac{1}{s}=1$ آن‌گاه:

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^r\right)^{\frac{1}{r}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^s\right)^{\frac{1}{s}}.$$

---

[۳] Lipshitz
[۴] Jensen
[۵] Holder

۳.۱ تعاریف مربوط به فضای هیلبرت و $L^{۲}$

تعریف ۱.۳.۱. اندازه احتمال $\mathbb{P}$ با محمل فشرده روی مجموعه $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ مفروض است، فضای $L^{۲}(\mathcal{X}, \mathbb{P})$، به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L^{۲}(\mathcal{X}, \mathbb{P}) := \left\{ f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \mid \|f\|_{L^{۲}(\mathcal{X},\mathbb{P})} < \infty \right\}, \tag{۱.۳.۱}$$

که در آن نرم فضای $L^{۲}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|f\|_{L^{۲}(\mathcal{X},\mathbb{P})} := \sqrt{\int_{\mathcal{X}} f^{۲}(x) d\,\mathbb{P}(x)}$$

$L^{۲}$-نرم با اندازه $\mathbb{P}$ تعیین می‌شود.

تعریف ۲.۳.۱. فرض کنیم $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$ یک عملگر خطی پیوسته روی فضای هیلبرت باشد، هر تابع $f \in \mathcal{H}$ در n-بردار به‌صورت $([\phi f]_{۱} [\phi f]_{۲} \cdots [\phi f]_n)$ می‌باشد و این عملگر، ϕ-نیم‌نرم را به‌صورت زیر تعریف می‌کند:

$$\|f\|_{\phi} := \sqrt{\sum_{i=۱}^{n} [\phi f]_i^{۲}}. \tag{۲.۳.۱}$$

تعریف ۳.۳.۱. اگر $\phi : \mathcal{H} \to \mathbb{R}^n$ عملگر خطی پیوسته و $B_{\mathcal{H}} := \{f \in \mathcal{H} \mid \|f\|_{\mathcal{H}} \leq ۱\}$ و $\varepsilon > ۰$ باشد، کمیت‌های $R_{\phi}(\varepsilon)$، $\underline{R}_{\phi}(\varepsilon)$، $T_{\phi}(\varepsilon)$ و $\underline{T}_{\phi}(\varepsilon)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{\phi}(\varepsilon) := \sup \left\{ \|f\|_{L^{۲}}^{۲} \mid f \in B_{\mathcal{H}},\ \|f\|_{\phi}^{۲} \leq \varepsilon^{۲} \right\}, \tag{۳.۳.۱}$$

$$\underline{R}_{\phi}(\varepsilon) := \inf \left\{ \|f\|_{L^{۲}}^{۲} \mid f \in B_{\mathcal{H}},\ \|f\|_{\phi}^{۲} \geq \varepsilon^{۲} \right\}, \tag{۴.۳.۱}$$

$$T_{\phi}(\varepsilon) := \sup \left\{ \|f\|_{\phi}^{۲} \mid f \in B_{\mathcal{H}},\ \|f\|_{L^{۲}}^{۲} \leq \varepsilon^{۲} \right\}, \tag{۵.۳.۱}$$