بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان‌نامه

برای دریافت درجه کارشناسی ارشد در رشته
ریاضی محض، گرایش آنالیز

عنوان

عملگرهای ترکیبی فشردهٔ فضاهای باناخ توابع اسکالر- مقدار کراندار لیپشیتس بر فضاهای متریک نافشرده

استاد راهنما

دکتر داود علیمحمدی

استاد مشاور

دکتر سیروس مرادی

پژوهشگر

ساجده سفیدگر

شهریور ۱۳۹۲

عنوان پایان نامه

عملگرهای ترکیبی فشردهٔ فضاهای باناخ توابع

اسکالر-مقدارکراندار لیپشیتس بر فضاهای متریک نافشرده

توسط:

ساجده سفیدگر

پایان نامه

ارائه شده به مدیریت تحصیلات تکمیلی به عنوان بخشی از فعالیت های

تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته ریاضی (گرایش آنالیز)

از

دانشگاه اراک

اراک-ایران

ارزیابی و تصویب شده توسط کمیته پایان نامه با نمره درجه: عالی...

دکتر داود علیمحمدی (استاد راهنما)..استادیار

دکتر سیروس مرادی (دانشگاه اراک)..استادیار

دکتر اسماعیل پیغان (دانشگاه اراک)..استادیار

شهریور ۱۳۹۲

تقدیم به پدرم و مادرم:

ای **پدر** از تو هرچه می گویم باز هم کم می آورم

خورشیدی شدی و از روشنایی ات جان گرفتم و در ناامیدی ها نازم را کشیدی و لبریزم کردی از شوق. اکنون حاصل دستان خسته ات رمز موفقیتم شد به خودم تبریک می گویم که تو را دارم و دنیا با همه بزرگیش مثل تو را ندارد .....

و تو ای **مادر**، ای شوق زیبایی نفس کشیدن، ای روح مهربان، هستی ام

تو رنگ شادی هایم شدی و غم لحظه ها را با تمام وجود از من دور کردی و عمری خستگی ها را به جان خریدی تا اکنون توانستی طعم خوش پیروزی را به من بچشانی.

خدایا... [1]

به من زیستنی عطا کن که در لحظه مرگ، بر بی‌ثمری لحظه‌ای که برای زیستن گذشته است، حسرت نخورم و مُردنی عطا کن که بر بیهودگیش، سوگوار نباشم. بگذار تا آن را، خود انتخاب کنم، اما آنچنان که تو دوست می‌داری.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که شکنجه دیدن بخاطر تو، زندانی کشیدن بخاطر تو و رنج بردن به پای تو تنها لذت بزرگ زندگی من است، از شادی توست که من در دل می‌خندم، از امید رهایی توست که برق امید در چشمان خسته‌ام می‌درخشد و از خوشبختی توست که هوای پاک سعادت را در ریه‌هایم احساس می‌کنم. نمی‌توانم خوب حرف بزنم. نیروی شگفتی را که در زیر کلمات ساده و جمله‌های ضعیف و افتاده، پنهان کرده‌ام دریاب، دریاب.

تو می‌دانی و همه می‌دانند که زندگی از تحمیل لبخندی بر لبان من، از آوردن برق امیدی در نگاه من، از برانگیختن موج شعفی در دل من، عاجز است.

تو، چگونه زیستن را به من بیاموز، چگونه مردن را خود خواهم آموخت.

به من توفیق تلاش در شکست، صبر در نومیدی، رفتن بی‌همراه، جهاد بی‌سلاح، کار بی‌پاداش، فداکاری در سکوت، دین بی‌دنیا، مذهب بی‌عوام، عظمت بی‌نام، خدمت بی‌نان، ایمان بی‌ریا، خوبی بی‌نمود، گستاخی بی‌خامی، قناعت بی‌غرور، عشق بی‌هوس، تنهایی در انبوه جمعیت، و دوست داشتن بی‌آنکه دوست بداند، روزی کن.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن‌هاست...

[1] مناجاتی از دکتر علی شریعتی.

سپاس گزاری...

سپاس خداوندگار حکیم را که به من ارزش، قدرت و انگیزه‌ی بودن داد.

در آغاز وظیفه خود می‌دانم از زحمات بی‌دریغ استاد فرهیخته، جناب آقای دکتر داود علیمحمدی، که به معنای واقعی کلمه، استاد راهنمای من بودند، صمیمانه تشکر و قدردانی کنم که قطعاً بدون راهنمایی‌های ارزنده ایشان، این مجموعه به انجام نمی‌رسید.

از جناب آقای دکتر سیروس مرادی که زحمت مطالعه و مشاوره این رساله را تقبل فرمودند و در آماده سازی این رساله، به نحو احسن اینجانب را مورد راهنمایی قرار دادند، کمال امتنان را دارم.

در پایان، بوسه می‌زنم بر دستان خداوندگاران مهر و مهربانی، پدر و مادر عزیزم و بعد از خدا، ستایش می‌کنم وجود مقدس‌شان را و تشکر می‌کنم از خانواده‌ی عزیزم به پاس عاطفه سرشار و گرمای امیدبخش وجودشان، که در این سردترین روزگاران، بهترین پشتیبان من بودند.

آینده برایم واژه‌ای است مبهم و تار. نمی‌خواهم منتظر بمانم تا آن به سراغم بیاید؛ می‌خواهم خود آینده‌ام را بسازم. می‌خواهم زیباترین و خوش رنگترین‌ها را بسازم. آینده‌ای که در آن شایستگی کلام احسن الخالقین را داشته باشم. آینده‌ی من هر چه باشد مطمئناً نقش اساتید بزرگوار و خانواده‌ی عزیزم در آن انکار ناپذیر است. پس از خداوند می‌خواهم به من قدرت ساختن بهترین‌ها را عطا کند.

ساجده سفیدگر

شهریور ۱۳۹۲

چکیده

در این پایان نامه با فرض این که (X, d) یک فضای متریک نافشرده است، ابتدا به معرفی جبرهای لیپشیتس $Lip(X, d^{\alpha})$ ، جبرهای کوچک لیپشیتس $lip(X, d^{\alpha})$ و جبرهای برجستهٔ لیپشیتس $Lip_0(X, d^{\alpha})$ برای $0 < \alpha \leq 1$ می‌پردازیم و برخی از خواص اساسی آن ها را بیان می کنیم. سپس برخی از قضایای مربوط به فضای متریک r -همبند را بیان می کنیم. در ادامه برخی از ویژگی‌های فضاهای توابع لیپشیتس بر فضای متریک r -همبند را مورد بررسی قرار می دهیم. در آخر نشان می‌دهیم علمگر ترکیبی C_{ϕ} بر فضاهای باناخ توابع لیپشیتس $Lip_0(X, d)$ و $Lip(X, d)$ و $lip(X, d)$ فشرده است اگرو تنها اگر ϕ یک نگاشت ابرانقباضی بوده و $\phi(X)$ یک مجموعهٔ کلاً کراندار در فضای متریک (X, d) باشد. سپس طیف این عملگرها را تعیین می کنیم.

واژگان کلیدی

فضای باناخ، عملگر فشرده، جبر لیپشیتس، عملگر ترکیبی فشرده، طیف .

پیشگفتار

فضاها و جبرهای باناخ توابع کراندار لیپشیتس $Lip(X,d)$ بر فضای متریک (X,d) در نظریهٔ فضاها و جبرهای باناخ اهمیت ویژه ای دارند. فضاهای توابع لیپشیتس در سال ۱۹۶۱ توسط کِی. دی لیو [۲] در مقالهٔ[۴] و جبرهای لیپشیتس در سال ۱۹۶۳ و ۱۹۶۴ در مقالات [۷،۸] توسط دی. آر. شربرت [۳] معرفی شدند. از مباحث اساسی در فضاهای باناخ می‌توان به عملگر های فشرده بر فضاهای باناخ و طیف عملگر های فشرده بر فضاهای باناخ اشاره کرد.

در سال ۱۹۹۰، اچ. کاموویتس [۴] و اس. شِینبرگ [۵] در مقالهٔ [۳] عملگرهای ترکیبی فشرده بر جبرهای باناخ لیپشیتس $Lip(X,d)$ را مورد بررسی قرار دادند و ثابت کردند که اگر (X,d) یک فضای متریک فشرده باشد و همچنین $\phi : X \longrightarrow X$ یک نگاشت لیپشیتس باشد آن‌گاه عملگر ترکیبی $C_\phi : Lip(X,d) \longrightarrow Lip(X,d)$ فشرده است اگر و تنها اگر ϕ یک نگاشت ابرانقباضی باشد. همچنین ثابت کردند که طیف عملگر ترکیبی فشردهٔ C_ϕ از فضای باناخ $Lip(X,d)$ به فضای باناخ $Lip(X,d)$ بر فضای متریک فشردهٔ (X,d) فقط شامل دو عضو 0 و 1 است. برخی از ریاضیدانان شرط حذف فشردگی فضای متریک (X,d) را در مباحثی از فضاها و جبرهای لیپشیتس مورد مطالعه قرار دادند. در این راستا می توان به مقالات [۱،۲] توسط ج. آراجو [۶] و اِل. دوباربی [۷] و مقالهٔ [۵] توسط دی. اِچ. لیونگ [۸] اشاره کرد.

درسال ۲۰۱۳، ای. وارگاس [۹] و ام. والسیلوس [۱۰] در مقالهٔ [۷] شرط فشردگی فضای متریک (X,d) را حذف کردند و یک شرط لازم و کافی برای فشردگی عمگر ترکیبی $C_\phi : Lip(X,d) \longrightarrow Lip(X,d)$ بر فضای متریک (X,d) ارائه دادند. همچنین یک شرط لازم و کافی برای فشردگی عملگر ترکیبی $C_\phi : lip(X,d) \longrightarrow lip(X,d)$ بر فضای متریک (X,d) ، که $\phi : X \longrightarrow X$ یک نگاشت کراندار

[۲] $K.\ de\ Leeuw$
[۳] $D.\ R.\ Sherbert$
[۴] $H.\ Kamowitz$
[۵] $S.\ Scheinberg$
[۶] $J.\ Araujo$
[۷] $L.\ Dubarbie$
[۸] $D.\ H.\ Leung$
[۹] $A.\ Jiménez - Vargas$
[۱۰] $M.\ Villegas - Vallecillos$

است و $lip(X,d)$ نقاط را به طور یکنواخت بر زیر مجموعه های کراندار (X,d) جدا می کند و یک شرط لازم و کافی برای فشردگی عملگر ترکیبی $C_\phi : Lip_0(X,d) \longrightarrow Lip_0(X,d)$ که (X,d) یک فضای متریک برجستهٔ کراندار است ارائه دادند. همچنین یک توصیف کلی از طیف عملگرهای ترکیبی فشردهٔ $C_\phi : Lip(X,d) \longrightarrow Lip(X,d)$ و $C_\phi : lip(X,d) \longrightarrow lip(X,d)$ بر فضای متریک (X,d) در حالی که $lip(X,d)$ به طور یکنواخت نقاط را بر زیر مجموعه های کراندار X جدا می کند، به دست آوردند.

درسال ۲۰۱۳، ای. وارگاس و ام. والسیلوس در مقالهٔ [۷] با ارائهٔ یک مثال نشان دادند که زمانی که فضای متریک (X,d) ناهمبند باشد لزوماً طیف عملگر ترکیبی C_ϕ از 0 و 1 تشکیل نمی‌شود.

در این پایان نامه مقالهٔ [۹] به طور کامل باز شده است. این پایان نامه مشتمل بر سه فصل است. فصل اوّل شامل سه بخش است. در بخش اوّل مروری بر فضاهای متریک و مجموعه های کلاً کراندار و برخی از قضایای آنها داریم و به معرفی فضای متریک r -همبند برای $r > 0$ و تتمیم یک فضای متریک می پردازیم و برخی از خواص آن‌ها را بیان می‌کنیم. در بخش دوّم مروری بر فضاهای برداری توپولوژیکی، فضاهای باناخ داریم و به معرفی فضای متریک (X,d^α) برای $\alpha \in (0,1]$ می پردازیم برخی از ویژگی آنها را که در فصل های بعدی مورد نیاز است بیان می کنیم. در بخش سوم ابتدا عملگرهای فشرده بین فضاهای باناخ را تعریف کرده و سپس شرایط لازم و کافی برای فشرده بودن عملگر خطی بین فضاهای باناخ را ذکر می کنیم و در ادامه برخی از قضایای آنها را مورد بررسی قرار می دهیم. فصل دوّم شامل دو بخش است. در بخش اوّل ابتدا نگاشت لیپشیتس از یک فضای متریک (X,d) به فضای متریک (Y,ρ) تعریف می‌کنیم سپس به معرفی جبرهای لیپشیتس $Lip(X,d^\alpha)$ ، جبرهای کوچک لیپشیتس $lip(X,d^\alpha)$ و جبرهای برجستهٔ لیپشیتس $Lip_0(X,d^\alpha)$ برای $0 < \alpha \leq 1$ می‌پردازیم و برخی از خواص اساسی آن ها را بیان می کنیم. در بخش دوّم ابتدا برخی از قضایای مربوط به فضای متریک r -همبند را بیان می کنیم. سپس نگاشت (δ,ε) -تخت را بر فضای متریک (X,d) که δ و ε اعداد حقیقی مثبت هستند تعریف می کنیم در ادامه برخی از ویژگی های فضاهای توابع لیپشیتس بر فضای متریک r -همبند را مورد بررسی قرار می دهیم. فصل سوم شامل دو بخش است. در بخش اوّل

ابتدا عملگرهای ترکیبی بر فضاهای باناخ را معرفی کرده سپس یک شرط لازم و کافی برای فشردگی علمگر ترکیبی C_ϕ از فضای باناخ $Lip_0(X_0, d_0)$ به فضای باناخ $Lip_0(X_0, d_0)$ بر فضای متریک برجستهٔ (X_0, d_0) را ارائه می دهیم. همچنین یک شرط لازم و کافی برای فشردگی عملگر ترکیبی C_ϕ از فضای باناخ $Lip(X, d)$ به فضای باناخ $Lip(X, d)$ و یک شرط لازم و کافی برای فشردگی عملگر ترکیبی C_ϕ از فضای باناخ $lip(X, d)$ به فضای باناخ $lip(X, d)$ بر فضای متریک (X, d) ارائه می دهیم. در بخش دوّم طیف یک عملگر ترکیبی فشرده بر فضای باناخ $Lip(X, d)$ و $lip(X, d)$ را تعیین می کنیم.

فهرست مطالب

۱ مفاهیم اولیه و مقدمات **۱**

۱.۱ فضاهای متریک و فضای متریک r-همبند ۱

۲.۱ فضاهای برداری توپولوژیکی و فضاهای باناخ ۱۲

۳.۱ عملگرهای فشرده بین فضاهای باناخ ۲۳

۲ فضاهای باناخ توابع لیپشیتس **۲۸**

۱.۲ فضاهای باناخ توابع لیپشیتس بر فضاهای متریک ۲۸

۲.۲ خواصی از فضاهای توابع لیپشیتس بر فضاهای متریک r-همبند ۵۶

۳ عملگرهای ترکیبی فشردهٔفضاهای باناخ توابع لیپشیتس و طیف آن‌ها **۷۳**

۱.۳ عملگرهای ترکیبی فشردهٔ فضاهای باناخ توابع لیپشیتس ۷۳

۲.۳ طیف عملگرهای ترکیبی فشردهٔ فضاهای باناخ توابع لیپشیتس ۱۱۱

مراجع **۱۵۷**

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی **۱۵۸**

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی **۱۶۳**

فصل ۱

مفاهیم اولیه و مقدمات

این فصل مشتمل بر سه بخش است که در آن مقدمات لازم برای فصل های بعدی آورده شده است. در بخش اول به معرفی فضاهای متریک و فضاهای r -همبند میپردازیم. در بخش دوم ابتدا با تعریف توپولوژی، وارد فضاهای توپولوژیکی و فضاهای برداری توپولوژیکی می‌شویم و به توپولوژی ضعیف-ستاره روی این فضاها اشاره می‌کنیم و به معرفی فضاهای نرمدار و فضاهای باناخ و خواص آن ها می‌پردازیم. در بخش پایانی عملگرهای فشرده را معرفی می کنیم و قضایای مربوط به آن را ارائه می دهیم.

۱.۱ فضاهای متریک و فضای متریک r-همبند

لم ۱.۱.۱. فرض کنیم $\alpha \in (0, 1]$. در این صورت

(الف) اگر $s \in (0, 1]$، آن‌گاه $1 \leq s^\alpha + (1 - s)^\alpha$،

(ب) اگر $a, b \in [0, +\infty)$، آن‌گاه $(a + b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha$.

برهان. (الف) واضح است که حکم به ازای $\alpha = 1$ برقرار است. فرض کنیم $\alpha \in (0, 1)$. تابع $F : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ را به صورت $F(s) = s^\alpha + (1 - s)^\alpha - 1$ تعریف می کنیم. در این صورت $F(0) = F(1) = 0$ ، F بر $[0, 1]$ پیوسته است، F بر $(0, 1)$ مشتق پذیر است و

$$F^{'}(s) = \alpha s^{\alpha-1} - \alpha(1 - s)^{\alpha-1}, \quad (\forall s \in (0, 1)).$$

به علاوه داریم

$$F^{'}(s) > 0 \quad (\forall s \in (0, \frac{1}{2})), \quad F^{'}(\frac{1}{2}) = 0,$$
$$F^{'}(s) < 0 \quad (\forall s \in (\frac{1}{2}, 1)).$$

بنابراین $\frac{1}{2}$ تنها نقطهٔ اکسترمم موضعی F در بازهٔ $(0, 1)$ می باشد که ماکزیمم موضعی است. از طرف دیگر، $F(\frac{1}{2}) = 2^{1-\alpha} - 1 > 0$. پس $F(0) = F(1) = 0$ مقدار مینیمم مطلق F بر بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ است. لذا داریم

$$0 = F(0) = F(1) \leq F(s) \quad (\forall s \in [0, 1]).$$

یعنی،

$$0 \leq s^\alpha + (1 - s)^\alpha - 1 \quad (\forall s \in [0, 1]).$$

در نتیجه

$$1 \leq s^\alpha + (1 - s)^\alpha \quad (\forall s \in [0, 1]).$$

پس (الف) برقرار است.

(ب) واضح است که حکم به ازای $a = 0$ یا $b = 0$ برقرار است. فرض کنیم $a, b \in (0, +\infty)$. در این صورت $\frac{a}{a+b} \in (0, 1)$. پس طبق (الف) داریم

$$1 \leq (\frac{a}{a+b})^\alpha + (1 - \frac{a}{a+b})^\alpha$$
$$= \frac{a^\alpha}{(a+b)^\alpha} + \frac{b^\alpha}{(a+b)^\alpha}.$$

چون $(a+b)^\alpha > 0$ ، لذا داریم

$$(a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha.$$

پس (ب) برقرار است و اثبات کامل می شود.

□

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $E\subseteq X$. گوییم E مجموعهٔ کراندار در این فضا است هرگاه $M>0$ ی یافت شود به طوری که به ازای هر $x,y\in E$ ؛ $d(x,y)\leq M$. هر گاه E یک مجموعهٔ ناتهی در (X,d) باشد آن‌گاه $\sup\{d(x,y):x,y\in E\}$ را قطر E در این فضا نامیده و آن را به $diam_d E$ نشان می دهیم.

قضیه ۳.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $E\subseteq X$. در این صورت E یک مجموعهٔ کراندار در فضای متریک (X,d) است اگر وتنها اگر با قطر متناهی باشد.

تعریف ۴.۱.۱. فضای متریک (X,d) را کراندار گوییم هر گاه X یک مجموعهٔ کراندار در این فضا باشد، یعنی، $M>0$ ی وجود داشته باشد به طوری که

$$d(x,y)\leq M \qquad (\forall x,y\in X).$$

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک باشند و $\phi:X\longrightarrow Y$ یک نگاشت باشد. گوییم ϕ یک نگاشت کراندار از (X,d) به (Y,ρ) است هرگاه $\phi(X)$ یک مجموعهٔ کراندار در فضای متریک (Y,ρ) باشد.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنیم (X,d) و (Y,ρ) دو فضای متریک باشند، نگاشت $g:X\longrightarrow Y$ را یک طولپای (یکمتری) می نامیم هرگاه به ازای هر $x,y\in X$ داشته باشیم

$$\rho\big(g(x),g(y)\big)=d(x,y).$$

قضیه ۷.۱.۱. (قضیهٔ اشتراکی کانتور) : فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک بوده ، $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از مجموعه های فشرده در این فضا باشد به طوری که به ازای هر $n\in\mathbb{N}$؛ $K_n\supseteq K_{n+1}$ و $\lim\limits_{n\to\infty} diam_d\, K_n=0$. در این صورت $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}K_n$ تنها از یک نقطه تشکیل شده است.

لم ۸.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $\phi:X\longrightarrow X$ یک خود نگاشت باشد. اگر $\lim\limits_{n\to\infty} diam_d\big(\phi^n(X)\big)=0$ ، آن‌گاه به ازای هر $x\in X$ ، دنبالهٔ $\{\phi^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ کوشی در فضای متریک (X,d) است.

برهان. فرض کنیم $x \in X$. برای اثبات کوشی بودن دنبالهٔ $\{\phi^n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ در فضای متریک (X,d) باید نشان دهیم

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall m\, \forall n[(m \geq N, n \geq N) \Longrightarrow d\big(\phi^m(x), \phi^n(x)\big) < \varepsilon].$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ انتخاب شده باشد. چون $\lim\limits_{n\to\infty} diam_d\big(\phi^n(X)\big) = 0$ ، داریم

$$\exists N \quad \forall n\Big(n \geq N \Longrightarrow diam_d\big(\phi^n(X)\big) < \varepsilon\Big).$$

بنابراین $N \in \mathbb{N}$ هست که

$$diam_d\big(\phi^N(X)\big) < \varepsilon. \tag{۱.۱}$$

فرض کنیم $n \geq N$ و $m \geq N$. در این صورت $\phi^n(x) \in \phi^n(X) \subseteq \phi^N(X)$ و $\phi^m(x) \in \phi^m(X) \subseteq \phi^N(X)$. پس

$$d\big(\phi^m(x), \phi^n(x)\big) < diam_d \phi^N(X). \tag{۲.۱}$$

از (۱.۱) و (۲.۱) نتیجه می شود که

$$d\big(\phi^m(x), \phi^n(x)\big) < \varepsilon.$$

این اثبات را کامل می کند. □

تعریف ۹.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $B \subseteq X$ و $x \in X$. در این صورت $\inf\{d(x,y) : y \in B\}$ را فاصلهٔ x از مجموعهٔ B در این فضا نامیده و آن را به $dist_d(x,B)$ نشان می دهیم.

لم ۱۰.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد، $B \subseteq X$ و $x \in X$. در این صورت $x \in \overline{B}$ ($\overline{B}$ بستار B در فضای متریک (X,d) است) اگر و تنها اگر $dist_d(x,B) = 0$.

برهان. فرض کنیم $x \in \overline{B}$. نشان می دهیم $dist_d(x,B) = 0$. چون 0 یک کران پایین مجموعهٔ $\{d(x,y) : y \in B\}$ است لذا طبق خاصیت مشخصهٔ اینفیموم کافی است نشان دهیم

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in B \quad d(x,y) < \varepsilon.$$

فرض کنیم $\varepsilon > 0$ انتخاب شده باشد. چون $x \in \overline{B}$، لذا

$$B_d(x, \varepsilon) \cap B \neq \emptyset.$$

فرض کنیم $y \in B_d(x, \varepsilon) \cap B$. در این صورت $y \in B$ و $d(x, y) = d(y, x) < \varepsilon$.
برعکس، فرض کنیم $dist_d(x, B) = 0$ ، نشان می دهیم $x \in \overline{B}$. فرض کنیم $r > 0$. در این صورت $dist_d(x, B) < r$. لذا $\inf\{d(x, y) : y \in B\} < r$. پس طبق خاصیت مشخصهٔ اینفیموم، $y \in B$ ی هست که $d(y, x) = d(x, y) < r$. پس $y \in B$ ی هست که $y \in B_d(x, r)$. لذا $y \in B \cap B_d(x, r)$. پس $x \in \overline{B}$. □

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد، و $A \subseteq X$ و $B \subseteq X$. در این صورت $\inf\{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$ را فاصلهٔ مجموعهٔ A از مجموعهٔ B در این فضا نامیده و آن را به $dist_d(A, B)$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۲.۱.۱. (تتمیم یک فضای متریک): فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک ناتمام باشد. فضای متریک $(\tilde{X}, \tilde{d})$ را تتمیم فضای (X, d) می نامیم هر گاه $(\tilde{X}, \tilde{d})$ یک فضای متریک تمام باشد که X در آن چگال است.

قضیهٔ زیر وجود تتمیم یک فضای متریک ناتمام را تضمین می کند. برای مشاهدهٔ اثبات آن به قضیهٔ ۳۱.۲.۲ مرجع [۱۲] مراجعه شود.

قضیه ۱۳.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. دراین صورت یک فضای متریک تمام مانند $(\tilde{X}, \tilde{d})$ موجود است به قسمی که X را می توان زیر مجموعه ای از $\tilde{X}$ تلقی کرد. به عبارت دیگر یک تابع حافظ فاصله مانند $\tilde{\alpha} : X \longrightarrow \tilde{X}$ (یعنی برای هر $x, y \in X$، $\tilde{d}\big(\tilde{\alpha}(x), \tilde{\alpha}(y)\big) = d(x, y)$) وجود دارد که $\overline{\tilde{\alpha}(X)} = \tilde{X}$. به علاوه، $(\tilde{X}, \tilde{d})$ به مفهوم زیر منحصر به فرداست:
اگر $(\widehat{X}, \widehat{d})$ فضای متریک تمام دیگری با همین خاصیت باشد(یعنی تابعی حافظ فاصله مانند $\widehat{\alpha} : X \longrightarrow \widehat{X}$ موجود باشد به قسمی که $\overline{\widehat{\alpha}(X)} = \widehat{X}$)آن گاه تابعی پوشا و حافظ فاصله مانند $\phi : \tilde{X} \longrightarrow \widehat{X}$ موجود است به قسمی که $\phi \circ \tilde{\alpha} = \widehat{\alpha}$.

قضیه ۱۴.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. در این صورت مجموعه ای مانند $\tilde{X}$ و یک متریک تمام بر $\tilde{X}$ مانند $\tilde{d}$ وجود دارد به طوری که $\overline{X} = X$ ($\overline{X}$ بستار X در فضای متریک $(\tilde{X},\tilde{d})$ است) و

$$\tilde{d}(x,y) = d(x,y) \quad (\forall x,y \in X).$$

تعریف ۱۵.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد و $E \subseteq X$. گوییم E یک مجموعهٔ کلاً کراندار در این فضا است هر گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ تعداد متناهی از اعضای E مانند x_1 و.....و x_n یافت شود به طوری که

$$E \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(x_j,\varepsilon).$$

لم ۱۶.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد.

(الف) اگر $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای در X باشد و $\varepsilon > 0$ ی یافت شود به طوری که به ازای هر $m,n \in \mathbb{N}$ که $m > n$ داشته باشیم $d(x_m,x_n) \geq \varepsilon$، آن‌گاه $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هیچ زیر دنبالهٔ کوشی در این فضا ندارد.

(ب) اگر $A \subseteq X$ و A در فضای متریک (X,d) کلاً کراندار نباشد آن‌گاه دنباله ای در A مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ یافت می شود که هیچ زیر دنبالهٔ کوشی در فضای متریک (X,d) ندارد.

برهان. (الف) فرض کنیم $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ یک زیر دنبالهٔ کوشی در فضای متریک (X,d) باشد. در این صورت

$$\exists N \quad \forall i \, \forall j [i > j \geq N \Longrightarrow d(x_{n_i},x_{n_j}) < \varepsilon].$$

چون $n_{N+1} > n_N \geq N$، لذا $d(x_{n_{N+1},x_{n_N}}) < \varepsilon$. با انتخاب $j = n_{N+1}$ و $k = n_N$، نتیجه می گیریم که $j > k$ و $d(x_j,x_k) < \varepsilon$. لذا طبق قانون عکس نقیض، (الف) برقراراست.

(ب) فرض کنیم A در فضای متریک (X,d) کلاً کراندار نباشد. بنابراین

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \forall x_1,...x_n \in A: \quad A \nsubseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(x_j,\varepsilon). \qquad (۳.۱)$$

فرض کنیم $x_1 \in A$. طبق (۳.۱) داریم

$$A \nsubseteq B_d(x_1, \varepsilon).$$

در این صورت $x_2 \in A$ وجود دارد به طوری که $x_2 \notin B_d(x_1, \varepsilon)$. لذا $d(x_2, x_1) \geq \varepsilon$. طبق (۳.۱) داریم

$$A \nsubseteq B_d(x_1, \varepsilon) \cup B_d(x_2, \varepsilon).$$

لذا $x_3 \in A$ وجود دارد به طوری که $x_3 \notin B_d(x_1, \varepsilon) \cup B_d(x_2, \varepsilon)$. بنابراین $x_3 \notin B_d(x_1, \varepsilon)$ و $x_3 \notin B_d(x_2, \varepsilon)$. لذا $d(x_3, x_2) \geq \varepsilon$ و $d(x_3, x_1) \geq \varepsilon$. اگر این روند را بدین ترتیب ادامه دهیم دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاط A به دست می آید به طوری که

$$d(x_j, x_{j+1}) \geq \varepsilon \quad (\forall n \in \mathbb{N},\ \forall j \in \{1, ..., n\}).$$

لذا دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از نقاط A یافت می شود به طوری که به ازای هر $m, n \in \mathbb{N}$ که $m \neq n$؛ $d(x_m, x_n) \geq \varepsilon$. لذا طبق قسمت (الف) دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ هیچ زیر دنبالهٔ کوشی در فضای متریک (X, d) ندارد.

□

لم ۱۷.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله ای از توابع مختلط-مقدار بر X باشد. اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر هر زیر مجموعهٔ کلاً کراندار X همگرای یکنواخت به تابع 0 باشد، آن‌گاه $f_n \longrightarrow 0$ نقطه به نقطه بر X.

برهان. فرض کنیم $x \in X$ و $E = \{x\}$. دراین صورت E یک مجموعهٔ کلاً کراندار در فضای متریک (X, d) است. طبق فرض، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $\{x\}$ همگرای یکنواخت به تابع 0 است. این ایجاب می کند که $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. چون $x \in X$ دلخواه فرض شده بود، نتیجه می گیریم که $f_n \longrightarrow 0$ نقطه به نقطه بر X. □

قضیه ۱۸.۱.۱. فرض کنیم (X, d) یک فضای متریک باشد و $A \subseteq X$. در این صورت A یک مجموعهٔ کلاً کراندار در این فضا است اگر وتنها اگر $\overline{A}$ (بستار A در (X, d)) یک مجموعهٔ کلاً کراندار در این

فضا باشد.

برهان. ابتدا فرض کنیم A یک مجموعهٔ کلاًکراندار در فضای متریک (X,d) باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$. در این صورت تعداد متناهی از اعضای A مانند a_1 و...و a_n یافت می شوند به طوری که

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(a_j, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{۴.۱}$$

واضح است که $a_1, ..., a_n \in \overline{A}$. ادعا می کنیم

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(a_j, \varepsilon).$$

فرض کنیم $x \in \overline{A}$. دراین صورت $B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$. فرض کنیم $y \in B_d(x, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$. در این صورت $d(y,x) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $y \in A$. از $y \in A$ و (۴.۱) نتیجه می شود که $k \in \{1, ..., n\}$ ی هست که $y \in B_d(a_k, \frac{\varepsilon}{2})$. پس $d(y, a_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. حال داریم

$$\begin{aligned} d(x, a_k) &\leq d(x,y) + d(y, a_k) = d(y,x) + d(y, a_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

پس $x \in B_d(a_k, \varepsilon)$ لذا $x \in \bigcup_{j=1}^{n} B_d(a_j, \varepsilon)$. پس $\overline{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(a_j, \varepsilon)$. در نتیجه $\overline{A}$ یک مجموعهٔ کلاًکراندار در فضای متریک (X,d) است.

حال فرض کنیم $\overline{A}$ یک مجموعهٔ کلاًکراندار در فضای متریک (X,d) باشد. فرض کنیم $\varepsilon >$. در این صورت تعداد متناهی از اعضای $\overline{A}$ مانند y_1 و...و y_n یافت می شوند به طوری که

$$\overline{A} \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(y_j, \frac{\varepsilon}{2}). \tag{۵.۱}$$

فرض کنیم $j \in \{1, ..., n\}$. در این صورت $y_j \in \overline{A}$ و لذا $B_d(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A \neq \emptyset$. فرض کنیم $a_j \in B_d(y_j, \frac{\varepsilon}{2}) \cap A$. در این صورت $d(a_j, y_j) < \frac{\varepsilon}{2}$ و $a_j \in A$. ادعا می کنیم

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} B_d(a_j, \varepsilon).$$

فرض کنیم $x \in A$. در این صورت $x \in \overline{A}$. پس طبق (۵.۱)، $k \in \{1, ..., n\}$ ی هست که $x \in B_d(y_k, \frac{\varepsilon}{2})$ لذا $d(x, y_k) < \frac{\varepsilon}{2}$. از طرف دیگر طبق استدلال فوق داریم

$$d(y_k, a_k) = d(a_k, y_k) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

حال داریم

$$\begin{aligned} d(x,a_k) &\le d(x,y_k)+d(y_k,a_k) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \end{aligned}$$

پس $x\in B_d(a_k,\varepsilon)$. لذا $x\in \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_d(a_j,\varepsilon)$. پس $A\subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{n} B_d(a_j,\varepsilon)$. در نتیجه A یک مجموعهٔ کلاًکراندار در فضای متریک (X,d) است. □

قضیه ۱۹.۱.۱. $[6, A4\ Theorem]$ فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک تمام بوده و K یک مجموعهٔ بسته در این فضا باشد. در این صورت احکام زیر برقرارند:

(الف) K یک مجموعهٔ فشرده در (X,d) است.

(ب) هرزیر مجموعهٔ نامتناهی K یک نقطهٔ حدی در K دارد، یعنی اگر E یک زیر مجموعهٔ نامتناهی K باشد آن‌گاه $E'\cap K\neq\emptyset$.

(ج) K یک مجموعهٔ کلاًکراندار در فضای متریک (X,d) است.

قضیه ۲۰.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک تمام باشد و $A\subseteq X$. در این صورت A یک مجموعهٔ کلاًکراندار در این فضا است اگر و تنها اگر $\overline{A}$ یک مجموعهٔ فشرده در این فضا باشد.

برهان. با استفاده ار قضیهٔ ۱۸.۱.۱ و ۱۹.۱.۱ حکم برقرار است. □

تعریف ۲۱.۱.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متریک باشد. زیر مجموعهٔ D از X را ناهمبند نامیم هرگاه دو مجموعهٔ ناتهی مانند A و B موجود باشند به طوری که $A\cap\overline{B}=\emptyset$، $\overline{A}\cap B=\emptyset$ و $D=A\cup B$. در این صورت $\{A,B\}$ را یک ناهمبندی برای D می نامیم.

هر زیر مجموعهٔ X مانند C را که ناهمبند نباشد، همبند نامیده می شود.

فضای متریک (X,d) را یک فضای همبند می نامیم هرگاه X یک مجموعهٔ همبند در این فضا باشد.