بسم الله الرحمن الرحیم

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته آمار گرایش آمار ریاضی

فرایندهای گاوسی مانا: تجزیه‌های تطبیقی موجک ها

استاد راهنما:

دکتر افشین پرورده

پژوهشگر:

خلیل نجاری

اسفند ماه ۱۳۸۹

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه آمار

پایان‌نامه‌ی کارشناسی ارشد رشته‌ی آمارگرایش آمار ریاضی

آقای خلیل نجاری

تحت عنوان

فرایندهای گاوسی مانا: تجزیه های تطبیقی موجک ها

در تاریخ **۸۹/۱۲/۱۸** توسط هیأت داوران زیر بررسی با درجه **عالی** به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر افشین پرورده با مرتبه‌ی علمی استادیار امضاء

۲- استاد داور داخل گروه پایان‌نامه دکتر محمد حسین علامت ساز با مرتبه‌ی علمی استاد امضاء

۳- استاد داور خارج از گروه دکتر علی رجالی با مرتبه‌ی علمی دانشیار امضاء

امضای مدیر گروه

گروه آمار دانشکده علوم دانشگاه اصفهان

ره پویان راه دانش هر اندازه پیش روند و هر دری از علوم به روی آنها گشوده شود، باز همان نوآموزان مکتب استادان هستند که بی‌فروغ نور علم ایشان در بی راهه‌ها سرگردان بودند.

به مصداق سخن شریف « **من لم یشکر المخلوق لم یشکر الخالق** » بر خود لازم می‌دانم مراتب سپاس وامتنان خود را از استاد گرانقدرم جناب آقای دکتر افشین پرورده که در کلیه مراحل تدوین این پایان نامه مرا یاری نمودند، ابراز دارم. همچنین از اساتید بزرگوار جناب آقای دکتر محمد حسین علامت ساز و جناب آقای دکتر علی رجالی که داوری این رساله را پذیرفته و با پیشنهادات خود موجب ارتقای آن گردیدند، صمیمانه تشکر می‌نمایم. از همه اساتید گروه آمار دانشگاه اصفهان و دوستان دوران تحصیل که از نظرات ایشان بهره‌مند شده‌ام از صمیم قلب تشکر می‌کنم و آرزوی موفقیت وکامیابی آنها را دارم.

تقدیم به اولین معلمان و فرشتگان زندگیم

مادر عزیز و فداکارم:

که نیمی از وجودش، ایثار و گذشت کامل است

و نیمی دیگر عشق و محبت

پدر عزیز و بزرگوارم:

که دل دریائیش آموزگار چگونه زیستنم بود

برادران مهربانم:

که سلامت و موفقیتشان آرزوی همیشگی من است

چکیده:

در این تحقیق ابتدا یک نمایش انتگرالی برای فرایند گاوسی مانا معرفی می‌کنیم. با استفاده از این نمایش انتگرالی بسط موجکی ژانگ و والتر برای فرایندهای گاوسی مانا را ارائه می‌کنیم. پایه‌ی موجک مورد استفاده در این بسط، موجک لماری-میر است. بسط براساس-موجک ژانگ و والتر دارای نقصی است، که دیدر و پیپیراس اقدام به اصلاح این نقص کردند. بسط براساس-موجک اصلاح شده، مانند بسط براساس-موجک ژانگ و والتر، دارای ساختار دو قسمتی است. قسمت اول جمله‌ی تقریب در مقیاس 2^{-J}، و قسمت دوم جملات جزئی در مقیاس کوچکتر از 2^{-j}، $j \geq J$ ، تفسیر می‌شوند. جمله‌ی تقریب در بسط اصلاح شده، شامل ضرایب تصادفی است، که خود این ضرایب تصادفی به تنهایی می‌توانند فرایند گاوسی مانا را تقریب بزنند. لازم به ذکر است ضرایب تقریب موجود در بسط براساس-موجک ژانگ و والتر نمی‌توانستند فرایند گاوسی مانا را تقریب بزنند و این همان نقص موجود در بسط براساس-موجک ژانگ، و والتر بود، که دیدر و پیپیراس آن را اصلاح کردند. در پایان براساس ضرایب تصادفی جمله‌ی تقریب اصلاح شده، به شبیه‌سازی فرایند اورنشتن اولنبک می‌پردازیم. الگوریتم تبدیل سریع موجک نقش کلیدی در این شبیه‌سازی بازی می‌کند. فرایند اورنشتن اولنبک در سراسر این پایان‌نامه به عنوان مثالی از فرایند گاوسی مانا در نظر گرفته شده است.

کلید واژه‌ها:

فرایندهای گاوسی مانا، آنالیز چندریزه‌ساز، موجک‌ها، موجک لماری-میر، شبیه‌سازی، فرایند اورنشتن اولنبک، تبدیل سریع موجک، سری زمانی ARMA .

فهرست مطالب

فهرست مطالب

فهرست مطالب

فهرست مطالب

فهرست شکلها

فهرست شکلها

فصل ۱

تعاریف و مفاهیم اولیه

۱—۱ مقدمه و تاریخچه

در این پایان‌نامه روی کاربرد موجک در فرایندهای گاوسی مانا متمرکز می‌شویم و با استفاده از بسط تابع براساس- موجک که برای فرایندهای گاوسی مانا به دست می آید، به شبیه‌سازی این فرایند می‌پردازیم. در فصل اول برخی از مفاهیم و تعاریف، که در این پایان نامه استفاده شده است، را ارائه می‌کنیم. در فصل دوم با توجه به منبع [۳]، یک نمایش انتگرالی برای فرایند گاوسی مانا معرفی می‌کنیم، که تابع داخل این نمایش انتگرالی، تابع هسته نامیده می‌شود. به کمک این نمایش انتگرالی، بسط تابع

براساس- موجک ژانگ و والتر[1] [۲۲]، را در حالت فرایند گاوسی مانا بررسی می‌کنیم. پایه‌ی موجک که ژانگ و والتر در بسط موجکی مورد استفاده قرار دادند، موجک لماری- میر[2] نام دارد. در فصل سوم با توجه به مقاله‌ی دیدر و پیپیراس [3] به اصلاح نقص موجود در بسط براساس- موجک ژانگ و والتر می‌پردازیم. نقص موجود در بسط ژانگ و والتر به این صورت است که در آنالیز موجک مرسوم است، که ضرایب جمله‌ی تقریب نیز می‌توانند، فرایند گاوسی مانا را تقریب بزنند، در حالی که در بسط براساس- موجک ژانگ و والتر، ضرایب جمله‌ی تقریب متغیرهای تصادفی مستقل $N(\circ,\text{۱})$ هستند، از این رو نمی‌توانند فرایند گاوسی مانای وابسته‌ی $X(t)$ را تقریب بزنند. دیدر و پیپیراس در منبع [۱۱] اقدام به اصلاح ضرایب جمله‌ی تقریب کرده‌اند. دیدر و پیپیراس ضرایب اصلاح شده را از پیچش ضرایب جمله‌ی تقریب ژانگ و والتر با تقریب گسسته‌ی تابع هسته، به دست آوردند.

بسط اصلاح شده‌ی دیدر و پیپیراس را می‌توان در یک کلاس گسترده‌ای از فرایندهای گاوسی مانا یعنی به جای بسط بر اساس- موجک که سلان [4][۱۹] و میر و همکاران [5] [۱۴] برای حرکت براونی کسری بدست آورده‌اند، به کار برد. پیپیراس در منبع [۱۷]

---

[1] $Zhang\ and\ Walter$

[2] $Lemarie - Meyer$

[3] Dider and Pipiras

[4] Sellan

[5] Meyer et al.

یک تجزیه مشابه برای فرایند خود- مشابه غیر گاوسی که فرایند روزنبلت نامیده می‌شود، به دست آورده است، که از این تجزیه می‌توان در شبیه‌سازی فرایند روزنبلت استفاده کرد. همچنین دیدر و پیپیراس [۱۰] یک تجزیه‌ی براساس موجک، مشابه با آنچه که در مقاله دیگر آن‌ها [۱۱] آمده است، برای سری‌های زمانی گسسته زمان مانا ارائه کردند. اورکمپ و هودر[۶] [۴] نشان دادند، که اگر $X(t)$ یک فرایند L^2 مانا، با تابع کوواریانس پیوسته و کراندار باشد، آن‌گاه مانای وسیع بودن $X(t)$ معادل است با مانای وسیع بودن ضرایب موجک، $\{d_{j,k} = \int_{\mathbb{R}} X(t)\psi_{j,k}(t)dt : j, k \in \mathbb{Z}\}$. کامبانیس و ماسری[۷] [۷] مسائلی درباره‌ی همگرایی تقریب موجک به فرایندهای تصادفی را مورد بررسی قرار دادند.

در سراسر پایان نامه فرایند اورنشتن اولنبک را به عنوان مثالی از فرایندهای گاوسی مانا در نظر می‌گیریم، و تمام مراحل معرفی شده در این تحقیق را روی این فرایند اعمال می‌کنیم. از طریق تقریب اویلر یک تقریب گسسته برای فرایند اورنشتن اولنبک معرفی می‌کنیم، که این تقریب گسسته یک سری زمانی $AR(1)$ است. از این تقریب گسسته‌ی فرایند اورنشتن اولنبک، در به دست آوردن تقریب گسسته‌ی تابع هسته، و شبیه‌سازی این فرایند استفاده می‌کنیم. در فصل چهارم به شبیه‌سازی فرایند اورنشتن اولنبک می‌پردازیم، که در شبیه‌سازی این فرایند تبدیل سریع موجک نقش کلیدی را بازی

[۶] *Averkamp and Houdre*

[۷] Cambanis and Masry

می‌کند. در این فصل به معرفی مفاهیم و تعاریفی می‌پردازیم که در فصل‌های بعد آنها را مورد استفاده قرار خواهیم داد. در بخش دوم، با استفاده از منابع [۳] و [۱۸] به معرفی برخی از قضایا و تعاریف موجود در فرایند تصادفی می‌پردازیم. سپس در بخش سوم قضایا و تعاریف موجود در آنالیز حقیقی را ارائه می‌کنیم که این قضایا و تعاریف از منبع [۲] انتخاب شده‌اند. در نهایت با استفاده از منابع [۵] و [۱۳] قضایا و تعاریف موجود در آنالیز فوریه و موجک را ذکر می‌کنیم.

۱—۲ تعاریف و قضایا در فرایندهای تصادفی

در این بخش به معرفی برخی از تعاریف و قضایای موجود در مبحث فرایند تصادفی می‌پردازیم.

تعریف ۱.۱ فرض کنید $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ یک فرایند تصادفی باشد، در این صورت تابع میانگین و تابع کوواریانس این فرایند به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$m_X(t) = E[X(t)]. \quad (۱)$$

$$R_X(s,t) = Cov(X(s),X(t)) = E[X(s)X(t)] - m(s)m(t). \quad (۲)$$

تعریف ۲.۱ فرایند تصادفی $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ را حرکت براونی با پارامتر $\sigma(> 0)$ می گوییم، اگر:

۱) $B(0)=0$؛

۲) $\{B(t) : t \geqslant 0\}$ دارای نموهای مانا و مستقل باشد؛

۳) برای هر $t > 0$، $B(t)$ دارای توزیع نرمال با میانگین 0 و واریانس $\sigma^2 t$ باشد.

تعریف ۳.۱ در تعریف ۲.۱، اگر مقدار پارامتر، σ، را برابر با ۱ باشد، آن‌گاه این فرایند را حرکت براونی استاندارد می‌گوییم.

تعریف ۴.۱ فرایند تصادفی $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ را فرایند گاوسی مانا می گوییم، اگر:

۱) به ازای هر n و $t_1, ..., t_n$، بردار $X = (X(t_1), ..., X(t_n))$ دارای توزیع نرمال n- متغیره باشد؛

۲) (مانای وسیع) به ازای هر $s, t \in \mathbb{R}$، $m_X(t) = c$ و $R_X(s,t)$ فقط به فاصله‌ی s و t بستگی داشته باشد.

تعریف ۵.۱ در تعریف ۴.۱، اگر فرایند $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$، فقط در شرط (۱) صدق کند، آن‌گاه این فرایند را فرایند گاوسی می‌گوییم.

برای حرکت براونی تعریف دیگری نیز ارائه می‌شود، که معادل با تعریف ۲.۱ است.

تعریف ۶.۱ فرایند تصادفی $\{B(t) : t \geqslant ۰\}$ را حرکت براونی با پارامتر $\sigma(> ۰)$ می گوییم، اگر:

۱) $\{B(t) : t \geqslant ۰\}$ یک فرایند گاوسی باشد؛

۲) به ازای هر $s, t \geq ۰$، $m_B(t) = ۰$ و $R_B(s,t) = \sigma^۲ \min\{s,t\}$.

تعریف ۷.۱ فرض کنید $\{B(t) : t \geq ۰\}$، حرکت براونی استاندارد باشد، در این صورت فرایند

$$\{U(t) = e^{-\lambda t} B(\frac{\sigma^۲ e^{۲\lambda t}}{۲\lambda}) : t \geq ۰\}, \qquad (۳)$$

را فرایند اورنشتن اولنبک[۸] با پارامترهای $\lambda(> ۰)$ و $\sigma(> ۰)$ می گوییم.

فرایند اورنشتن اولنبک کاربرد زیادی در مسائل مالی و اقتصادی دارد.

نکته ۸.۱ از فرایند اورنشتن اولنبک با تغییر مقیاس زمان، حرکت براونی استاندارد بدست می آید، در نتیجه فرایند اورنشتن اولنبک یک فرایند گاوسی است. تابع میانگین و تابع کوواریانس فرایند اورنشتن اولنبک به صورت زیر است:

[۸] Ornstein-Uhlenbeck

$$E[U(t)] = 0. \quad (۴)$$

$$R_U(t,s) = Cov(U(t),U(s)) = \frac{\sigma^2 e^{-\lambda(t-s)}}{2\lambda}, \quad 0 \leq s < t. \quad (۵)$$

تعریف ۹.۱ فرض کنید $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ یک فرایند تصادفی و $h > 0$ باشد. در این صورت اگر به ازای هر $t_1, ..., t_n$، $X(t_1), ..., X(t_n)$ هم توزیع با $X(t_{1+h}), ..., X(t_{n+h})$ باشد، آنگاه فرایند $\{X(t) : t \in \mathbb{R}\}$ را مانای اکید می‌گویند.

نکته ۱۰.۱ با توجه به اینکه در فرایند گاوسی مانایی اکید با مانایی وسیع معادل هستند، پس با توجه به رابطه‌های (۴) و (۵)، فرایند اورنشتن اولنبک یک فرایند گاوسی مانا است.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $\{B_1(t) : t \geq 0\}$ و $\{B_2(t) : t \geq 0\}$ حرکت‌های براونی با پارامترهای یکسان، و به ازای هر s, t، $B_1(t)$ و $B_2(s)$ مستقل باشند، در این صورت حرکت براونی توسعه یافته به صورت زیر تعریف می‌شود: