بسم الله الرحمن الرحيم

دانشکده علوم پایه
گروه ریاضی
گرایش کاربردی

تبدیلات لاپلاس و تبدیلات لاپلاس کارسون چندبعدی و مسائل مقدار مرزی

از

بهروز سالخورده مقدم

استاد راهنما
دکتر آرمان عقیلی

اردیبهشت ۱۳۸۸

تقدیم به

شکوفه زندگی ام سینا

همسر عزیزم و تمام کسانی که دوستشان دارم

بسمک یا علیم

من لم یشکر المخلوق و لم یشکر الخالق

حال که با استعانت از ایزد یکتا توفیق تدوین این رساله را یافته‌ام بر خود واجب می‌دانم از تمامی عزیزانی که در طی انجام این پژوهش از راهنمایی و یاری شان بهره‌مند گشته‌ام تشکر و قدردانی کنم و برای ایشان از درگاه پروردگار مهربان آرزوی سعادت و پیروزی نمایم.

در ابتدا صمیمانه‌ترین تقدیرها تقدیم به پدر و مادر عزیزم و همسر مهربانم که همواره حامی و مشوقم بوده‌اند و پیمودن روزهای سخت و آسان زندگی‌ام بدون دعای خیر و برکت وجودشان غیر ممکن بود.

از استاد راهنمای ارجمندم جناب آقای دکتر آرمان عقیلی، که با سعه صدر و صبوری مرا راهنمایی نموده و در پیشبرد این پایان نامه سعی تمام مبذول داشتند کمال تشکر را دارم.

از داوران محترم جناب آقای دکتر جعفر صابری نجفی استاد محترم دانشگاه فردوسی مشهد و جناب آقای دکتر اسدا... آسرائی و جناب آقای دکتر نصیر تقی زاده اساتید محترم دانشگاه گیلان که زحمت بازخوانی و داوری این مجموعه را به عهده داشتند صمیمانه تشکر و قدردانی می‌نمایم.

از کلیه اساتید گرانقدر گروه ریاضی که در دوران تحصیل از محضرشان کسب فیض نمودم بویژه جناب آقای دکتر هاشم صابری نجفی تشکر می‌نمایم.

و در نهایت از تمامی دوستان، هم کلاسی‌ها و هم دانشکده‌ای‌های گرامی‌ام که در طول این مدت افتخار مصاحبت و همفکری با آنها را داشتم صمیمانه سپاسگزاری می‌کنم.

بهروز سالخورده مقدم

اردیبهشت ماه هشتاد و هشت شمسی

فهرست مطالب

فصل چهارم

فهرست شکل‌ها

صفحه

چکیده

تبدیلات لاپلاس و تبدیلات لاپلاس کارسون چندبعدی و مسائل مقدار مرزی

بهروز سالخورد مقدم

اولین فصل دو هدف اصلی را در بر دارد، در بخش اول به ارائه خواص اصلی تبدیلات لاپلاس و قضایای مربوطه پرداخته شده و همچنین کاربرد آنها در حل معادلات دیفرانسیل تاخیری نشان داده شده است.
بخش دوم دارای دو قسمت مجزا است ، درهر قسمت ابتدا به محاسبه عکس تبدیلات لاپلاس تک مقداری و چند مقداری پرداخته شده است و در انتهای هر قسمت مسائل کاربردی، معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی از شاخه مکانیک ارائه شده که با بکارگیری روش تبدیلات لاپلاس حل شده اند. و موضوعی که بیشتر در این فصل مورد تاکید بوده بکارگیری قضیه مانده ها بوده است.
در فصل دوم، با بکارگیری انتگرال بروموِیچ و تبدیلات لاپلاس خواص جدیدی از چند جمله ایهای لاگر ارائه شده که در حل برخی از مسائل کاربردشان نشان داده شده است . همچنین با استفاده از چند جمله ایهای لاگر و از چند جمله ایهای لاگر تعمیم یافته به حل معادلات انتگرال منفرد با هسته بسل و نمایی پرداخته شده است.
در فصل سوم ، ابتدا برخی از خواص مهم تبدیلات لاپلاس دو بعدی بیان شده و سپس با بکارکیری قضیه افروز نتایج سودمندی را بدست آورده ایم، در ادامه به ارائه چندین قضیه که برای محاسبه عکس تبدیلات لاپلاس دو بعدی ، سه بعدی و n- بعدی بکار می روند پرداختیم. نکته قابل توجه در این قضایا این است که با بکارگیری هرتابع جدیدی در این قضایا به عکس تبدیل لاپلاس تابع جدید دیگری می رسیم، که شاید با روشهای دیگر نتوان براحتی محاسبه کرد. و در انتها به کاربرد تبدیلات لاپلاس دو بعدی در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت و غیرهمگن در حالت کلی پرداخته شده است بویژه مسائل مقدار مرزی همانند معادله تلگراف، معادله موج مورد بررسی قرار گرفته اند.
نهایتا" در فصل چهارم قضیه ای کلی در مورد تبدیلات لاپلاس- کارسون دو بعدی ارائه دادیم که نتایج حاصله از این قضیه برای محاسبه عکس تبدیلات لاپلاس- کارسون دو بعدی بکار گرفته می شود و در انتهای این فصل به حل مساله مقدار مرزی با استفاده از این تبدیل پرداختیم.

کلمات کلیدی: تبدیل لاپلاس چند بعدی ، تبدیل لاپلاس دو بعدی، چند جمله ایهای لاگر، قضیه افروز، معادله تلگراف، معادله کسری- زمانی دیفیوژن.

Abstract

Multi-Dimensional Laplace and Laplace-Carson transforms and B.V.P.
Behrouz Salkhord Moghaddam

The purpose of chapter 1 is two-fold .the first section serve as a refresher on the background material: properties of Laplace transform method and complex variables.
In section 2, we subdivide the material according to whether we invert a single-valued or multi-valued transform. Each section is then subdivided into two parts.
The first part deals with simply the mechanics of to how to invert the transform while the second part actually applies the transform methods to solving partial differential equation.
The constant theme is the repeated application of the residue theorem to invert Laplace transform.
In the second chapter, we use Bromwich's integral and laguerre polynomials to derive a formula for inverse Laplace transform. We give also some identities involving Laguerre polynomials and as an application of theorems and their results, a number of infinite integrals and some illustrative examples are also provided.
In the third chapter, we consider two-dimensional Laplace Transform and some properties of Efros theorem along with few constructive examples. Also the main purpose of this chapter is to establish a several new theorems for calculating two-dimensional Laplace transform. The theorems are applied to the most commonly used special functions and some more can be obtained by the same technique. Laplace transform is a powerful tool in the solution of partial differential equation and boundary value problems. In the last section we consider the wave equation related to vibration of the wire and telegraph equation
The object of chapter four is to establish new theorem and corollary involving systems of two-dimensional Laplace transforms containing several equations. This system can be used to calculate new Laplace transform pairs. In the second part, partial differential equation is solved by using the two-dimensional Laplace-Carson transformation.

Key words: Multidimensional Laplace transform ,Two - dimensional Laplace Transform ,Laguerre Polynomials, complex inversion formula, Efros theorem, telegraph equation, time fractional Diffusion equations.

تاریخچه

۱- پیشگفتار

نظریه تبدیلات لاپلاس بطور روز افزون در خدمت ریاضی،مکانیک و علوم مهندسی قرار گرفته است. تبدیلات لاپلاس کاربرد وسیعی در حل معادلات انتگرالی و معادلات دیفرانسیل دارد. روشهای تبدیلات لاپلاس به عنوان روش محاسباتی مشهور است که زمینه آسان و موثری را در حل مسائلی که در مهندسی و علوم ظاهر می شوند فراهم می سازد.

آنچه در حال حاضر در این نظریه مهم است به دست آوردن تبدیلات لاپلاس دو بعدی ، سه بعدی و چند بعدی و یافتن کاربرد آنهاست. در سالهای اخیر تعمیم تبدیلات لاپلاس چند بعدی مورد نظر بوده است، در این رساله، هدف اصلی ما بر این است که با استفاده از تبدیلات لاپلاس یک یا دو بعدی معلوم، تبدیلات جدیدی را در فضای دو بعدی و n-بعدی بدست آوریم.

این رساله شامل چهار فصل است. در فصل اول برخی از قضایای اساسی تبدیل لاپلاس تک بعدی ارائه و به کاربرد تبدیلات لاپلاس در حل مسائل مقدار مرزی مختلف پرداخته شده است. در فصل دوم، برخی از خواص چند جمله ایهای لاگر در ارتباط با تبدیلات لاپلاس مورد توجه بوده و با بکارگیری این ارتباط، نکات،روابط و نتایج جدیدی در زمینه محاسبه بسط لاگر توابع، نحوه بدست آوردن تابع همگرائی بسط های لاگر و محاسبه برخی از سریها که در نظریه مارکوف ظاهر می شوند، بدست آمده است. فصل سوم به بیان و اثبات قضایایی در تبدیلات لاپلاس دو بعدی و n-بعدی اختصاص یافته است و برخی از کاربردهای این قضایا با ذکر مثالهایی نشان داده شده است و صحت تمامی نتایج حاصله، با مقایسه با جداول تبدیلات لاپلاس موجود تک بعدی و دوبعدی و همچنین استفاده از نرم افزار میپل تحقیق شده اند. نهایتا" در فصل چهارم قضیه ای کلی در مورد تبدیلات لاپلاس-کارسون دوبعدی ارائه شده و لازم به ذکر است که این قضیه تعمیمی از قضیه ای است که در حالتهای خاص در دو مقاله پرفسور دهیا به اثبات رسیده است . نتایج حاصل از این قضیه در محاسبه معکوس تبدیلات لاپلاس- کارسون دو بعدی کاربرد دارد.

۲- سیر تاریخی تبدیلات لاپلاس

یکی از تحولات مهم ریاضی در اواخر قرن نوزدهم میلادی ؛ حساب عملیاتی است که کاربرد اساسی در علوم فیزیک و مهندسی دارد.با بکارگیری روش عملیاتی می توان مسائل فیزیکی که بفرم معادلات دیفرانسیل خطی یا معادلات دیفرانسیل جزئی با ضرایب ثابت وهمچنین دستگاه معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی و اولیه ومسائلی ازاین نوع مطرح می شوند را براحتی حل کرد .مزیت روش عملیاتی نسبت به روشهای کلاسیک در کم کردن محاسبات و عمومی تر کردن جوابها می باشد و نیز در بسیاری از موارد ماهیت جوابهای حاصله از این روش نسبت به روشهای کلاسیک ساده تر تعبیر می شوند.

تا اواسط ۱۹۲۰ روشهای حساب عملیاتی هویساید؛ جفری و برومویچ در استفاده از انتگرالهای مرزی و روش کارسون در انتگرالهای معین که برای حل مدارهای الکتریکی استفاده می شوند؛ دارای تکنیکهای متفاوت و مجزا بودند؛ اما در اواخر سال ۱۹۲۰ ارتباط برومویچ و کارسون باعث شد نظریه تبدیلات لاپلاس و کاربردی از قضیه معکوس میلن ؛دارای بیشترین جایگاه در حساب تبدیلات باشند.

کارسون و برومویچ کار را با تبدیلات لاپلاس توابعی نظیر تابع $f(x)$ شروع کردند؛ بدین صورت که هرگاه فرض کنیم تبدیل لاپلاس- کارسون تابعی مانند $f(x)$ تابع $F(s)$ باشد آنگاه آنرا بصورت زیرتعریف می کنند:

$$F(s) = s\int_0^{\infty} \exp(-s\,x) f(x)\;dx \qquad (۱)$$

کارسون در حالت خاص بحث رابطه فوق را بعنوان یک معادله انتگرالی برای وقتی که تابع f(x) معلوم نباشد ولی F(s) در دست باشد ؛ انجام دادند و برومویچ نظریه متفاوتی را بشرح زیر بیان کرد بدین ترتیب که انتگرال مختلط مفروض

$$\mathrm{f(x)} = \frac{1}{2\pi\,\mathrm{i}}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(sx)\frac{F(s)}{s}\,ds \qquad (۲)$$

را در نظرگرفت و به این نتیجه رسید که رابطه (۲) جواب معادله انتگرالی (۱) است و برعکس.

ادامه کار برومویچ در زمینه حساب عملیاتی بصورت ماهرانه ای توسط جفری، خصوصا" روی سیستمهای پیوسته مقادیر ویژه دنبال شد.

در طی این سالها کارسون مقالات زیادی منتشر کرد. او در این مقالات سعی در فرموله بندی حساب عملیاتی براساس نظریه انتگرالها داشت. اگرچه کارسون معادله انتگرالی اش رابه عنوان نوعی از تبدیلات لاپلاس تشخیص داد ولی در طول گسترش قوانین هویساید که بر اساس نظریه توابع ولترا و لوی بود ؛ معادله انتگرالی کارسون در یک شکل شناخته شده بعنوان انتگرال مرزی حل شد. در ادامه مارچ راه حل مزبور را آنقدر جالب بیان کرد که با راه حل برومویچ یکی بود در این مدل هر دو راه حل برومویچ وکارسون با هم ادغام شده اند. در سال ۱۹۲۹ واندرپول مقاله مهمی در زمینه حساب عملیاتی منتشر کرد ؛ در این مقاله مسائل مقدار مرزی زیادی حل شد و ادامه کار واندپول توسط دالزل کامل شد.

ریاضیدانان در اواسط قرن بیستم تلاش کردند تا اصل ریاضی دقیقی برای روش هویساید بدست آورند. برجسته ترین کارها در این دوره توسط برومویچ، جفری ، پل لوی ، مورنگان، وینر ، بتمن و بسیاری دیگر انجام شد.

اصولا" چهار روش در مباحث هویساید مطرح هستند که عبارتند از:

الف) استفاده مستقیم از عملگرهای صوری

ب) انتگرالهای خطی مختلط

ج) تبدیلات لاپلاس

د) انتگرالهای فوریه

کاربردهای وسیع تبدیلات لاپلاس در قرن بیستم باعث بوجود آمدن حساب عملیاتی تبدیلات لاپلاس دو بعدی شد، این کار توسط هامبرت[۱]در سال ۱۹۳۶ صورت گرفت و جاگر[۲] در سال ۱۹۴۰ توانست مسائل انتقال حرارت را با شرایط مرزی حل نماید. ولکر[۳] در سال ۱۹۵۰ نیز روشهایی را در حساب عملیاتی چند متغیره یافت که باعث حل معادلات دیفرانسیل با توابع خاص شد ،همچنین استرین و هیگنز [۴] به سال۱۹۵۱ به حل مسائل مقدار مرزی پرداختند و بالاخره در سال ۱۹۶۲ دتکین و پرودنیکف [۵] کتابهایی را در زمینه تبدیلات لاپلاس دو بعدی منتشر کردند که در آن خاصیتهای جدیدی از این تبدیلات بحث شده اند. همزمان با گسترش مطالعات در این زمینه ، ریاضیدانان زیادی از جمله برایچکف، هالیدک و پرفسور دهیا مقالاتی را در زمینه تبدیلات لاپلاس n-بعدی منتشر کرده اند که اکثر مقالات منتشره توسط پرفسورآر. اس. دهیا از دانشگاه ایالتی آیووای امریکا می باشد.

پرفسور دهیا در سال ۱۹۶۷ [۶] اولین مقاله خود را که شامل قضایایی در زمینه عملگرهای محاسباتی n-بعدی را منتشر کرد و با ادامه تحقیقاتش در این زمینه [۷]، تبدیلات لاپلاس n-بعدی را بیشتر به دنیای ریاضیات معرفی نمود. و با در نظر گرفتن اینکه حالتهای خاص آن $(n = ۱,۲,...)$ تبدیلات لاپلاس تک بعدی و دو بعدی و بالاتر را در بر می گیرد مورد استقبال روز افزون ریاضیدانان و مهندسین قرار گرفت بطوریکه به سال ۱۹۷۱ ، اوانز و جکسن [۸] از تبدیلات لاپلاس دو بعدی برای حل مسائل مقدار مرزی آمیخته بهره گرفتند.

همچنین در سال ۱۹۷۴ یاداوا [۹] چندین قضیه در زمینه تبدیلات لاپلاس- کارسون دو بعدی ارائه داد که این قضایا بر اساس تابع اولیه دو متغیره بنا شده بود و نتایج مفیدی را برای محاسبه تبدیلات لاپلاس-کارسون دو بعدی و انتگرالهای دوگانه خاص ارائه می دادند.

همزمان با مطالعات پرفسور دهیا [۱۰,۱۱] ، در سال ۱۹۸۳ بوشمن [۱۲] تبدیلات لاپلاس دو بعدی را برای حل مساله انتقال گرما ما بین سیال جاری و صفحه بکار برد. در ادامه تحقیقات پرفسور دهیا [۱۳,۱۴,۱۵] و ج.دبنات [۱۶] ، در سال ۱۹۸۹ مقاله ارزشمندی توسط پرفسورآر.اس. دهیا و ج.دبنات [۱۷] منتشر شد این مقاله شامل دو بخش اصلی است در قسمت اول برخی قضایای جدید و مهم در زمینه لاپلاسهای n-بعدی ارائه شده و چندین مثال سودمند این قضایا نشان داده شده است. در قسمت دوم معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی پتانسیل الکترواستاتیک ارائه و با روش تبدیلات لاپلاس دو بعدی حل شده است.

یک سال بعد در سال ۱۹۹۰، پرفسور دهیا به همراه ویناپاگامورتی [۱۸]، مقاله پر محتوی دیگری ارائه دادند که در آن چندین قضیه در زمینه تبدیلات لاپلاس n-بعدی، همراه مثالها و نتایج مفیدی از توابع خاص ارائه شده و معادله انتقال گرما برای خنک کردن صفحه نیمه متناهی نازک و معادله انتشار گرما در نوار نیمه متناهی بطوریکه حاشیه های نوار ایزوله می باشند را با شرایط مرزی و اولیه، مورد بررسی، و با روش تبدیلات لاپلاس دوبعدی حل کردند.

در سال ۱۹۹۲، پرفسور دهیا و دکترجعفر صابری [۱۹,۲۰] ، مقالاتی را در زمینه تبدیلات لاپلاس n-بعدی در هشتمین کنفرانس کاربردی در اوکلاهوما ارائه دادند که در این مقالات،قضایای جدیدی از تبدیلات لاپلاس n-بعدی و کاربردهای آنها در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی غیر همگن مرتبه دوم ارائه شده بود که کاربرد موثر این تبدیلات را نشان می داد. بطور همزمان کتابی در زمینه تبدیلات انتگرالی چند بعدی توسط برایچکف و پرودنیکف به چاپ رسید [۲۱].

در سال ۱۹۹٤، دکترجعفر صابری،در مقاله ائی [۲۲] در زمینه تبدیلات لاپلاس n-بعدی قضایائی را به اثبات رسانده که در نتیجه آن وارون لاپلاس برخی توابع خاص نظیر, تابع فوق هندسی تعمیم یافته و تابع لومل n بعدی محاسبه شده اند.

در سال ۲۰۰۱ پرفسور دهیا و دکتر باباخانی مقاله ای [۲۳] را ارائه دادند که این مقاله شامل چند قضیه در ارتباط با تبدیلات لاپلاس-کارسون دوبعدی و حل معادله موج تحت شرایط اولیه و مرزی خاص بود.

با نگاهی به مقالات ارائه شده در زمینه تبدیلات لاپلاس n-بعدی می توان به این نتیجه رسید که از سال۱۹۹۰ ، این روش مورد توجه اساتید و ریاضیدانان آسیائی و ایرانی بوده است . بخصوص در دهه اخیر شاهد مقالاتی در این زمینه بودیم،در مقالات جدید ارائه شده، نویسندگان ، در قالب مقالاتی چندین قضیه جدید در زمینه تبدیلات لاپلاس n-بعدی ارائه دادند و با مثالهای ارائه شده بیانگر نتایج جدید از این قضایا بودند و با توجه به الگوریتم پذیری تمام قضایای ارائه شده در زمینه تبدیلات لاپلاس دوبعدی و n-بعدی استفاده از نرم افزار هایی همانند میپل (maple) باعث افزایش کارائی این قضایا و نتیجه گیری سریع و مفید از این قضایا شده است که در مقالات اخیر [۲٤,۲٥,۲٦,۲۷,۲۸,۲۹,۳۰.۳۱] به چشم می خورد در عین حال نویسندگان مقالات اخیر توانسته اند به کمک این تکنولوژی انکار ناپذیر یعنی نرم افزارها، قضیه ای را ارائه دهند که تعمیمی از قضایای دو مقاله پرفسور دهیا در سالهای۱۹۸۵ و۲۰۰۱ می باشد وهمچنین مبادرت به حل مسائل مقدار مرزی زیر کرده اند:

۱. معادله انتقال گرما برای میله بسیار نازک نیمه متناهی با خنک کننده ای حول آن

۲. ارتعاش طناب توسط ضربات آنی با در نظر گرفتن اصطکاک

۳. معادله تلگراف

همچنین با بکارگیری قضیه معروف افروز دو بعدی نتایج جدیدی را بدست آوردند که ایده حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت در حالت کلی را نوید می داد که در سال ۲۰۰۸ این راه حل همراه با مثالهایی ارائه گردید.

در سال ۲۰۰۸ مقاله ای [۲۷] تحت عنوان حل معادله موج،معادله لاپلاس و معادله گرما با جملات کانولوشن با استفاده از تبدیلات لاپلاس دوبعدی که توسط الطیب و کیلیکمن ارائه شده است که در نوع خود قابل توجه می باشد.

۳- انگیزه و اهداف رساله

روش تبدیلات لاپلاس طبیعی ترین و عمومی ترین روش برای تحقیق و بررسی می باشد و نظریه مدرن حساب عملیاتی هویساید اصولا" بر مبنای تبدیلات لاپلاس؛ پیشرفت داشته و تعمیم یافته است و در بین تبدیلات انتگرالی تبدیلات لاپلاس از اهمیت ویژه ای برخودار است.مسائل زیادی وجود دارند که حل آنها بوسیله تبدیلات انتگرالی بجزء تبدیل لاپلاس به سهولت انجام نمی گیرد ولی از طریق کاربرد این تبدیل به آسانی قابل حل می باشند.مسائلی که با معادلات دیفرانسیل و همچنین معادلات انتگرالی مرتبط می شوند با بکار بردن تبدیل لاپلاس تک بعدی یا دو بعدی براحتی قابل حل می باشند. علیرغم مطالعات وسیعی که در سالهای ۱۹۲۰ و به بعد در زمینه تبدیلات لاپلاس چند بعدی صورت گرفته

است، هنوز جدولی در قیاس با جداول موجود برای تبدیلات لاپلاس تک بعدی ، برای محاسبه تبدیلات لاپلاس دو بعدی و هیچگونه جدولی ولو ناقص برای محاسبات تبدیلات لاپلاس $n \geq ۳$ بعدی در دسترس نیست. هدف از انجام این رساله، اثبات قضایائی چند در رابطه با تبدیلات لاپلاس چند بعدی که کاربرد نتیجه آنها به فرمولهائی برای محاسبه تبدیلات لاپلاس دو یا سه بعدی و یا چند بعدی منتج خواهد شد. در انجام این مهم فرض ما براین است که تبدیل لاپلاس تک بعدی تابع اولیه موجود باشد و سپس با بکارگیری تابع نتیجه حاصل از آن و نیز با افزودن شرطهای جدید به تابع اولیه نهایی با آرگومانهای مختلف خواهیم رسید. در عین حال سعی شده با بکار گرفتن تبدیلات لاپلاس دو بعدی در حل مسائل مقدار مرزی بویژه در حل در حالت کلی معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی مرتبه دوم با ضرایب ثابت و غیر همگن کاربرد دیگری از این تبدیلات را نشان دهیم.

فصل اول

تبدیل لاپلاس تک بعدی و کاربردهای آن

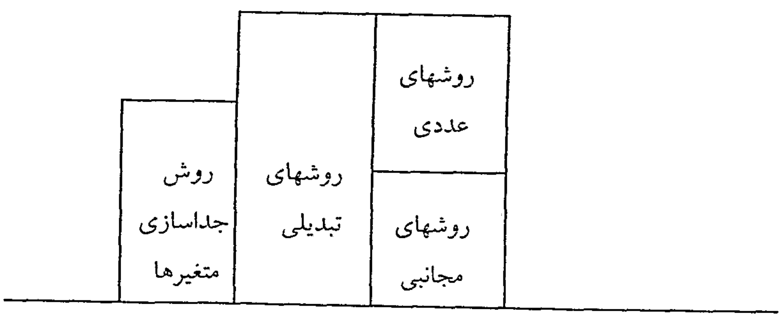
فصل اول

در این فصل، به کاربرد تبدیل لاپلاس در حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می پردازیم که در علوم مهندسی با آنها مواجه می شویم و سعی ما بر این بوده است که از مثالهائی که اخیرا در مقالات معتبر ارائه شده استفاده شود. تحقیقات نشان داده که روشهای تبدیلی، پلی ما بین روشهای جداسازی متغیرها و روشهای حل عددی و روشهای مجانبی معادلات با مشتقات جزئی است که این ارتباط به شکل زیر نمایش داده شده است.

روشهای تبدیلی شبیه روشهای جداسازی متغیرها می باشند، زیرا این راه حل منجر به حل برخی از انتگرالها روی مسیرها می شود و نیز لازم به ذکر است که همه نتایج حاصل از جداسازی متغیرها، با استفاده از تبدیلات نیز بدست می آیند.

همچنین روشهای تبدیلی نقطه قوتی برای توسعه مجموعه مسائل می باشد، بعنوان مثال برای آن دسته از مسائلی که دارای شرایط مرزی وابسته به زمان اند، روش جداسازی متغیرها اکثرا" کارائی چندانی ندارد.

در روشهای تبدیلی، حتی در حالتهایی که معکوس تبدیلات بطور دقیق، بدست نمی آیند، می توان بطور سودمندی آنها را بکار گرفت زیرا روشهای عددی و روشهای مجانبی، برای محاسبه تقریبی معکوس این تبدیلات وجود دارند.



۱-۱ تبدیل لاپلاس

روشهای تبدیل فوریه برای توابعی که بر R مطلقا انتگرالپذیر نیستند کارائی ندارند بنابراین آنها نمی توانند در مجموعه وسیعی از توابع، از جمله توابعی با مقادیر ثابت، بکار گرفته شوند. بعنوان مثال اگر $f(x)=\begin{cases} ١ & x \geq ٠ \\ ٠ & x < ٠ \end{cases}$ در

اینصورت: $F\{f(x)\} = \int_{\circ}^{\infty} e^{-isx} dx$ بطوریکه $s \in R$. اما این انتگرال همگرا نمی باشد و با گسترش دامنه s به $\mathbb{C}$ و قرار دادن $s = \alpha + i\beta$ که $\alpha, \beta \in R$، انتگرال برای $\beta > \circ$ همگرا می شود. در حالت کلی اگر قرار دهیم:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-ax} g(x) & x \geq \circ, a \in R \\ \circ & x < \circ \end{cases}$$

در اینصورت:

$$F(s) = \int_{\circ}^{\infty} e^{-isx-ax} g(x) dx = \int_{\circ}^{\infty} e^{-\alpha x} g(x)\, dx$$

بطوریکه $\alpha = a + is \in \mathbb{C}$.این مطلب ، ایده تبدیل لاپلاس که حالت خاصی از تبدیل فوریه می باشد را برای اولین بار برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی و معادلات با مشتقات جزئی معرفی کرد. [۳۲]

تعریف (۱ - ۱)

فرض می کنیم $f : [\circ, \infty) \to \mathbb{C}$ با $s \in \mathbb{C}$، تبدیل لاپلاس از $f(x)$ و معکوس تبدیل لاپلاس از $F(s)$ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$F(s) = L\{f(x)\} = \int_{\circ}^{\infty} e^{-sx} f(x)\, dx$$

$$f(x) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s) e^{xs} ds;\ \ \mathrm{Re}(s) \geq c \qquad (۱-۱)$$

و c طول همگرائی لاپلاس است .

لازم به ذکر است برای توابع خوش- رفتار، $F(s)$ بعنوان تابعی از مقادیر معین s بدست می آید ولی برای برخی از توابع که به ازای هر مقداری از s،انتگرال تبدیل، همگرا نباشند در اینصورت تبدیل لاپلاس وجود نخواهد داشت. مثلا تبدیل لاپلاس e^{t^2} وجود ندارد.

لم (۱ - ۱) فرض می کنیم $\varphi(x)$تابعی پیوسته بر بازه $[\circ,1]$ باشد و قرار می دهیم:

$$\int_{\circ}^{1} x^{n-1} \varphi(x)\, dx = \circ \qquad n = 1,2,\ldots \qquad (۲-۱)$$

در اینصورت

$$\varphi(x) = \circ \qquad \circ \leq x \leq 1 \qquad (۳-۱)$$

اثبات: مراجعه شود به مرجع [۳۳].

قضیه (۱ - ۱) *(قضیه لرچ)* اگر $f(t)$ بر هر بازه متناهی $\circ \leq t \leq N$،قطعه به قطعه پیوسته و از مرتبه نمایی برای $t > N$ باشد در اینصورت معکوس تبدیل لاپلاس $F(s)$، یعنی $L^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ منحصر به فرد است. [۳۳]

اثبات: برای اثبات این قضیه لم (۱ - ۱) را بکار می بریم. فرض می کنیم که $g(t)$ تابع دیگری باشد که در رابطه (۱-۲) صدق می کند با تعریف $h(t) = f(t) - g(t)$، $h(t)$ پیوسته است. بنابراین

$$\int_{\circ}^{\infty} e^{-st} h(t)\, dt = \circ \qquad \mathrm{Re}\, s \geq \gamma \qquad (۴-۱)$$

فرض می کنیم $s = \gamma + n$، بطوریکه n هر عدد صحیح مثبت است، بنابراین

$$\int_0^\infty e^{-(\gamma+n)t}h(t)\,dt=\int_0^\infty e^{-nt}(e^{-\gamma t}h(t))\,dt$$
$$=[e^{-nt}\int_0^t e^{-\gamma u}h(u))\,du]_0^\infty+n\int_0^\infty e^{-nt}(\int_0^t e^{-\gamma u}h(u)\,du)\,dt,$$
$$=n\int_0^\infty e^{-nt}(\int_0^t e^{-\gamma u}h(u)\,du)\,dt$$

و با توجه به رابطه (۱-٤) بدست می آوریم:

$$\int_0^\infty e^{-nt}\varphi(t)\,dt=0$$

بطوریکه

$$\varphi(t)=\int_0^t e^{-\gamma t}h(t)\,dt \qquad (۵-۱)$$

در رابطه $(۱-۵)$ قرار می دهیم $x=e^{-t}$, $k(x)=\varphi(\ln(\frac{1}{x}))$. بنابراین $k(x)$ بر بازه $[0,1]$ پیوسته است.

لذا قرار می دهیم:

$$k(0)=\lim_{t\to\infty}\varphi(t) \qquad ,k(1)=k(0)=0$$

همچنین

$$\int_0^1 x^{n-1}\varphi(x)\,dx=0 \quad n=1,2,\ldots$$

و با بکار گیری لم فوق بدست می آوریم:

$$\varphi(x)=0 \qquad 0\le x\le 1$$

بنابراین

$$\varphi(t)=\int_0^t e^{-\gamma t}h(t)\,dt=0 \quad ;t\ge 0$$

زیرا $e^{-\gamma t}h(t)$ زمانیکه $t\ge 0$ می باشد پیوسته است و طبق رابطه فوق، $t\ge 0$ $\quad e^{-\gamma t}h(t)=0$ و لذا $t\ge 0$ $\quad h(t)=0$ در نهایت $t\ge 0$ $\quad g(t)=f(t)$ می باشد و قضیه اثبات می شود.

قضیه فوق این اطمینان را می دهد که اگر از روشهای دقیق برای محاسبه تبدیل لاپلاس استفاده شود تبدیل لاپلاس $F(s)$ بطور منحصر بفردی از $f(t)$ بدست می آید.

۱-۲ قضیه افروز و کاربرد های آن

قضیه (۱ – ۲) (قضیه افروز [۳۰]) فرض کنید $L\{\varphi(x)\}=\Phi(s)$ و $L\{u(x,\tau)\}=U(s)\exp(-\tau\,q(s))$ که توابع $U(s)$ و $q(s)$ تحلیلی اند در این صورت:

$$L\{\int_0^\infty \varphi(\tau)\,u(x,\tau)\,d\tau\}=\Phi(q(s))\,U(s) \qquad (۶-۱)$$

کاربرد های قضیه افروز:

مثال (۱ – ۱) فرض کنید $U(s)=\frac{1}{\sqrt{s}}$ و $q(s)=\sqrt{s}$ آنگاه $U(s)e^{-\tau q(s)}=\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-\tau\sqrt{s}}$ ، لذا

$$L\{\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\exp(-\frac{\tau^2}{4x})\}=\frac{1}{\sqrt{s}}\exp(-\tau\sqrt{s}).$$

در این صورت

$$L^{-1}\{\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} \int_0^\infty \varphi(\tau) \exp(-\frac{\tau^2}{4x})\, d\tau \qquad (۷-۱)$$

مثال (۱ − ۲) معادله انتگرال زیر را با استفاده از قضیه افروز حل نمائید.

$$\varphi(x) = x e^{-x} + \lambda \int_0^\infty J_0(2\sqrt{xt})\, \varphi(t)\, dt \quad |\lambda| \neq 1 \qquad (۸-۱)$$

حل: از طرفین معادله فوق تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \lambda \frac{1}{s} \Phi(\frac{1}{s}) \qquad (۹-۱)$$

با تغییر متغیر s به $\frac{1}{s}$ ، خواهیم داشت:

$$\Phi(\frac{1}{s}) = \frac{s^2}{(s+1)^2} + \lambda s \Phi(s) \qquad (۱۰-۱)$$

با جایگذاری رابطه (۱−۱۰) در رابطه (۱ − ۹) داریم:

$$\Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \lambda \frac{1}{s}\{\frac{s^2}{(s+1)^2} + \lambda s \Phi(s)\}$$

$$(1-\lambda^2)\, \Phi(s) = \frac{1}{(s+1)^2} + \lambda \frac{s}{(s+1)^2} \qquad (۱۱-۱)$$

از طرفین رابطه (۱ − ۱۱) معکوس تبدیل لاپلاس می گیریم

$$\varphi(x) = \frac{e^{-x}}{1-\lambda^2}(x - \lambda(1-x))$$

مثال (۱ − ۳) معکوس تبدیل لاپلاس تابع زیر را محاسبه نمائید.

$$L^{-1}\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\} = g(t) \qquad (۱۲-۱)$$

حل : با استفاده از رابطه (۱− ۱۲) داریم:

$$L^{-1}\{\frac{\Phi(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}\} = L^{-1}\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\} = L^{-1}\{\frac{1}{\sqrt{s}} \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})}\} \qquad (۱۳-۱)$$

از رابطه (۱ − ۱۳) نتیجه می گیریم

$$\Phi(\sqrt{s}) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(a+\sqrt{s})} \Rightarrow \Phi(s) = \frac{e^{-as}}{s(a+s)} \qquad (۱۴-۱)$$

با گرفتن معکوس تبدیل لاپلاس از طرفین رابطه (۱ − ۱۴) خواهیم داشت:

$$\varphi(t) = \frac{1}{a} L^{-1}\{\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-as}}{s+a}\}$$

$$= \frac{1}{a}\{H(t-a) - e^{-a(t-a)} H(t-a)\}$$

با استفاده از رابطه (۱ − ۷) داریم:

$$g(t)=L^{-1}\{\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s(a+\sqrt{s})}\}=\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty \frac{1}{a}\{H(t-a)-e^{-a(t-a)}H(t-a)\}\exp(-\frac{\tau^2}{4t})\,d\tau$$

$$=\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4t})\,d\tau-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp(-\frac{\tau^2}{4t}-a\tau+a^2)\,d\tau$$

$$=\frac{1}{a}erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}})-\frac{1}{a\sqrt{\pi t}}\int_a^\infty \exp(-(\frac{\tau}{2\sqrt{t}}-a\sqrt{t})^2+(a^2+ta^2))\,d\tau$$

$$=\frac{1}{a}erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}})-\frac{1}{a}\exp(a^2(1+t^2))erfc(\frac{a}{2\sqrt{t}}+a\sqrt{t}). \qquad (۱۵-۱)$$

قضیه (۱-۳): [۳٤]

هرگاه تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$ برابر $F(s)$و تبدیل لاپلاس تابع $g(t)$ برابر $G(s)$ باشد، با شرط اینکه

$$\mathrm{Re}\,(s-p)>c>\mathrm{Re}\,(p)>0$$

خواهیم داشت:

$$L\{f(t)g(t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)G(s-p)\,dp$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_C F(z)G(s-z)\,dz$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Re}\,s\{F(z)G(s-z),z=z_k\} \qquad (۱۶-۱)$$

بطوریکه $z_k\,;k=1,2,\dots,n$ نقاط تکین تابع $F(z)$ واقع در ناحیه بسته C می باشند. که خم بروموویچ Cعبارت است از ترکیبی از یک قطعه خط عمودی ما بین $c-iT$و $c+iT$ و نیز خم Γ که قطاعی از دایره ای به مرکز مبداء و به شعاع Rمی باشد .(شکل (۱-۱))

برهان: طبق تعریف تبدیل لاپلاس داریم:

$$L\{f(t)g(t)\}=\int_0^\infty f(t)g(t)e^{-st}$$

$$=\int_0^\infty\{\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)e^{pt}dp\}g(t)e^{-st} \quad ;\mathrm{Re}(p)>c$$

با تعویض ترتیب انتگرالگیری خواهیم داشت:

$$L\{f(t)g(t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)\{\int_0^\infty g(t)e^{-(s-p)t}dt\}\,dp$$

با اعمال شرط $\mathrm{Re}\,(s-p)>c$ می توان نوشت:

$$L\{f(t)g(t)\}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(p)G(s-p)\,dp$$

در نتیجه با اعمال شرایط موجود و انتخاب مسیر C بطوریکه در صورت قضیه توضیح داده شده، نتیجه لازمه حاصل می شود.