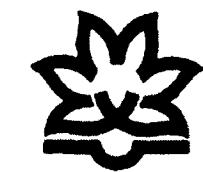


۱۴۴۴



دانشگاه ارومیه

## "بررسی ارتعاشات عرضی و پیچشی سازه پل قوسی تحت اثر بار متحرک"

محمد رضا حق نیا

دانشکده فنی مهندسی

گروه مهندسی مکانیک

۱۳۸۹

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

حق، هدایت مرتضی حسنی  
تمثیل مرتضی

اساتید راهنما :

آقای دکتر شعبانی

آقای دکتر تاریبور دیلو

۱۳۸۹/۹/۸

.....	فهرست مطالب
.....	فهرست جداول
.....	فهرست شکل ها

## فصل اول : مقدمه و تحقیقات انجام شده ..... ۱

## فصل دوم : مروری بر مفاهیم کلی ارتعاشات ناشی از بار متحرک ..... ۱۲

۱۲	۱-۱- مقدمه
۱۳	۲-۱- تعریف مساله و مفروضات اصلی
۱۷	۲-۲- ضریب تاثیر
۱۸	۲-۲-۲- مشخصه سرعت بار متحرک
۱۹	۲-۳-۱- فرمولاسیون ارتعاشات ناشی از بار متحرک بر روی تیر
۱۹	۲-۳-۲- ملاحظات ارتعاشات عرضی تیر تحت اثر بار متحرک
۲۴	۲-۳-۳- ملاحظات ارتعاشات پیچشی تیر تحت اثر بار متحرک
۲۵	۲-۴- فرمولاسیون بار گسترده متحرک بر روی تیر

## فصل سوم : شبیه سازی ارتعاشات سازه پل قوسی تحت اثر بار متحرک ..... ۲۸

۲۸	۳-۱- مقدمه
۲۸	۳-۲- مشخصات اصلی سازه پل قوسی دریاچه ارومیه
۲۳	۳-۲-۱- شرایط تکیه گاهی و جنس سازه پل قوسی
۲۳	۳-۲-۲- ابعاد، نوع تیرهای و مقاطع بکار رفته در شبیه سازی سازه پل قوسی
۳۶	۳-۲-۳- مشخصات عرشه بتنی شبیه سازی شده سازه پل قوسی
۳۷	۳-۳- الگوریتم برنامه برای شبیه سازی بار متحرک
۳۸	۳-۴- درستی آزمایی الگوریتم نوشته شده
۴۴	۳-۵- ترتیب مدلسازی سازه پل قوسی
۴۶	۳-۶- رفتار سازه تحت اثر بار گذاری قطار استاندارد

۱-۶-۳-۱- تعریف نوع قطار شبیه سازی شده و موارد در نظر گرفته شده .....	۴۶
۲-۶-۳- پاسخ استاتیکی پل قوسی تحت بار گذاری قطار .....	۴۷
۳-۶-۳- پاسخ دینامیکی سازه تحت اثر بارگذاری قطار با سرعت های متفاوت .....	۴۸
۱-۳-۶-۳- ۱- بیشینه های خیز سازه در اثر بارگذاری قطار .....	۵۴
۲-۳-۶-۳- ۲- ضریب شدت رفتار دینامیکی در اثر عبور قطار .....	۵۵
۳-۷- رفتار سازه تحت اثر بارگذاری کامیون سه محوره استاندارد .....	۵۶
۱-۷-۳- ۱- پاسخ استاتیکی سازه تحت بار گذاری کامیون سه محوره استاندارد .....	۵۷
۲-۷-۳- ۲- نمودار کلی بیشینه های خیز سازه پل قوسی در اثر عبور کامیون سه محوره استاندارد .....	۶۷
۳-۷-۳- ۳- نمودار کلی ضریب بزرگنمایی دینامیکی سازه پل قوسی در اثر عبور کامیون سه محوره استاندارد .....	۶۷
۴-۷-۳- ۴- پیچش متوسط سازه پل قوسی در اثر عبور کامیون سه محوره استاندارد .....	۶۸
<b>فصل چهارم : بررسی و تحلیل نتایج بدست آمده .....</b>	<b>۶۹</b>
۱-۴- بررسی نتایج بدست آمده حرکت قطار بر روی سازه پل قوسی .....	۶۹
۲-۴- بررسی نتایج بدست آمده حرکت کامیون از روی سازه پل قوسی .....	۷۰
۳-۴- خلاصه نتایج .....	۷۰
۴-۴- پیشنهادهایی برای تحقیقات آینده .....	۷۰
<b>فهرست مراجع .....</b>	<b>۷۵</b>
<b>ضمامات .....</b>	<b>۷۹</b>
<b>- کد برای شبیه سازی عبور بار متحرک روی سازه پل قوسی .....</b>	

## عنوان

## صفحه

فهرست جداول .....	.....
جدول (۱-۱): تحقیقات انجام گرفته تاکنون در مورد بار متحرک .....	۱۰
جدول (۱-۲): مشخصات جنس مواد بکار رفته در سازه پل قوسی .....	۳۳
جدول (۲-۳): مشخصات مقاطع مختلف تیرهای سازه پل قوسی .....	۳۵
جدول (۴-۱): مقادیر مجاز خیز کلی میانه پل ها .....	۷۰
جدول (۴-۲): فرکانس های طبیعی سازه پل قوسی .....	۷۱
جدول (۴-۴): مقایسه ضرائب بزرگنمایی دینامیکی .....	۷۶

فهرست شکل ها .....	
شکل (۱-۲): مدل تقریبی حرکت وسیله نقلیه روی پل .....	۱۵
شکل (۲-۲): مدل تقریبی حرکت قطار روی پل .....	۱۶
شکل (۳-۲): تیر با تکیه گاه ساده تحت بار متحرک با سرعت و راستای ثابت .....	۲۲
شکل (۴-۲): نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی نقطه میانی تیربا توجه به مشخصه های سرعت و میرایی متفاوت سیستم .....	۲۳
شکل (۵-۲): تیر با تکیه گاه ساده تحت بار گستردۀ متحرک .....	۲۵
شکل (۶-۲): نسبت خیز دینامیکی به استاتیکی نقطه میانی تیربا توجه به مشخصه سرعت سیستم .....	۲۷
شکل (۱-۳): نمای پلان سازه پل قوسی .....	۲۹
شکل (۲-۳): ابعاد سازه فلزی پل قوسی - نمای پلان و جانبی .....	۳۰
شکل (۳-۳): ابعاد سازه فلزی پل قوسی - نمای جانبی .....	۳۱
شکل (۴-۳): محل های قرار گیری عرشه بر روی تیرهای عرضی بیرونی .....	۳۲
شکل (۵-۳): مکانهای قرار گیری عرشه بر روی تیرهای عرضی میانی .....	۳۲
شکل (۶-۳): مشخصات المان BEAM4 .....	۳۴
شکل (۷-۳): مشخصات المان سه بعدی پوسته ای .....	۳۶
شکل (۸-۳): ترتیب وارد نمودن بار بصورت رمپ در گامهای زمانی .....	۳۸
شکل (۹-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۱۰ (m/s) .....	۳۹
شکل (۱۰-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۲۰ (m/s) .....	۴۰
شکل (۱۱-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۳۰ (m/s) .....	۴۰
شکل (۱۲-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۴۰ (m/s) .....	۴۱
شکل (۱۳-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۵۰ (m/s) .....	۴۱
شکل (۱۴-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۶۰ (m/s) .....	۴۱
شکل (۱۵-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۷۰ (m/s) .....	۴۲
شکل (۱۶-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۸۰ (m/s) .....	۴۲
شکل (۱۷-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۹۰ (m/s) .....	۴۳
شکل (۱۸-۳): مقایسه خیز نقطه میانی تیر در سرعت ۱۰۰ (m/s) .....	۴۳
شکل (۱۹-۳): نمای پلان سازه فلزی شبیه سازی شده .....	۴۴
شکل (۲۰-۳) نمای ایزو متریک سازه فلزی شبیه سازی شده .....	۴۵
شکل (۲۱-۳): ابعاد و میزان بار گذاری قطار SKS300 .....	۴۶
شکل (۲۲-۳): خیز استاتیکی سازه تحت بار گذاری قطار SKS300 بر روی پل قوسی .....	۴۷
شکل (۲۳-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۱۰ (m/s) .....	۴۸
شکل (۲۴-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۲۰ (m/s) .....	۴۸
شکل (۲۵-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۳۰ (m/s) .....	۴۹
شکل (۲۶-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۴۰ (m/s) .....	۴۹

شکل (۲۷-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۵۰ (m/s) .....	۵۰
شکل (۲۸-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۶۰ (m/s) .....	۵۰
شکل (۲۹-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۷۰ (m/s) .....	۵۱
شکل (۳۰-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۸۰ (m/s) .....	۵۱
شکل (۳۱-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۹۰ (m/s) .....	۵۲
شکل (۳۲-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۱۰۰ (m/s) .....	۵۲
شکل (۳۳-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۱۵۰ (m/s) .....	۵۳
شکل (۳۴-۳): خیز نقطه میانی سازه و دو همسایگی آن هنگام عبور قطار با سرعت ۲۰۰ (m/s) .....	۵۳
شکل (۳۵-۳): تغییرات ماکریم خیز سازه پل قوسی هنگام عبور قطار SKS300 در سرعت های متفاوت .....	۵۴
شکل (۳۶-۳): ضریب شدت رفتار دینامیکی هنگام عبور قطار ۳۰۰ SKS300 .....	۵۵
شکل (۳۷-۳): کامیون سه محوره استاندارد در نظر گرفته شده .....	۵۶
شکل (۳۸-۳): خیز استاتیکی در اثر بارگذاری کامیون سه محوره استاندارد در میانه سازه .....	۵۷
شکل (۳۹-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۵ (m/s) .....	۵۸
شکل (۴۰-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۱۵ (m/s) .....	۵۸
شکل (۴۱-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۲۰ (m/s) .....	۵۹
شکل (۴۲-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۲۵ (m/s) .....	۵۹
شکل (۴۳-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۳۰ (m/s) .....	۶۰
شکل (۴۴-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۳۵ (m/s) .....	۶۰
شکل (۴۵-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۴۵ (m/s) .....	۶۱
شکل (۴۶-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۵۵ (m/s) .....	۶۱
شکل (۴۷-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۶۰ (m/s) .....	۶۲
شکل (۴۸-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۶۵ (m/s) .....	۶۲
شکل (۴۹-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۷۰ (m/s) .....	۶۳
شکل (۵۰-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۷۵ (m/s) .....	۶۳
شکل (۵۱-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۸۰ (m/s) .....	۶۴
شکل (۵۲-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۸۵ (m/s) .....	۶۴
شکل (۵۳-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۹۰ (m/s) .....	۶۵
شکل (۵۴-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۹۵ (m/s) .....	۶۵
شکل (۵۵-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۱۰۵ (m/s) .....	۶۶
شکل (۵۶-۳): خیز سازه پل قوسی هنگام عبور کامیون سه محور استاندارد با سرعت ۱۰۵ (m/s) .....	۶۶
شکل (۵۷-۳): بیشینه خیز سازه هنگام عبور کامیون سه محوره در سرعت های متفاوت .....	۶۷
شکل (۵۸-۳): ضریب شدت رفتار دینامیکی سازه هنگام عبور کامیون سه محوره در سرعت های متفاوت .....	۶۷
شکل (۵۹-۳): نسبت پیچش دینامیکی به استاتیکی سازه تحت بارگذاری کامیون سه محوره متحرک .....	۶۸
شکل (۱-۴): ضریب بزرگنمایی دینامیکی نقطه میانی و دو همسایگی آن واقع در یال طولی تحتانی سازه پل قوسی .....	۷۰

- شکل(۴-۲): بیشینه های ضریب بزرگنمائی دینامیکی سازه هنگام عبور کامیون سه محوره استاندارد ..... ۷۲
- شکل(۴-۳): ضریب بزرگنمایی دینامیکی نقطه میانه و دو همسایگی یال طولی تحتانی سازه هنگام عبور کامیون استاندارد ..... ۷۴
- شکل(۴-۴): نمودار ضریب بزرگنمایی دینامیکی تیرهای عرضی بیرونی سازه هنگام عبور کامیون استاندارد سه محوره ..... ۷۵

## چکیده پایان نامه

در این پایان نامه به بررسی رفتار دینامیکی تیرها و سپس سازه پل قوسی ارومیه تحت تاثیر بار متحرک می پردازیم. بدلیل کوپله بودن اثر بار متحرک شبیه سازی شده بر روی سازه پل قوسی دریاچه ارومیه (اثر همزمان ارتعاشات عرضی و پیچشی) برنامه ای برای این نوع بار گذاری متحرک بر روی سازه نوشته و با استفاده از روش‌های عددی برای حل معادلات تحلیلی موجود بار متحرک بر روی تیر، به درستی آزمایی الگوریتم نوشته شده می پردازیم.

با استفاده از برنامه یاد شده و به کمک روش المان محدود، بار متحرک بر روی سازه پل قوسی شبیه سازی شده است. برای شبیه سازی بار گذاری کامیون سه محوره و نیز قطار استاندارد مدل‌هایی از بار متحرک گستردۀ در نظر گرفته شده و اثر سرعت انواع بار متحرک با توجه به ضریب بزرگنمایی دینامیکی<sup>۱</sup> (نسبت ماکریم جابجایی دینامیکی در آنالیز گذرا به جابجایی تحت بار گذاری استاتیکی) در وسط سازه بدقت مورد تحقیق قرار گرفته است. پیچش متوسط سازه نیز تحت اثر بار متحرک در یک سمت سازه بدست آمده و اثر سرعت بر جابجایی های پیشینه آن بررسی شده است. مقادیر خیز و پیچش بدست آمده در اثر بارگذاری قطار و کامیون بدقت مورد بررسی قرار گرفته و با ضریب در نظر گرفته شده در طراحی سازه پل قوسی مقایسه شده است. در پایان نتایج بدست آمده نشان می دهد که ضریب تاثیر<sup>۲</sup> بیان شده در کد طراحی این نوع سازه در سرعت های متداول قطارها (سرعت های حدود ۷۰۰ کیلومتر بر ساعت) مناسب اما این مقدار برای حرکت خودرو ها (تا سرعت های حدود ۳۰۰ کیلومتر بر ساعت) با توجه به اینکه اثر مدهای ارتعاشات پیچشی در بار گذاری نامتقارن (حرکت کامیون استاندارد در یک طرف سازه) شدید تر می باشد، دارای حاشیه اطمینان خوبی نمی باشد.

کلید واژه ها: بار متحرک ، ارتعاشات عرضی ، ارتعاشات پیچشی ، پل قوسی

<sup>1</sup>Dynamic Magnification Factor

<sup>2</sup>Impact Factor

# فصل اول

## مقدمه و تحقیقات انجام شده

از آنجاییکه بسیاری از سازه های مهندسی تحت تاثیر بار های متغیر با زمان و مکان قرار دارند، تحلیل رفتار دینامیکی سازه ها از قبیل تیرها، پلها و ورقها تحت اثر حرکت بار بر روی آنها یکی از مباحث جالب و کاربردی در مهندسی مکانیک می باشد که محققین و مهندسین زیادی را به خود مشغول ساخته است. تحلیل دینامیکی تیرهای تحت اثر بار متحرک از زمانی بیشتر مورد توجه قرار گرفت که سرعت و وزن وسایط نقلیه بطور قابل ملاحظه ای افزایش یافت. تا قبل از آن زمان تحلیل دینامیکی سازه ها تحت اثر بار متحرک چندان مورد توجه نبود و در تحلیل و طراحی سازه های مربوط به حمل و نقل بیشتر از روابط استاتیکی استفاده می شد. به زبان دیگر چون سرعت خودروها چندان زیاد نبود تنشهای دینامیکی قابل ملاحظه ای در این سازه ها ایجاد نمی گردید. اما در سالهای اخیر سرعت خودروها و قطارها در بخشهای مختلف صنعت حمل و نقل بسیار افزایش یافته و در مقابل آن به خاطر ملاحظات اقتصادی، سازه هایی که این خودروها باید بر روی آنها حرکت کنند بسیار سبکتر و با تمهدات بیشتری ساخته میشوند.

این امر سبب شده که سازه های حمل کننده این خودروها و قطارها تحت تاثیر ارتعاشات و تنشهای دینامیکی بیشتری نسبت به گذشته قرار گیرند که این خود لزوم تحلیل دینامیکی این سازه ها را بیشتر آشکار می سازد. دلیل توجه محققین به انواع مسائل بار متحرک را میتوان طیف وسیع کاربرد نتایج این گونه تحقیقات دانست که در ادامه به برخی از آنها اشاره میشود. مهمترین عوامل در انتخاب راه حل مناسب برای تحلیل دینامیکی تیرهای تحت اثر بار متحرک، طول تیر و ممان اینرسی مقطع میباشند که می تواند تاثیرزیادی در پاسخ سازه با توجه به روش حل در نظر گرفته شده داشته باشد.

مشخصات هندسی ، مکانیکی تیر مورد تحلیل ، نوع تکیه گاه های آن و همچنین خصوصیات بار متحرک نیز عوامل دیگری هستند که باعث می شوند تحلیل دینامیک سازه تحت اثر بار متحرک به زیر گروههای مختلفی تقسیم گردد.

ثوری حاکم بر رفتار دینامیکی تیر نیز عاملی است که باعث میشود تحلیل دینامیکی تیر به کلاس‌های مختلفی تقسیم شود که از جمله این ثوری‌ها میتوان به ثوری‌های ذیل اشاره نمود:

- ثوری تیر اولر-برنولی<sup>۱</sup>

- تیر رایلی<sup>۲</sup>

- تیر برشی

- تیر تیموشنکو<sup>۳</sup>

همچنین رفتار ماده تیر (از لحاظ رابطه بین تانسور تنش و کرنش)، خصوصیات هندسی تیر و ماهیت تغییر شکل در نظر گرفته شده برای تیر (تغییر شکل کوچک یا بزرگ) نیز عواملی هستند که در تعیین روش تحلیل نقش مهمی دارند.

بار متحرک می‌تواند خصوصیات گوناگونی داشته باشد که به برخی از آنها اشاره خواهیم کرد. مقدار و سرعت بار متحرک می‌تواند ثابت و یا متغیر با زمان در نظر گرفته شود. از طرف دیگر بار میتواند بصورت گستردہ یا متمرکز و یا بصورت چند بار متمرکز متوالی در نظر گرفته شود. از یک دیدگاه دیگر مسائل مربوط به بار متحرک را می‌توان به سه گروه تقسیم کرد. گروه اول شامل مسائلی است که در آنها اینرسی بار در مقابل اینرسی تیر ناچیز فرض می‌شود. گروه دوم مسائلی هستند که در آنها اینرسی تیر را در مقابل اینرسی بار ناچیز در نظر میگیرند و گروه سوم مسائلی هستند که هم اینرسی تیر و هم اینرسی بار قابل ملاحظه بوده و اثر هر دوی آنها در محاسبات منظور می‌شود که در این حالت تحلیل مساله پیچیده‌تر می‌باشد.

در مسائل بار متحرک عمدتاً با یک سیستم دینامیکی مرکب که در کلی ترین حالت شامل زیر سیستمهای زیر میباشد مواجه هستیم:  
الف) سیستم دینامیکی متحرک که میتواند بصورت بار نقطه‌ای یا گستردہ متحرک، جرم نقطه‌ای یا گستردہ متحرک، سیستم چند درجه آزادی متحرک و در نهایت سیستم پیوسته (مانند تیر) متحرک شبیه سازی گردد.

ب) سازه تحت اثر بار متحرک که میتواند با توجه به نوع ماده و خصوصیات هندسی سیستم پیوسته موجود توسط یکی از ثوری‌های ذکر شده برای رفتار تیر شبیه سازی گردد.

ج) شرایط تکیه گاهی که با توجه به نوع تکیه گاهها، رفتار دینامیکی سازه، میتواند متفاوت باشد.

<sup>1</sup> Euler-Bernoulli

<sup>2</sup> Rayleigh

<sup>3</sup> Timoshenko

د) نوع بار گذاری نیز تعیین کننده می باشد بطوری که تاثیرات بار گذاری های خارج مرکز، ترکیب‌های بار گذاری خلاف جهت و یا هم جهت با اختلاف سرعت و مکان ، پدیده ای قابل ملاحظه در بررسی رفتار دینامیکی می باشد.

به عنوان یک اصل اساسی در مدلسازی باید به این نکته توجه داشت که پیچیدگی هریک از اجزای تشکیل دهنده مدل به نیاز مهندسی و هدفی که مدلسازی و تحلیل بر آن استوار است باز میگردد.

به عنوان مثال در تحلیل رفتار سازه یک پل تحت اثر بار متحرک اعم از نقطه ای و یا گستره، وارد کردن سخت کننده های معمول در طراحی سازه ، اثر چندانی در رفتار کلی سازه نخواهد داشت و با تقریب خوبی بدون وارد کردن معادلات غیر خطی مرتبط با این سخت کننده ها در ممان اینرسی سطح مقطع سازه ، می توان پاسخ درستی از سیستم بدست آورد.

راحتی سفر<sup>۱</sup> و ارتعاشات واردہ به مسافر در یک خودرو سواری نیز مثالی دیگر در این زمینه می باشد که در آن مدلسازی جاده با یک محیط پیوسته سه بعدی با معادلات حاکم بسیار پیچیده کاری نا معقول و بی تاثیر در خروجیهای تحلیل خواهد بود. به عبارت دیگر آنچه که در این گونه مدلسازی ها حائز اهمیت است مدلسازی دقیق سیستم تعلیق و تایر و ناهمواریهای سطح جاده است و چه بسا اثر صلب در نظر گرفتن محیط زیر خودرو بر روی راحتی سفر اثری بسیار ناچیز و قابل صرف نظر داشته باشد. بر عکس این قضیه نیز صادق است. عبارت دیگر در تحلیل ارتعاشات سازه پل قوسی ، مدلسازی وسیله نقلیه متحرک بر روی سازه با یک سیستم ارتعاشی خیلی پیچیده تنها هزینه و زمان محاسبات را افزایش خواهد داد و چه بسا اثر وسیله نقلیه متحرک بر روی بستر را با تقریب بسیار خوبی تنها ناشی از وزن سازه عبوری دانست. در نتیجه پیچیدگی مدلسازی هر یک از اجزای چهارگانه ذکر شده به هدف از مدلسازی باز میگردد. در این پایان نامه نیز با توجه به اهداف مختلف در هر فصل، مدلسازی منطبق بر نیاز و هدف مورد نظر انجام می پذیرد که در فصل آتی به تفصیل مورد بحث واقع خواهد شد.

در فصل بعدی کاربردها، روش‌های تحلیل و تحقیقات منتشر شده در زمینه ارتعاشات تیرها تحت اثر بار متحرک منعکس شده و در ادامه به بررسی نحوه شبیه سازی بار متحرک و در پی آن تحلیل نتایج بدست آمده پرداخته خواهد شد.

---

<sup>1</sup> Ride Comfort

## تحقیقات انجام شده در مورد ارتعاشات تیرها تحت اثر بار متحرک

از نظر تاریخی تحلیل حرکت بارها بر روی تیرهای معین از اواسط قرن نوزدهم آغاز گردید. برخی از کاربردهای تحلیل دینامیکی تیرها تحت اثر بار متحرک را میتوان بصورت زیر دسته بندی کرد:

الف) تحلیل ارتعاشات و تنشهای دینامیکی ایجاد شده در پلها در اثر عبور قطار و یا خودروهای عبوری

ب) تحلیل خستگی و تخمین عمر سازه و اتصالات پلها

ج) تحلیل نویز منتشر شده در محیط در اثر عبور وسایط نقلیه از روی پلها

د) تحلیل راحتی سفر قطارهای تندرو در هنگام عبور از روی پلها

ه) تحلیل پایداری و ایمنی سفر قطارهای تندرو در هنگام عبور از روی پلها

و) تحلیل ارتعاشات و تنشهای دینامیکی در قطعات تحت ماشینکاری

ز) تحلیل ارتعاشات و تنشهای دینامیکی در جرثقیلهای سقفی<sup>۱</sup>

ح) تحلیل ارتعاشات و تنشهای دینامیکی در سکوی پرتاپ<sup>۲</sup> موشک و هواپیماهای بدون سرنشین

ط) تحلیل ارتعاشات و تنشهای دینامیکی در عرشه<sup>۳</sup> ناوهای هواپیما بر

اولین کارها در این زمینه توسط اشخاصی چون جورج استوکس<sup>۴</sup> و روبرت ویلیس<sup>۵</sup> در سال ۱۸۴۹ انجام شد [۱-۲]. تیموشنکو [۳]

در سال ۱۹۱۷ برای اولین بار پاسخ تحلیلی یک تیر دوسر مفصل تحت اثر یک بار متحرک را با استفاده از روش جمع مود محاسبه

نمود. پس از وی نیز با توجه به کاربردهای متعدد و متنوع، این گونه تحلیلهای دینامیکی همواره از موضوعات مورد علاقه مهندسین

و محققین بوده است. در مرجع [۴] رفتار دینامیکی تیر پیوسته تیموشنکو (تیر ضخیم) تحت اثر بار متحرک بررسی شده که در آن با

استفاده از اثرات اینرسی دورانی و برشهای عرضی، تیر با تکیه گاه ساده تحت اثر تک بار متحرک توسط مکرتبش<sup>۶</sup> در ۱۹۹۰

بررسی گردیده است.

<sup>1</sup> Gantry Cranes

<sup>4</sup> George Stokes

<sup>2</sup> Launcher

<sup>5</sup> Robert Willis

<sup>3</sup> Deck

<sup>6</sup> Mackertich

اولسان<sup>۱</sup> [۵] در سال ۱۹۹۱ اقدام به بررسی تیر تحت بار متحرک ثابت با سرعت ثابت نمود و برای اینکار از روش تحلیل و المان محدود جواب‌ها را بدست آورد. ژو<sup>۲</sup> در سال ۱۹۹۶ [۶] رفتار دینامیکی بار متحرک بر روی تیر نشسته روی بستر الاستیک را از روش المان محدود مطالعه و اثرات سختی فندانسیون و سرعت متحرک و طول بیم را با توجه به ضریب بزرگنمایی دینامیکی (که عبارت است از نسبت ماکریم جابجایی نقطه میانی سازه هنگام عبور متحرک به جابجایی استاتیکی نقطه میانی سازه) مطالعه نمود. وانگ<sup>۳</sup> در سال ۱۹۹۷ [۷] تیر تیموشنکو با چند دهانه تحت اثر بار متحرک مرکز توسط روش جمع مود‌ها بررسی و مقایسه‌ای میان تیر اولر برنولی و تیر تیموشنکو انجام داد. ژنگ<sup>۴</sup> در مرجع [۸] در سال ۱۹۹۸ رفتار دینامیکی تیر غیر یکنواخت چند دهنه‌ای را تحت اثر بار متحرک و با استفاده از روش همیلتون<sup>۵</sup> مطالعه نمود و نتایج حاصل را برای تیر یکنواخت و غیر یکنواخت برای سرعت‌های مختلف مورد قرارداد.

در سال ۱۹۹۸ [۹] وانگ و لین<sup>۶</sup> ارتعاشات تیر‌های چند دهنه<sup>۷</sup> تحت بار متحرک را با روش آنالیز مودال بررسی نمودند. تحلیل ارتعاشات تیرهای کامپوزیتی غیر متقارن تحت اثر اجرام متحرک در مرجع [۱۰] توسط کدیور و محب پور در سال ۱۹۹۸ مورد بررسی قرار گرفته است. این مرجع با استفاده از روش اجزاء محدود و برای آرایش‌های مختلف چیدمان لایه‌های کامپوزیتی به تحلیل مسئله پرداخته است و برای حالت خاص تیر غیر کامپوزیتی همگن و ایزوتروپ صحت روش تحلیل خود را تحقیق نموده است.

در سال ۱۹۹۹ [۱۱] به تحلیل پایداری ارتعاشات یک تیر اولر-برنولی دوسر مفصل و تحت اثر بار فشاری محوری ثابت و بار عرضی متحرک پرداخته شده است. روش تحلیل در این مرجع روش گالرکین بوده و بر این اساس رابطه سرعت بحرانی عبور بار و فشار محوری مورد محاسبه قرار گرفته است.

در مرجع [۱۲] و در سال ۱۹۹۹ ژو و لا<sup>۸</sup> بار متحرک را روی پل با دهانه‌های پیوسته مدلسازی نمودند. این دو با در نظر گرفتن تئوری تیر تیموشنکو با استفاده از اصل جمع آثار مود‌ها و روشی برای بهینه سازی پاسخ سیستم روش جدیدی برای مطالعه اثر بار متحرک بر بستر پیوسته ارائه نمودند.

<sup>1</sup> Olsson

<sup>2</sup> Zhung

<sup>3</sup> Wang

<sup>4</sup> Zheng

<sup>5</sup> Hamilton's Principle

<sup>6</sup> Wang & Lin

<sup>7</sup> Multi-Span

<sup>8</sup> Zhu & Law

در کنار روش‌های عددی مانند روش تفاضل محدود و روش اجزاء محدود روش‌های تحلیلی نیز همواره مورد توجه محققین این زمینه بوده است. برای مثال زیده و هیلال<sup>۱</sup> در سال ۲۰۰۰ در مرجع [۱۳] به تحلیل ارتعاشات تیر اولر-برنولی با شرایط مرزی دلخواه تحت اثر بار متحرک پرداخته‌اند. روش مورد استفاده در این مرجع روش گالرکین بوده و مسأله برای حالات مختلف سرعت بار متحرک اعم از سرعت ثابت و شتاب ثابت مورد تحلیل واقع شده است.

در سال ۲۰۰۰، ارتعاشات یک تیر تیموشنکو با مفاصل داخلی و تحت اثر بار متحرک توسط شادنام و مفید در مرجع [۱۴] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مرجع با تقریب سیستم پیوسته تیر به مجموعه‌ای از میله‌های صلب و لولاهای متصل کننده روشی جدید در تحلیل معادلات تیر ارائه شده است و با مقایسه نتایج تحلیل با روش‌های دیگر موجود از جمله روش اجزاء محدود، دقت و صحت مدلسازی و تقریب آن مورد بررسی قرار گرفته است.

در مرجع [۱۵]، راثو<sup>۲</sup> در سال ۲۰۰۰ تکنیک جدیدی برای تحلیل معادلات ارتعاشات تیر دوسرولولا تحت اثر عبور جرم متحرک ارائه شده است. این مرجع با استفاده از این اصل که جرم عبوری همواره در عمل کوچکتر از جرم پل می‌باشد از نسبت این دو جرم به عنوان پارامتر اغتشاش<sup>(۴)</sup> استفاده کرده است و بر اساس تکنیک اغتشاش روش جدیدی را در مسائل بار متحرک بنیان نهاده است. اگرچه روش اغتشاش عمدتاً در حل مسائل غیرخطی کاربرد دارد ولی استفاده از این روش در حل مسائل خطی بار متحرک به نوعی ایده‌ای جدید محسوب می‌گردد که صحت این روش با مقایسه نتایج حاصل از تحلیل این روش و روش‌های کلاسیک دیگر در این مرجع تحقیق شده است.

ساوین<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۱ به محاسبه ضریب اثر دینامیکی<sup>۴</sup> اقدام و طیفی از پاسخ‌های تیرهای دارای میرایی سازه‌ای کم و با شرایط تکیه گاهی متفاوت تحت اثر بار متحرک را بدست آورد. در این مرجع [۱۶]، با استفاده از روش گالرکین به بررسی ارتعاشات تیر اولر-برنولی با شرایط مرزی مختلف تحت اثر عبور بارهای متوالی متحرک پرداخته شده است و اثر سرعت و فاصله بارهای متحرک تکرارشونده بر روی ارتعاشات پل در این مرجع مورد بررسی قرار گرفته است.

<sup>1</sup> Zideh & Hilal

<sup>4</sup> Dynamic amplification factor

<sup>2</sup> Rao

<sup>3</sup> Savin

در سال ۲۰۰۱ [۱۷] میشل<sup>۱</sup> به بررسی تیر تحت بار متحرک و سرعت های متغیر مادامیکه اثرات میرایی وجود داشته باشد پرداخت. بارگذاری درنظر گرفته شده توسط ایشان بر مبنای شتاب کند شونده و تند شونده وسیله نقلیه با دو محور و نتایج عددی بدست آورده جالب توجه است.

در سال ۲۰۰۳ [۱۸]، پسترو<sup>۲</sup> و یانگ<sup>۳</sup> با تحقیقی در مورد ماکزیمم پاسخ تیر با تکیه گاه ساده و گیر دار تحت بار متحرک با سرعت های مختلف، تاثیر استفاده از فرکانس های پایه تیر ساده (تیر اولر برنولی) را در سرعت های بحرانی (سرعت هایی که ماکزیمم خیز در آنها رخ میدهدن) بررسی و به نتایج قابل تاملی برای تخمین سرعت های بحرانی تیر در ارتعاشات عرضی دست یافتند. اندرکنش دینامیکی بین یک خودرو و پل با استفاده از روش گالرکین در سال ۲۰۰۳ توسط اسماعیل زاده و جلیلی در مرجع [۱۹] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مرجع تیر با تئوری اولر-برنولی دوسر مفصل و خودرو با یک سیستم شش درجه آزادی مدلسازی شده است. اثر سرعت بار متحرک بر روی پاسخ دینامیکی پل و ارتعاشات منتقل شده به مسافر در این مرجع مورد بررسی قرار گرفته است.

در سال ۲۰۰۳ توسط کوچاکارو، ایرشیک و لشر<sup>۴</sup> [۲۰] نوعی مدلسازی جدید برای شبیه سازی رفتار دینامیکی وسیله نقلیه بر روی خط ارائه شده است. در این مرجع قطار با یک تیر تیموشنکو متحرک مدلسازی شده است که بر روی خط که آن نیز با یک تیر تیموشنکو روی بستر الاستیک شبیه سازی شده با سرعت ثابت عبور می کند. تیر تیموشنکو متحرک از طریق یک سری المانهای فنر الاستیک به خط متصل شده اند که این المانها در حکم فرمهای سیستم تعليق می باشند. با استفاده از روش تحلیل گالرکین تأثیر سفتی تیر تیموشنکو متحرک و سفتی سیستم تعليق بر روی فشار مابین تیر تیموشنکو متحرک و ثابت (خط) مورد بررسی قرار گرفته است. کارگنوین و یونسیان در سال ۲۰۰۴ [۲۱] به بررسی پاسخ تیر تیموشنکو با مقطع ثابت و طول بی نهایت روی بستر ویسکو الاستیک تحت تاثیر بار متحرک هارمونیک پرداختند.

<sup>1</sup> Michaltsos

<sup>4</sup> Cojocaru & Irchik & Schlacher

<sup>2</sup> Pesterev

<sup>3</sup> Yang

یانگ، لین و یو<sup>۱</sup> در سال ۲۰۰۴ در مرجع [۲۲] به تحلیل ارتعاشات پل های با تکیه گاه الاستیک تحت اثر عبور بارهای متواالی و تکرارشونده با فاصله معین پرداخته اند. در این مراجع پل با ثوری تیر اولر- برنولی مدلسازی شده و از روش گالرکین برای حل معادلات حرکت استفاده شده است. برای تحلیل معادلات تنها از مود اول ارتعاشات تیر که در دو انتها بر روی تکیه گاههای الاستیک قرار دارد استفاده شده است و این مود نیز با رویهم گذاری یک شکل مود سینوسی و یک مود صلب ارتعاشات قائم تقریب زده شده است. در این دو مرجع تأثیر سرعت بارهای متواالی و فاصله آنها بر روی ارتعاشات پل مورد بررسی قرار گرفته است. کارگر نوین، یونسیان، تامسون و جونز<sup>۲</sup> [۲۳] در سال ۲۰۰۵ ارتعاشات غیر خطی تیر برروی بستر ویسکو الاستیک تحت اثر بار هارمونیک متحرک را مورد مطالعه قرار دادند.

یو و یانگ<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۵ در مرجع [۲۴] ارتعاشات پل های دوسرمهفسل تحت اثر عبور بارهای متواالی بررسی شده است. شتاب نقاط مختلف پل به عنوان شاخص ارتعاشات مورد مطالعه قرار گرفته است و اثر پارامترهای مختلف از جمله میرایی سازه ای پل، سرعت و فواصل بارهای متواالی بر میزان و مکان نقطه شتاب بیشینه در پل مورد بررسی قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۵ [۲۵] ، مین کیم<sup>۴</sup> با استفاده از تیر رایلی روی بستر ویسکو الاستیک به بررسی اثر بار متحرک ثابت و هارمونیک بر روی آن پرداخت. در همین سال [۲۶] ، گویاف و نایل<sup>۵</sup> از روشی نیمه تحلیلی با در نظر گرفتن سرعت های متفاوت برای بار گذاری متحرک به بررسی تیر تیموشنکو بر روی بستر ویسکو الاستیک پرداختند. ایشان دریافتند که در سرعت های کمتر از مقدار بحرانی تشدید رخ نمیدهد و تأثیر سرعت متحرک در تعیین خیز تیر کم است. در ادامه نشان دادند که برای سرعت های بالاتر از سرعت بحرانی فرکانس های تشدید وجود داشته و مقادیر خیز تیر نیز وابستگی بیشتری به سرعت بار متحرک دارند. در سال ۲۰۰۶ [۲۷] ، شان و آشو<sup>۶</sup> به بررسی آثار بار متحرک بر روی پلهای پیوسته پرداخته و با در نظر گرفتن تیر اولر برنولی سعی در تخمین پاسخ و چگونگی دقت آن با توجه تعداد دهانه های پل نمودند.

<sup>1</sup> Yang, Lin & Yau

<sup>2</sup> Thompson & Jones

<sup>3</sup> Yau & Yang

<sup>4</sup> MinKim

<sup>5</sup> Gulyaev & Nabil

<sup>6</sup> Chan & Ashebo

شبلى، عثمان و كلوتو<sup>۱</sup> در سال ۲۰۰۶ [۲۸] اقدام به بررسى سازه های پريوديك (مانند ريل روی بستر خاک) تحت اثر بار متحرک نمودند.

در سال ۲۰۰۶ تحقيق ديجري نيز در مرجع [۲۹] توسط گاريني<sup>۲</sup> برای بار متحرک هارمونيك روی پل ساده صورت پذيرفت. وي بار را بصورت متغير در طول زمان روی تير اوبل برنولي شبيه سازی شده اعمال و نتایج را تفسير نمود. وانگ، لين، هوو جو<sup>۳</sup> در سال ۲۰۰۶ [۳۰] شبيه سازی ساده از حرکت وسایط نقلیه دارای اينرسی با تمام مشخصات آن اعم از ميرايي ، تاثير چرخها و غيره انجام و از روش المان محدود اقدام به بررسى نتایج بدست آمده نمود. در سال ۲۰۰۶ و در مرجع [۳۱] كوكاتورك و شيمك<sup>۴</sup> با در نظر گرفتن بار متحرک هارمونيك بر روی تير تيموشنكو بصورت خارج مرکز ، رفتار ديناميكي سيستم را بررسى نمودند. ودول<sup>۵</sup> در ۲۰۰۷ [۳۲] تحقيقی در زمينه تاثير سرعت ها و مقادير مختلف بار متحرک روی تير اوبل برنولي با تکيه گاه های ساده انجام داده است. وي با استفاده از تبديلات فوريه روش تفاضل محدود نمودارهای بدست آمده را تفسير و ارتعاشات عرضي تغييرات بار را برای سرعت های مختلف توجيه نموده است. نيكخوا ، رفععي و شادنام در سال ۲۰۰۷ [۳۳] به بررسى رفتار ديناميكي تير اوبل برنولي تحت اثر جرم متحرک پرداخته اند. آنها با در نظر گرفتن مولفه شتاب اينرسی فقط در يك راستا به تحليل نتایج اقدام نمودند. يو و شان<sup>۶</sup> در سال ۲۰۰۷ [۳۴] در تحقيقی تحليلي ، تجربی ، پارامتر های تاثير گذار بر رفتار ديناميكي سازه پل تحت بار متحرک را بررسى نمودند. ايشان با بررسى کار های صورت پذيرفته روی بار متحرک روی پل و بررسى مدلهاي شبие سازی بار متحرک و همچنين سازه پل هنگام بررسى نتایج بدست آمده قبلی را درست آزمایي نمودند. احمديان، جعفری و اسماعيل زاده در سال ۲۰۰۸ [۳۵] در مقاله اي به بررسى رفتار ديناميكي تير كامپوزيتی روی بستر ويسکوالاستيک تحت بار متحرک نوسانی پرداختند. آنان با در نظر گرفتن متحرک نوسان کننده دارای دو درجه آزادی و حل معادلات ارتعاشات کوپله از راه گلرکين به بررسى سرعت های بحرانی از طريق حل عددی نتایج بدست آمده اقدام نمودند. در سال ۲۰۰۸ ، سيادي<sup>۷</sup> [۳۶] اقدام به بررسى نيروي متحرک بر روی تير تيموشنكو از ديدگاه جديدي نمود. وي حل تحليلي برای نيروي متحرک روی تير تيموشنكو با استفاده از بسط دو سري متفاوت بدست آورد.

<sup>1</sup> Chebli, Othman & Clouteau

<sup>2</sup> Garinei

<sup>3</sup> Wang, Lin, Hsueh & Ju

<sup>4</sup> Kocaturk & Simsek      <sup>7</sup> Sniady

<sup>5</sup> Awodola

<sup>6</sup> Yu & Chan

بطور خلاصه می توان کارهای انجام شده بر روی بار متحرک با توجه به پارامتر های متفاوت را در جدول ادامه مشاهده نمود:

General B.C.	Simply Support	Elastic Support
1969-Mead-Forced Vibration*	1977-Rao-Moving load*	1971-Steele-Timoshenko Euler Beam Mload
1993-Sallstrom-Damped Timoshenko MLoad	1979-Nagaya-Timoshenko Moving load	1977-Prasad-Infinite Laminated Beam Mload*
2000-Abuhilal- Moving load	1989-Mackertich-Timoshenko Moving load	1978-Chonan-Infinite Timoshenko MLoad
2000-AbuHilal-General BC Moving load	1994-Lam- Impulsive Load*	1983-Warsaw- Infinite Beam Mload
2002-Yavari-Timoshenko Moving Mass	1995-Esmailzadeh-SS Beam Moving Mass	1991-Zheng-Infinite Beam Mload
<b>Cantilever</b>		1995-Hardy-infinite Beam Harmonic Mload
1982-Chonan- Stability Sandwich *	1996-Lee-Timoshenko Accel Moving Mass	1996-Jaiswal-infinite Beam finite Found Mload
1982-Chonan- Stability Two Layer*	1997-Kadivar-Composite Beam Mload*	1996-Thambiratnam-SS Beam Mload
1994-Khally- Cantilever Moving Mass	1998-Kadivar-Composite Beam Mload*	1998-Lee-SS Beam MMass
1998-Siddiqui-Cantilever Moving Mass	1999-Chan-Beam Moving load	2001-Sun- Infinite Beam line MLoad
2004-Sokolinsky-Nonlinear Vibration Sand*	2000-Rao-Transient Beam Moving load	2001-Wu-Finite Beam Mload
<b>Fixed- Fixed</b>		2002-Sun-infinite Beam Harmonic line MLoad
1995-Lee-clamped Axial Force Moving Mass	2002-Greco-Damped Beam Moving load	2004-Kargarnovin-Timoshenko Mload
2008-Kiral-Fixed Composite Moving load*	2005-Jia Jang Wu-FEM Moving Mass	2004-Kim-Beam on Found Harmonic Mload
		2005-Kim-Beam Harmonic line MLoad
		2006-Mallik-Infinite Beam MLoad
<b>Curved Beam</b>		<b>Viscoelastic Support</b>
1984-Dey-Ortho Curved Bridge Moving load	1974-Dimitriev-Three Span Beam	2000-Metrikine-Beam on Moving load
1994-Chatterjee-Vib Arc Bridge Moving load	1986-Roufaeil-Timoshenko Moving load	2001-Chen-Infinite Timoshenko Beam MLoad
2000-Huang-Circular curved Beam Mload	1988-Cai-infinite Beam Moving load	2001-Metrikine-Timoshenko Beam Two MMasses
2000-Huang-Noncircular curved beam Mload	1993-Lee- Beam Moving load	2001-Sun-Infinite Beam Harmonic line Mload
2003-Chen-Arch Mload	1995-Lee-Beam Moving load	2002-Sun- Infinite Beam Mload
2003-Wu-circular curved Timoshenko Mload	1997-Henchi- Beam Mload	2003-Chen-Finite and infinite Moving load
<b>Wave Propagation</b>		2003-Koh-Infinite Beam MLoad
2004-Sorokin- Wave Sandwich*	1998-Wang- Frame Moving load	2005-Kargarnovin-Infinite Beam Nonlinear Found
2006-Yeh- Wave Sand Beam*	1998-Zheng- non uniform Beam Moving load	2005-Younesian-Infinite Beam Harmonic Mload
		2006-Muscolino-finite Beam Moving Load

جدول (۱-۱) : تحقیقات انجام گرفته تاکنون در مورد بار متحرک

طیف وسیع کاربرد این گونه تحلیلها باعث شده تا تحقیقات متعددی در این زمینه انجام شود و امروزه نیز توجه ویژه ای به آن میشود. یکی از نکات جالب و قابل ذکر در این زمینه آنستکه برای اولین بار در سال ۲۰۰۶ کنفرانسی از طرف انجمن مهندسین اروپا<sup>۱</sup> با عنوان "تحلیل دینامیکی سازه ها ای تحت اثر بار متحرک" در دانشگاه دلفت<sup>۲</sup> با حضور محققین بنام این زمینه برگزار شده است. جامع ترین مرجع موجود در این زمینه را میتوان کتاب [۳۷] پروفسور لادسیلاو فرایبا<sup>۳</sup> دانست. در این کتاب، تیرهای با طول معین برای صورتهای مختلف بار از قبیل: متمرکز، گسترده، نوسانی، اتفاقی، سیستم متحرک با دو درجه آزادی و نیز حالات مختلف سرعت از قبیل ثابت و متغیر با زمان مورد تحلیل دینامیکی واقع شده اند.

<sup>1</sup> Euromech

<sup>2</sup> Delft

<sup>3</sup> Ladislav Fryba

در این کتاب علاوه بر تیرها، ورقهای تحت بار متحرک نیز برای حالات ساده و خاص مورد تحلیل قرار گرفته اند. علاوه بر این وی در این کتاب به گرداوری مراجع موجود در زمینه تیرهای محدود تحت اثر بار متحرک تا سال ۱۹۹۹ نیز پرداخته است که شمار این مراجع به بیش از ۲۰۰ عدد میرسد.

اکنون با پایان مطالعه و بررسی تحقیقات انجام شده در زمینه ارتعاشات تحت اثر انواع بارهای متحرک در فصل بعد به شرح تفصیلی مساله و روش بدست آوردن جواب مدلهای مختلف بارمتحرک بر روی سازه پرداخته می شود.