دانشگاه یزد

دانشکده ریاضی

گروه ریاضی کاربردی

پایان‌نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی‌کاربردی-آنالیز عددی

روش‌های تکراری برای حل معادلات ماتریسی

استاد راهنما: دکترسید محمّد مهدی حسینی

استاد مشاور: دکتر قاسم برید لقمانی

پژوهش و نگارش: سمیرا شاهدی راد

دی ماه ۱۳۹۱


بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خداوند جان و خرد

کزین برتر اندیشه بر نگذرد

تقدیم به همه‌ی کسانی که مرا آموختند حتی به یک کلام یا یک نگاه

و

همه‌ی آن‌هایی که می‌خواهند بیش‌تر بدانند.

سپاس‌گزاری

با سپاس از سه وجود مقدس:

آنان که ناتوان شدند تا ما به توانایی برسیم...

موهایشان سپید شد تا ما رو سفید شویم...

و عاشقانه سوختند تا گرمابخش وجود ما و روشنگر راهمان باشند...

حمد و سپاس خدایی را که افتخار نگارش ذره‌ای از دریای بی‌منتهای دانشش را نصیب این بنده‌ی حقیر کرد.

اکنون که به لطف خداوند و همراهی همه‌ی کسانیکه همواره پشتیبان و راهنمایم بودند تا در این زمان، در این مرحله از زندگی‌ام قرار بگیرم، بر حسب وظیفه تشکر و قدردانی می‌نمایم

از آنان‌که نفس خیرشان و دعای روح پرورشان بدرقه‌ی راهم بوده‌است، مخصوصاً از همسر و خانواده‌ی عزیزم، به ویژه دو گوهر گرانبهای زندگیم، پدر و مادر عزیزم...این دو معلم بزرگوارم...که همواره بر کوتاهی و درشتی من قلم عفو کشیده و کریمانه از کنار غفلت‌هایم گذشته‌اند و در تمام عرصه‌های زندگی یار و یاوری بی‌چشم‌داشت برای من بوده‌اند و حضورشان آرامش و امید زیستنم بوده‌است،

از تمام کسانی که در راه کسب دانش راهنمایم بودند، مخصوصاً از استاد راهنمای بزرگوارم، جناب آقای دکتر سید محمد مهدی حسینی که در کمال سعه‌ی صدر از هیچ کمکی در این عرصه بر من دریغ ننمودند، از استاد مشاورم، جناب آقای دکتر قاسم برید لقمانی به خاطر راهنمایی‌های سودمندشان، از جناب آقای دکتر مالک، جناب آقای دکتر شاهزاده فاضلی و جناب آقای دکتر هوشمند که مرا در انجام بخشی از این پایان‌نامه یاری رساندند؛

پروردگارا، حسن عاقبت، سلامت و سعادت را برای آنان مقدر نما.

پروردگارا، به من کمک کن تا بتوانم ادای دین کنم و به خواسته‌های آنان جامه‌ی عمل بپوشانم.

پروردگارا، توفیق خدمتی سرشار از شور و نشاط و همراه و همسو با دانش و پژوهش جهت رشد و شکوفایی ایران سرافراز عنایت فرما.

چکیده

در این پایان‌نامه، روش‌های تکراری برای حل معادلات ماتریسی، مثل $Ax = b$، $AX = B$ و $AXB = C$ و یک جفت معادلات ماتریسی مانند $AYB = E$ و $CYD = F$ مورد بررسی قرار می‌گیرند. همچنین همگرایی روش‌های تکراری مورد استفاده نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند. کارآیی روش‌های پیشنهاد شده در این پایان‌نامه، به‌وسیله‌ی حل چند مثال به‌طور عددی بررسی می‌گردد.

فهرست مطالب

پیشگفتار

در سال ۲۰۰۵ پنگ [۱] و همکاران یک روش تکراری برای یافتن جواب متقارن از معادله ماتریسی $AXB = C$ ارائه داده‌اند [۱۹]. هانگ [۲] و همکاران نیز یک روش تکراری جدید برای حل معادلات ماتریسی خطی $AXB = C$ برای ماتریس پادمتقارن X ارائه کرده‌اند [۱۳]. در سال ۲۰۰۸ دهقان و حجاریان شرایط لازم و کافی برای قابل حل بودن معادلات ماتریسی

$$A_۱XB_۱ = D_۱, \quad A_۱X = C_۱, \quad XB_۲ = C_۲$$

و

$$A_۱X = C_۱, \quad XB_۲ = C_۲, \quad A_۳X = C_۳, \quad XB_۴ = C_۴$$

روی ماتریس بازتابی یا غیربازتابی X را پیشنهاد دادند و شکل کلی جواب را برای این نوع معادلات بدست آوردند [۸]. همچنین دهقان و حجاریان در سال ۲۰۰۸ یک روش تکراری را برای حل معادلات زوج ماتریس سیلوستر تعمیم‌یافته روی ماتریس‌های بازتابی تعریف کرده‌اند [۷]. پنگ نیز یک روش تکراری را برای حل مسئله‌ی مانده با کمترین نرم فروبینیوس $min||AXB - C||$ با ماتریس متقارن مجهول X ارائه داده است [۱۸]. علاوه براین لی [۳]و وو [۴] تعیین جواب‌های متقارن و پادمتقارن برای معادلات ماتریسی $A_۱X = C_۱$ و $XB_۳ = C_۳$ را مورد مطالعه قرار داده‌اند [۱۶]. همچنین

[۱] Peng

[۲] Huang

[۳] Li

[۴] Wu

وانگ [5]و همکاران یک روش تکراری را برای حل معادلات ماتریسی $AXB + CX^TD = E$ معرفی کرده‌اند [۲۱]. به‌علاوه ژو [6] [۲۲] و همکاران و چو [7] [۲] حل معادلات ماتریسی خطی $A_1X_1B_1 + A_2X_2B_2 = C$ با ماتریس‌های مجهول X_1 و X_2 (حقیقی یا مختلط) را مورد بررسی قرار داده‌اند. در مقاله‌ی [۱۴]، نحوه‌ی حل دستگاه $AX = B$ آمده است. همچنین دهقان وحجاریان یک روش تکراری برای حل جفت معادلات ماتریسی $AYB = E$ و $CYD = F$ روی ماتریس‌های متقارن مرکزی تعمیم‌یافته را معرفی کرده‌اند [۵].

در این پایان‌نامه، مقاله‌های [۵]، [۱۳]، [۱۴]، [۱۸] و [۱۹] مورد مطالعه و بررسی قرارگرفته‌اند. همچنین در بخش (۵.۲) یک روش تکراری پیشنهادی برای حل معادله ماتریسی $AXB = C$، وقتی‌که X_kها در تمام مراحل میانی متقارن باشند، ارائه شده است.

[5] Wang

[6] Xu

[7] Chu

فصل ۱

مقدمه‌ای بر حل دستگاه معادلات ماتریسی

۱.۱ مقدمه

در ابتدا برخی از تعاریف و نمادهای ماتریسی ارائه شده است، سپس دو روش ژاکوبی و گاوس سایدل، از مرجع [۱]، برای حل معادله‌ی $Ax = b$ به جهت یافتن بردار مجهول x بیان شده است. در پایان این فصل یک روش تکراری از مرجع [۱۴]، برای حل معادله ماتریسی $AX = B$، که به جای یافتن بردار مجهول x هدف آن یافتن ماتریس مجهول X است، با ذکر مثال ارائه شده است.

۲.۱ تعاریف اولیه

تعریف ۱.۲.۱. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های حقیقی $m \times n$ با $R^{m\times n}$ نمایش داده می‌شوند. همچنین $SR^{n\times n}$ معرف مجموعه‌ی ماتریس‌های متقارن حقیقی $n\times n$ و $SSR^{n\times n}$ نمایش مجموعه‌ی ماتریس‌های پادمتقارن حقیقی $n \times n$ می‌باشند.

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید $A \in R^{m\times n}$ و $B \in R^{p\times q}$ باشد. حاصل‌ضرب کرونکر ماتریس‌های A و B را با $A \otimes B$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \dots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

مثال ۳.۲.۱.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 0 & 10 \\ 6 & 7 & 12 & 14 \\ 0 & 15 & 0 & 20 \\ 18 & 21 & 24 & 28 \end{bmatrix}$$

تعریف ۴.۲.۱. در فضای $R^{n\times n}$ برای ماتریس‌های $A, B \in R^{n\times n}$، ضرب داخلی را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< A, B >= trace(B^T A) = \sum_{i=1}^{n} b_{ii}a_{ii}.$$

تعریف ۵.۲.۱. نرم ماتریس A که به‌وسیله‌ی ضرب داخلی فوق تولید می‌شود را نرم فروبینیوس نامیده و با $||A||$ نمایش می‌دهند و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A||_F = \left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

مثال ۶.۲.۱. برای ماتریس واحد I، نرم فروبینیوس برابر است با:

$$||I||_F = \sqrt{n}.$$

در این پایان‌نامه از نرم فروبینیوس استفاده شده است.

تعریف ۷.۲.۱. فرض کنید $A, B \in R^{m\times n}$ باشند، اگر $< A, B >= 0$ باشد؛ آنگاه A و B نسبت به یکدیگر متعامدند.

تعریف ۸.۲.۱. ماتریس $p \in R^{n\times n}$، ماتریس متعامد متقارن است اگر $p = p^T = p^{-1}$.
$SOR^{n\times n}$ معرف مجموعه ماتریس‌های متعامد متقارن حقیقی $n \times n$ می‌باشد .

تعریف ۹.۲.۱. ماتریس $A \in R^{n\times n}$ متقارن مرکزی تعمیم‌یافته (پادمتقارن مرکزی تعمیم‌یافته) نسبت به p است اگر $A = pAp(A = -pAp)$ باشد.

تعریف ۱۰.۲.۱. $CSR_p^{n\times n}(CSSR_p^{n\times n})$ مجموعه‌ی ماتریس‌های متقارن مرکزی تعمیم‌یافته (پادمتقارن مرکزی تعمیم‌یافته) از مرتبه‌ی n نسبت به $p \in SOR^{n\times n}$ تعریف می‌شود.

۳.۱ حل معادله خطی $Ax = b$

برای یافتن بردار مجهول x از روش‌های تکراری همچون ژاکوبی، گاوس سایدل، روش فوق تخفیف متوالی(SOR)، روش گرادیان مزدوج با و بدون پیش شرط و روش $GMRES$ می‌توان استفاده کرد [۱]. در این بخش به ارائه‌ی الگوریتم‌های دو روش ژاکوبی و گاوس سایدل می‌پردازیم.

۱.۳.۱ الگوریتم ژاکوبی

گام ۱: انتخاب کنید:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

گام ۲: برای $k = 1, 2, ...$ تا برقراری یک معیار توقف انجام دهید:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}], \quad i = 1, 2, ..., n.$$

۲.۳.۱ الگوریتم گاوس سایدل

گام ۱: یک تقریب اولیه‌ی $x^{(1)}$ انتخاب کنید:

$$x^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

گام ۲: برای $k = 1, 2, ...$ تا برقراری یک معیار توقف انجام دهید:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}], \quad i = 1, 2, ..., n.$$

۴.۱ حل معادله‌ی $AX = B$

مسئله‌ی معادله ماتریسی یکی از انواع تحقیقات فعال در ریاضیات محاسبه‌ای است و به‌طور وسیع در ناحیه‌های مختلف به‌کار بسته شده است که به‌عنوان مثال می‌توان به مواردی چون سیستم تعیین هویت، اصل تحلیل مؤلفه‌ها، مکانیک جامدات، نظریه‌ی کنترل خودکار و نظریه‌ی ارتعاش اشاره نمود [۱۴].

در این بخش ابتدا یک روش تکراری برای حل معادله‌ی ماتریسی $AX = B$ ارائه شده است.

۱.۴.۱ مسئله‌ی اول

$A, B \in R^{m\times n}$ داده شده‌اند؛ هدف یافتن جواب $X \in R^{n\times n}$ است به‌طوری‌که $AX = B$ باشد.

تعریف ۱.۴.۱. مسئله‌ی (۱.۴.۱) را سازگار گویند هرگاه

$$\exists X \in R^{n\times n}: \quad AX = B.$$

۲.۴.۱ یک روش تکراری برای حل مسئله‌ی ۱.۴.۱

الگوریتم (۲.۴.۱):

گام ۱: انتخاب کنید $X_\circ = R^{n\times n}$ و $B_\circ = B$.

گام ۲: فرض کنید

$$\alpha_k = \frac{||A^T B_k||_F^۲}{||AA^T B_k||_F^۲}, \quad (k = ۰, ۱, ۲, ...)$$

گام ۳: قرار دهید

$$\Delta X_k = \alpha_k A^T B_k, \quad (k = ۰, ۱, ۲, ...)$$

گام ۴: اگر $\Delta X_k = ۰$ توقف کنید؛ در غیر این‌صورت قرار دهید

$$X_{k+۱} = X_k + \Delta X_k, \quad (k = ۰, ۱, ۲, ...)$$

گام ۵: قرار دهید

$$B_{k+1} = B_k - A\Delta X_k = B_0 - AX_{k+1}, \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

و به گام ۲ بروید.

قضیه ۲.۴.۱. روش تکراری (۲.۴.۱) به جواب مسئله‌ی (۱.۴.۱) همگرا خواهد بود هنگامی‌که مسئله سازگار باشد [۱۴].

۳.۴.۱ مسئله‌ی دوم

فرض کنید مسئله‌ی (۱.۴.۱) سازگار است و S_E مجموعه‌ی جواب‌های آن است، یعنی،
$S_E = \{X \in R^{n\times n} : AX = B\}$. برای $X_0 \in R^{n\times n}$، هدف یافتن $\widehat{X} \in S_E$ است به‌طوری‌که:

$$||\widehat{X} - X_0||_F = min_{X\in S_E}||X - X_0||_F.$$

در حقیقت، مسئله‌ی (۳.۴.۱) یافتن جواب تقریب بهینه‌ی ماتریس مفروض X_0 در مجموعه جواب S_E است.

۴.۴.۱ حل مسئله‌ی ۳.۴.۱

هنگامی‌که مسئله‌ی (۱.۴.۱) قابل حل باشد، می‌توان نشان داد که S_E یک مجموعه‌ی محدب بسته است [۱۴]، بنابراین برای $X_0 \in R^{n\times n}$ داده شده، یک $\widehat{X} \in S_E$ یکتا می‌توان یافت به‌طوری‌که $||\widehat{X} - X_0||_F = min_{X\in S_E}||X - X_0||_F$ باشد. حال یک روش تکراری را برای یافتن $\widehat{X} \in S_E$ ارائه می‌دهیم.

اگر S_E تهی نباشد، برای هر $X \in S_E$،

$$AX = B \Longleftrightarrow A(X - X_0) = B - AX_0.$$

فرض کنید $X^* = X - X_0$ و $B^* = B - AX_0$، سپس حل مسئله‌ی (۳.۴.۱) معادل است با یافتن جواب معادله ماتریسی $AX^* = B^*$، که با استفاده از روش تکرار (۲.۴.۱) می‌تواند بدست آید و جواب مسئله‌ی (۳.۴.۱) به‌صورت $\widehat{X} = \widetilde{X}^* + X_0$ می‌تواند حاصل شود.

۵.۴.۱ مثال‌های عددی

مثال ۳.۴.۱. فرض کنید:

$$A = \begin{bmatrix}
8.2462 & 9.0000 & 9.6954 & 10.3441 & 10.9545 & 1.0000 & 3.7417 & 5.1962 & 6.3246 & 7.2801 & 8.1240 \\
8.9443 & 9.6437 & 10.2956 & 10.9087 & 3.3166 & 3.6056 & 5.0990 & 6.2450 & 7.2111 & 8.0623 & 8.1854 \\
9.5917 & 10.2470 & 10.8628 & 3.1623 & 3.4641 & 5.0000 & 6.1644 & 7.1414 & 8.0000 & 8.7750 & 8.8882 \\
10.1980 & 10.8167 & 3.0000 & 4.6904 & 4.8990 & 6.0828 & 7.0711 & 7.9373 & 8.7178 & 8.8318 & 9.5394 \\
10.7703 & 2.8284 & 4.5826 & 4.7958 & 6.0000 & 7.0000 & 7.8740 & 8.6603 & 9.3808 & 9.4868 & 10.1489 \\
2.6458 & 4.4721 & 5.7446 & 5.9161 & 6.9282 & 7.8102 & 8.6023 & 9.3274 & 9.4340 & 10.0995 & 10.7238 \\
4.3589 & 5.6569 & 5.8310 & 6.8557 & 7.7460 & 8.5440 & 9.2736 & 9.9499 & 10.0499 & 10.6771 & 2.4495 \\
5.5678 & 6.6332 & 6.7823 & 7.6811 & 8.4853 & 9.2195 & 9.8995 & 10.0000 & 10.6301 & 2.2361 & 4.2426 \\
6.5574 & 6.7082 & 7.6158 & 8.4261 & 9.1652 & 9.8489 & 10.4881 & 10.5830 & 2.0000 & 4.1231 & 5.4772 \\
7.4162 & 7.5498 & 8.3666 & 9.1104 & 9.7980 & 10.4403 & 10.5357 & 1.7321 & 4.0000 & 5.3852 & 6.4807 \\
7.4833 & 8.3066 & 9.0554 & 9.7468 & 10.3923 & 11.0000 & 1.4142 & 3.8730 & 5.2915 & 6.4031 & 7.3485
\end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix}
24.2749 & 16.6007 & 13.0937 & 10.9495 & 9.4657 & 8.3641 & 7.5074 & 6.8190 & 6.2520 & 5.7758 & 5.3696 \\
25.0500 & 16.9776 & 13.3422 & 11.1377 & 9.6198 & 8.4963 & 7.6244 & 6.9248 & 6.3490 & 5.8658 & 5.4537 \\
25.0005 & 16.7537 & 13.1197 & 10.9403 & 9.4484 & 8.3476 & 7.4948 & 6.8109 & 6.2483 & 5.7760 & 5.3732 \\
24.4939 & 16.3135 & 12.7872 & 10.6870 & 9.2515 & 8.1915 & 7.3688 & 6.7077 & 6.1627 & 5.7043 & 5.3126 \\
22.3987 & 15.0255 & 11.9102 & 10.0460 & 8.7596 & 7.8003 & 7.0493 & 6.4412 & 5.9365 & 5.5097 & 5.1430 \\
16.3909 & 12.5702 & 10.5136 & 9.1295 & 8.1068 & 7.3098 & 6.6665 & 6.1338 & 5.6841 & 5.2987 & 4.9641 \\
18.7937 & 13.8500 & 11.3677 & 9.7555 & 8.5908 & 7.6975 & 6.9849 & 6.4005 & 5.9109 & 5.4939 & 5.1340 \\
20.7537 & 14.9265 & 12.0945 & 10.2913 & 9.0065 & 8.0312 & 7.2597 & 6.6312 & 6.1077 & 5.6639 & 5.2824 \\
21.9848 & 15.5566 & 12.5012 & 10.5800 & 9.2229 & 8.1994 & 7.3940 & 6.7405 & 6.1981 & 5.7397 & 5.3465 \\
23.2510 & 16.2019 & 12.9107 & 10.8662 & 9.4348 & 8.3626 & 7.5232 & 6.8452 & 6.2844 & 5.8119 & 5.4078 \\
23.5860 & 16.3579 & 12.9906 & 10.9070 & 9.4534 & 8.3679 & 7.5203 & 6.8370 & 6.2728 & 5.7981 & 5.3925
\end{bmatrix}.$$

الف) فرض کنید ماتریس نخستین تکرار $X_0 = O$ باشد، هدف یافتن جواب مسئله‌ی (۱.۴.۱) است. با استفاده از روش تکراری (۲.۴.۱) و قرار دادن $\varepsilon = 1.0e-10$، بعد از ۱۹۶۱ مرتبه تکرار الگوریتم در زمان $t = 0.2652$، $||\Delta X|| < \varepsilon$ شده است پس جواب مسئله بدست آمده است.

ب) فرض کنید S_E مجموعه‌ی همه‌ی جواب‌های معادله ماتریسی $AX = B$ باشد و X_0 به‌صورت

زیر باشد. هدف یافتن جواب مسئله‌ی (۳.۴.۱) است.

$$X_\circ = \begin{bmatrix} ۱٫۳۷۰۱ & -۴٫۸۷۵۸ & ۲٫۱۲۳۰ & ۰٫۷۷۸۱ & ۳٫۶۴۱۷ & ۲٫۵۷۴۰ & ۲٫۴۱۹۴ & ۴٫۳۴۴۰ & ۰٫۳۱۸۵ & ۳٫۹۳۱۸ & -۳٫۰۱۱۰ \\ -۰٫۶۲۳۱ & -۱٫۶۴۹۰ & ۲٫۳۴۸۵ & ۱٫۰۳۴۹ & -۵٫۶۹۲۱ & -۴٫۲۳۳۱ & ۰٫۰۹۶۶ & -۱٫۶۵۰۲ & ۳٫۵۹۱۸ & ۳٫۸۸۸۳ & -۳٫۰۳۸۸ \\ -۲٫۷۳۸۱ & ۲٫۰۱۰۴ & -۱٫۱۹۷۴ & -۰٫۵۹۸۹ & ۱٫۷۹۴۹ & ۵٫۴۶۱۲ & -۲٫۵۵۱۸ & -۴٫۵۶۵۰ & ۲٫۷۹۹۹ & ۳٫۰۳۹۴ & -۳٫۰۳۲۲ \\ -۳٫۹۵۲۶ & ۳٫۶۷۱۲ & -۲٫۲۲۷۷ & -۱٫۰۱۱۳ & ۴٫۲۹۷۹ & -۵٫۳۶۶۱ & ۱٫۵۷۰۰ & ۲٫۰۸۶۵ & ۰٫۲۲۸۶ & ۱٫۲۵۱۳ & -۳٫۰۳۴۹ \\ -۴٫۱۹۶۸ & ۲٫۲۳۰۲ & ۰٫۶۰۱۱ & ۰٫۵۰۲۳ & -۴٫۹۴۷۱ & ۳٫۵۱۶۰ & ۱٫۱۵۹۳ & ۴٫۰۲۵۳ & -۳٫۴۷۶۲ & -۱٫۱۰۵۸ & -۳٫۰۱۸۱ \\ -۲٫۸۲۵۴ & -۳٫۳۴۵۲ & ۴٫۰۷۲۳ & ۱٫۶۸۳۱ & ۲٫۳۰۶۶ & -۱٫۷۲۶۷ & -۳٫۱۹۰۶ & -۲٫۹۸۱۳ & -۳٫۶۴۳۴ & -۳٫۴۳۹۰ & -۲٫۹۸۹۷ \\ -۰٫۵۴۱۳ & -۳٫۸۴۴۰ & -۳٫۵۴۲۱ & -۳٫۵۶۹۹ & -۰٫۸۵۸۵ & ۰٫۴۹۷۲ & ۴٫۶۶۶۷ & -۲٫۱۳۷۶ & ۱٫۸۸۲۱ & -۴٫۴۴۷۵ & -۲٫۹۹۷۷ \\ ۲٫۰۴۵۹ & ۰٫۳۴۵۲ & -۲٫۶۳۲۸ & ۵٫۰۲۸۶ & ۰٫۰۹۶۸ & ۰٫۰۹۰۲ & -۳٫۵۲۷۴ & ۳٫۰۶۷۷ & ۴٫۱۹۴۱ & -۳٫۸۶۹۱ & -۳٫۰۰۷۶ \\ ۳٫۸۲۹۷ & ۳٫۴۸۸۶ & ۵٫۰۴۳۵ & -۵٫۳۸۰۴ & ۰٫۳۶۰۹ & ۰٫۱۷۵۸ & -۱٫۰۴۱۴ & ۱٫۱۱۸۲ & ۱٫۶۱۶۹ & -۲٫۱۴۶۷ & -۳٫۰۰۹۹ \\ ۴٫۲۹۹۱ & ۳٫۲۸۸۳ & ۰٫۰۸۸۲ & ۴٫۳۵۰۸ & ۰٫۳۸۱۳ & ۰٫۱۲۷۴ & ۴٫۵۶۹۴ & -۳٫۵۸۰۴ & -۲٫۹۵۴۳ & ۰٫۳۰۹۵ & -۳٫۰۱۴۰ \\ ۳٫۳۷۴۷ & -۱٫۳۹۴۹ & -۴٫۶۵۹۹ & -۲٫۸۱۹۴ & -۱٫۳۵۲۱ & -۱٫۰۹۰۵ & -۴٫۱۷۷۶ & ۰٫۲۷۰۹ & -۴٫۶۱۲۱ & ۲٫۴۷۲۸ & -۳٫۰۱۲۱ \end{bmatrix}.$$

با قرار دادن $B^* = B - AX_\circ$ و حل معادله ماتریسی $AX^* = B^*$ و بدست آوردن X^*، بعد از ۵۴۱ مرتبه تکرار الگوریتم و $t = ۰٫۷۸۰$، مشاهده شده است که $||\Delta X^*|| < \varepsilon$ است. حال با جمع کردن آن با $X_\circ$، جواب مسئله‌ی (۳.۴.۱)، که جواب تقریب بهینه است، بدست می‌آید.

۵.۱ نتیجه‌گیری

در این بخش، یک روش تکراری برای حل معادله ماتریسی $AX = B$ ارائه شد. در پیاده‌سازی این روش توسط نرم‌افزار متلب [۱] با مشکل خاصی مواجه نمی‌شویم و مسئله‌ی مورد مطالعه نیز با سرعت بالایی توسط برنامه‌ی نوشته شده، حل می‌شود. این خاصیت برای زمانی که با مسائلی که دارای ماتریس‌هایی با ابعاد $m, n = ۱۱$ هستند، برقرار شده است و نتایج مطلوبی بدست آمده است. مثال عددی ارائه شده نشان می‌دهد که الگوریتم (۲.۴.۱) در حل این‌گونه مسائل از کارآیی خوبی برخوردار است.

[۱]Matlab