IMAM KHOMEINI
INTERNATIONAL UNIVERSITY

وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه بین‌المللی امام خمینی(ره)

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

رساله جهت دریافت درجه دکتری در رشته

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

برخی از ویژگی‌های مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل

استاد راهنما

دکتر شیرویه پیروی

اساتید مشاور

دکتر محمد اخوی‌زادگان

دکتر رضا نقی‌پور

پژوهشگر

مرتضی لطفی پارسا

۲۲ آذر ۱۳۹۱

تقدیم به:

روح پاک پدرم

و

مادرم

سپاس‌گزاری:

سپاس خداوندی را سزاست که با فضیلت دانش، انسان را بر جمیع آفریدگان خویش برتری داد.

مراتب تشکر خود را از استاد راهنمای عزیزم جناب آقای دکتر شیرویه پیروی ابراز می‌دارم که با راهنمایی‌های ارزشمند و دلسوزانه‌شان مرا در تألیف این رساله یاری فرمودند. از جناب آقای دکتر محمد اخوی‌زادگان و جناب آقای پروفسور رضا نقی‌پور که زحمت مشاوره این رساله را قبول نمودند، سپاس‌گزاری می‌نمایم. همچنین از اساتید گرامی جناب آقای پروفسور محمدتقی دیبایی، جناب آقای پروفسور سیامک یاسمی و جناب آقای دکتر ابراهیم وطن‌دوست که با صرف وقت و دقت فراوان، داوری این رساله را به انجام رساندند، کمال تشکر را دارم.

در پایان قدردانی ویژه خود را از خانواده عزیزم که در تمام مراحل زندگی یاور و پشتیبان من بوده‌اند، ابراز می‌کنم.

چکیده

در این رساله مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل مورد مطالعه قرار می‌گیرند. در این راستا، بعضی از نتایج موجود درباره مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی را به مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل تعمیم می‌دهیم. ابتدا صفر بودن، ناصفر بودن، متناهی‌مولد بودن، آرتینی بودن و ایدآل‌های اول چسبیده آخرین مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل را مطالعه می‌کنیم. در ادامه با به کار بردن تابعگون Hom، شرایطی را تعیین می‌کنیم که تحت آنها، مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل، متناهی‌مولد هستند. سرانجام با استفاده از مفهوم رشته‌های منظم و عمق، روابطی بین مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی و مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل و اعداد باس این مدول‌ها پیدا می‌کنیم.

کلمات کلیدی. ایدآل اول چسبیده، رشته منظم، صفر بودن، عدد باس، عمق، مدول آرتینی، مدول متناهی‌مولد، مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل، ناصفر بودن.

فهرست مطالب

۱ مقدمه ۱

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی ۶

۱.۲ مدول‌های کوهمولوژی موضعی ۶

۲.۲ مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل ۸

۳ آخرین مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل ۱۶

۱.۳ صفر بودن ۱۶

۲.۳ ناصفر بودن ۲۳

۳.۳ متناهی‌مولد بودن ۲۸

۴.۳ آرتینی بودن ۳۲

۵.۳ ایدآل‌های اول چسبیده ۴۰

۴ کران‌های پایین برای مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل ۴۴

۱.۴ تابعگون Hom ۴۴

۲.۴ رشته‌های منظم و عمق ۵۲

۳.۴ تابعگون Ext ۵۹

۴.۴ چند یکریختی ۶۹

۵.۴ اعداد باس ۷۳

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۷۸
واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۲
مراجع ۸۶
چکیده انگلیسی ۹۴

فصل ۱
مقدمه

در سراسر این رساله، R یک حلقه جابجایی و نوتری با عضو همانی ناصفر و M یک R–مدول است. همچنین I و J دو ایدآل از R و s و t دو عدد صحیح هستند.

در سال ۲۰۰۹، تاکاهاشی[۱]، یوشینو[۲] و یوشیزاوا[۳] [۶۲] تعمیمی از نظریه کوهمولوژی موضعی به صورت زیر ارائه کردند. زیرمجموعه (I,J)–تابدار M را با $\Gamma_{I,J}(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت $\Gamma_{I,J}(M)=\{x\in M : \exists\, t\in \mathbb{N}, I^tx\subseteq Jx\}$ تعریف می‌کنیم. به راحتی می‌توان دید که $\Gamma_{I,J}(M)$ یک زیرمدول M است و $\Gamma_{I,J}(-)$ یک تابعگون هموورد، جمعی، R–خطی و دقیق چپ روی رسته R–مدول‌ها و R–همریختی‌ها است. برای هر عدد صحیح i، i–امین تابعگون کوهمولوژی موضعی نسبت به ایدآل‌های (I,J) را با $H^i_{I,J}(-)$ نشان می‌دهیم و برابر i–امین تابعگون مشتق‌شده راست $\Gamma_{I,J}(-)$ تعریف می‌کنیم. همچنین $H^i_{I,J}(M)$ را i–امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایدآل‌های (I,J) می‌نامیم.

روشن است که اگر $J=0$، آنگاه $\Gamma_{I,J}(M)=\Gamma_I(M)$ و در نتیجه مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل، تعمیمی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی هستند. همچنین اگر $t\in\mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $I^t\subseteq\sqrt{J}$، آنگاه $\Gamma_{I,J}(M)=M$.

انگیزه اصلی معرفی این تعمیم به صورت زیر است. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی کامل و M یک R–مدول متناهی‌مولد با بعد n باشد. شنزل[۴] [۵۹] مفهوم مدول متعارف

[۱] R. Takahashi
[۲] Y. Yoshino
[۳] T. Yoshizawa
[۴] P. Schenzel

K_M را معرفی کرده است و نشان داده است که R–هomomorفیسم یک‌به‌یک $K_M \longrightarrow H_I^n(M)^\vee$ وجود دارد، که در آن $^\vee$ نشان‌دهنده دوگان ماتلیس است. می‌توان نشان داد که تصویر این تابع برابر $\Gamma_{\mathfrak{m},I}(K_M)$ است. از این مطلب حدس زده می‌شود که یک رابطه دوگانی بین تابعگون‌های $H_I^i(-)$ و $H_{\mathfrak{m},I}^i(-)$ وجود دارد. در این زمینه، تاکاهاشی، یوشینو و یوشیزاوا ثابت کردند (به [۶۲، Theorem ۵.۱۱] و [۶۲، Corollary ۵.۱۲] مراجعه کنید)

$$H_I^n(M)^\vee \cong \Gamma_{\mathfrak{m},I}(K_M) \quad \text{و} \quad H_{\mathfrak{m},I}^n(M)^\vee \cong \Gamma_I(K_M).$$

ویژگی‌های مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل، توسط برخی از ریاضی‌دانان مورد مطالعه قرار گرفته است؛ از جمله به [۱۴، ۱۶، ۶۳] مراجعه کنید.

این رساله شامل سه فصل است. در فصل اول، به بیان تعاریف و برخی از ویژگی‌های بنیادی مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی و مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل می‌پردازیم.

در فصل دوم به بررسی برخی از ویژگی‌های آخرین مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل مانند صفر بودن، ناصفر بودن، متناهی‌مولد بودن و آرتینی بودن می‌پردازیم. تمرکز اصلی ما در این فصل بر مطالعه $H_{I,J}^i(M)$ است، جایی که $i = \dim_R M$ و یا $i = \dim_R M/JM$. تاکاهاشی، یوشینو و یوشیزاوا [۶۲، Theorem ۴.۷(ii)] ثابت کرده‌اند که اگر M یک R–مدول متناهی‌مولد باشد و $\dim_R M/JM = d$، آنگاه برای هر $i > d + ۱$، $H_{I,J}^i(M) = ۰$. همچنین آنها با ارائه مثالی [۶۲، Remark ۴.۶(۲)] نشان داده‌اند که اگر حلقه R غیرموضعی باشد، آنگاه $H_{I,J}^{d+۱}(M)$ لزوماً برابر صفر نیست. با وجود این، در نتیجه ۱۷.۱.۳ نشان می‌دهیم $H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M) = ۰$.

فرض کنیم R یک حلقه موضعی باشد به طوری که $\dim R/I + J = ۰$، M یک R–مدول متناهی‌مولد ناصفر باشد و $\dim_R M/JM = d$. در [۶۲، Theorem ۴.۵] ثابت شده است که $H_{I,J}^d(M) \neq ۰$. در قضیه ۱۴.۳.۳ نشان می‌دهیم که اگر $d > ۰$، آنگاه $H_{I,J}^d(M)/JH_{I,J}^d(M)$ متناهی‌مولد نیست.

فرض کنیم R حلقه‌ای موضعی و M یک R–مدول متناهی‌مولد با بعد n باشد به طوری

که $d = \dim_R M/JM$. چو[۵] و وانگ[۶] [۱۶، Theorem ۲.۱] ثابت کرده‌اند $H^n_{I,J}(M)$ آرتینی است. در قضیه‌های ۲.۴.۳ و ۱۳.۴.۳ این مطلب را تعمیم می‌دهیم و نشان می‌دهیم تحت شرایط فوق، $H^n_{I,J}(M)$ و $H^d_{I,J}(M)/JH^d_{I,J}(M)$ به هر زیررسته ملکرسون[۷] ناصفر نسبت به ایدآل I تعلق دارند؛ از جمله، $H^n_{I,J}(M)$ و $H^d_{I,J}(M)/JH^d_{I,J}(M)$، I–هم‌متناهی و آرتینی هستند. همچنین در قضیه ۱۱.۴.۳ نشان می‌دهیم اگر M یک R–مدول متناهی‌مولد با بعد متناهی n باشد، آنگاه $H^n_{I,J}(M)/JH^n_{I,J}(M)$، I–هم‌متناهی و آرتینی است.

در بخش پایانی از فصل دوم، ایدآل‌های اول وابسته به مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل را بررسی می‌کنیم. فرض کنیم R حلقه‌ای موضعی و M یک R–مدول متناهی‌مولد با بعد n باشد. چو [۱۴، Theorem ۲.۱] ثابت کرده است

$$\mathsf{Att}_R H^n_{I,J}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathsf{Supp}_R M \cap \mathrm{V}(J) : \mathrm{cd}(I, R/\mathfrak{p}) = n\}.$$

با استفاده از این مطلب، در قضیه ۳.۵.۳ نشان می‌دهیم تحت شرایط فوق رابطه زیر برقرار است

$$\mathsf{Att}_R H^n_{I,J}(M) = \{\mathfrak{p} \in \mathsf{Ass}_R M : \mathrm{cd}(I, J, R/\mathfrak{p}) = n\}.$$

در فصل سوم ابتدا با به کار بردن تابعگون Hom، بعضی از شرایطی را که تحت آن‌ها مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل متناهی‌مولد هستند، مشخص می‌کنیم. بهمن‌پور و نقی‌پور [۷، Theorem ۲.۵] ثابت کرده‌اند که اگر M یک R–مدول متناهی‌مولد باشد و برای هر $i < t$، $H^i_{I,J}(M)$ مینیماکس باشد، آنگاه برای هر زیرمدول مینیماکس N از $H^t_{I,J}(M)$، $\mathsf{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H^t_{I,J}(M)/N)$ متناهی‌مولد است. در نتیجه ۵.۱.۴ این مطلب را به صورت زیر تعمیم می‌دهیم. تاکاهاشی، یوشینو و یوشیزاوا [۶۲، Definition ۳.۱] مجموعه $\tilde{\mathrm{W}}(I, J)$ را به صورت $\tilde{\mathrm{W}}(I, J) = \{\mathfrak{a} \trianglelefteq R : \exists\ t \in \mathbb{N}, I^t \subseteq \mathfrak{a} + J\}$ تعریف کرده‌اند. فرض کنیم $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I, J)$ و فرض کنیم M یک ZD–مدول باشد به طوری که برای هر زیرمدول L از M، $\mathsf{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, M/L)$ متناهی‌مولد است. اگر برای هر $i < t$، $H^i_{I,J}(M)$ مینیماکس باشد،

[۵] L. Chu
[۶] Q. Wang
[۷] L. Melkersson

آنگاه $\mathrm{Hom}_R(R/\mathfrak{a}, H^t_{I,J}(M)/N)$ متناهی‌مولد است، که در آن N زیرمدولی از $H^t_{I,J}(M)$ و $\mathrm{Ext}^1_R(R/\mathfrak{a}, N)$ متناهی‌مولد است.

آقاپورنهر و ملکرسون [۲] تعمیمی از رشته‌های منظم به صورت زیر ارائه کرده‌اند. فرض کنیم S یک زیررسته سر باشد. عضو a از R را S–منظم روی M گوییم هرگاه $(0 :_M a) \in S$. دنباله $a_1, \ldots, a_t$ از اعضای R را S–رشته منظم (به اختصار S–رشته) روی M می‌نامیم هرگاه برای هر $1 \leq i \leq t$، a_i، عضو S–منظم روی $M/(a_1, \ldots, a_{i-1})M$ باشد. فرض کنیم S یک زیررسته ملکرسون نسبت به ایدآل I و M یک R–مدول متناهی‌مولد باشد به طوری که $M/IM \notin S$. طول همه S–رشته‌های ماکزیمال روی M در I، یکسان و برابر $\inf\{i : \mathrm{Ext}^i_R(R/I, M) \notin S\}$ است. این طول یکسان را با $S-\mathrm{depth}_R(M)$ نشان می‌دهیم. در بخش دوم از فصل سوم، این مفاهیم و نتایج را به ZD–مدول‌ها تعمیم می‌دهیم.

در بخش سوم از فصل سوم، با استفاده از دنباله‌های طیفی به مطالعه مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل از پایین می‌پردازیم و در این راستا قضیه ۲۲.۳.۴ را به صورت زیر به دست می‌آوریم. فرض کنیم S رده همه R–مدول‌های N با شرط $\dim_R N \leq k$ باشد، که در آن k یک عدد صحیح است، و فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد باشد و یا یک ZD–مدول باشد به طوری که برای هر $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I, J)$، $M/\mathfrak{a}M \notin S$. در این صورت

$$\inf\{i : H^i_{I,J}(M) \notin S\} = \inf\{S - \mathrm{depth}_{\mathfrak{a}}(M) : \mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I, J)\}.$$

با استفاده از قضیه فوق، می‌توانیم در نتیجه ۳۳.۳.۴، مطلبی مشابه درباره مدولهای آرتینی به صورت زیر به دست آوریم. فرض کنیم $(R, \mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد، و فرض کنیم M یک R–مدول متناهی‌مولد باشد و یا یک R–مدول مینیماکس باشد به طوری که برای هر $\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I, J)$، $\mathrm{Supp}_R M/\mathfrak{a}M \not\subseteq \{\mathfrak{m}\}$. در این صورت

$$\inf\{i : \text{آرتینی نیست } H^i_{I,J}(M)\} = \inf\{f - \mathrm{depth}_{\mathfrak{a}}(M) : \mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I, J)\}.$$

در بخش چهارم از فصل سوم، چند یکریختی بین مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی و مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل به دست می‌آوریم. در [۶۲، Definition ۱.۵

[مجموعه $\mathrm{W}(I,J)$ به صورت $\mathrm{W}(I,J)=\{\mathfrak{p}\in \mathsf{Spec}(R): \exists\, t\in \mathbb{N}, I^t\subseteq \mathfrak{p}+J\}$ تعریف شده است. فرض کنیم برای هر $i<t$، $\mathsf{Supp}_R H^i_{I,J}(M)$ زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathsf{Max}(R)$ باشد. در این صورت ایدآل‌های ماکزیمال $\mathfrak{m}_1,\dots,\mathfrak{m}_s\in \mathrm{W}(I,J)$ موجودند به طوری که برای هر $i<t$، $H^i_{I,J}(M)\cong H^i_{\mathfrak{m}_1}(M)\oplus H^i_{\mathfrak{m}_2}(M)\oplus\cdots\oplus H^i_{\mathfrak{m}_s}(M)$؛ به نتیجه ۲.۴.۴ مراجعه کنید.

نهایتاً در بخش پایانی از فصل سوم، چند رابطه درباره اعداد باس مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل به دست می‌آوریم. فرض کنیم $(R,\mathfrak{m})$ یک حلقه موضعی باشد. دیبایی و یاسمی [۲۳] نامساوی‌های زیر ثابت کرده‌اند:

(i)

$$\mu^t(M)\leq \sum_{i=1}^{t}\mu^{t-i}(H^i_I(M)).$$

(ii)

$$\mu^s(H^t_I(M))\leq \sum_{i=0}^{t-1}\mu^{s+t+1-i}(H^i_I(M))+\mu^{s+t}(M)+\sum_{i=t+1}^{s+t-1}\mu^{s+t-1-i}(H^i_I(M)).$$

در نتیجه ۳.۵.۴، با اثباتی متفاوت نتیجه فوق را به مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل تعمیم می‌دهیم.

در این رساله، هر یک از تعاریف و گزاره‌های شناخته شده با ذکر مرجع آورده شده‌اند و بقیه که مرجعی برای آنها ذکر نشده است، اصیل محسوب می‌شوند. از این رساله، مقاله‌های [۴۰، ۵۳، ۵۴، ۵۷، ۵۶، ۵۵] استخراج شده‌اند.

فصل ۲
تعاریف و مفاهیم مقدماتی

در سراسر این فصل، R یک حلقه جابجایی و نوتری با عضو همانی ناصفر و M یک R–مدول است. همچنین I و J دو ایدآل از R هستند.

۱.۲ مدول‌های کوهمولوژی موضعی

در این بخش، تعریف‌های اساسی و برخی از نتایج شناخته شده درباره مدول‌های کوهمولوژی موضعی یادآوری می‌شود. مرجع اصلی مورد استفاده در این بخش، کتاب برادمن[۱] و شارپ[۲] [۱۲] می‌باشد.

زیرمجموعه I–تابدار M را با $\Gamma_I(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_I(M) = \{x \in M : \exists\, t \in \mathbb{N}, I^t x = \circ\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}} (\circ :_M I^t).$$

به راحتی می‌توان دید که $\Gamma_I(M)$ یک زیرمدول M است و $\Gamma_I(-)$ یک تابعگون همورد، جمعی، R–خطی و دقیق چپ روی رسته R–مدول‌ها است و آن را تابعگون I–تاب‌دار می‌نامیم.

برای هر $i \in \mathbb{N}$، i–امین تابعگون مشتق‌شده راست $\Gamma_I(-)$ را با $H_I^i(-)$ نشان می‌دهیم و آن را i–امین تابعگون کوهمولوژی موضعی نسبت به ایدآل I می‌نامیم. همچنین $H_I^i(M)$ را i–امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایدآل I می‌نامیم. به راحتی می‌توان دید که تابعگون‌های $H_I^\circ(-)$ و $\Gamma_I(-)$ به طور طبیعی هم‌ارز هستند.

[۱] M. P. Brodmann
[۲] R. Y. Sharp

گوییم M یک R–مدول I–تابدار است هرگاه $\Gamma_I(M) = M$، و I–بی‌تاب است هرگاه $\Gamma_I(M) = 0$.

همان طور که در [۱۲، Theorem ۱.۳.۸] ثابت شده است، تابعگون‌های کوهمولوژی موضعی را می‌توان به صورت حد مستقیم تابعگون‌های Ext تعریف کرد؛ به عبارت دقیق‌تر برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، یکریختی طبیعی زیر موجود است

$$H_I^i(M) \cong \varinjlim_{t\in\mathbb{N}} \mathsf{Ext}_R^i(R/I^t, M).$$

فرض کنیم $0 \longrightarrow M' \longrightarrow M \longrightarrow M'' \longrightarrow 0$ یک دنباله دقیق از R–مدول‌ها باشد. در این صورت دنباله دقیق طولانی زیر از مدول‌های کوهمولوژی موضعی موجود است

$$\cdots \longrightarrow H_I^{i-1}(M'') \longrightarrow H_I^i(M') \longrightarrow H_I^i(M) \longrightarrow H_I^i(M'') \longrightarrow H_I^{i+1}(M') \longrightarrow \cdots .$$

در ادامه، بعضی از ویژگی‌های اساسی مدول‌های کوهمولوژی موضعی که در آینده به کار می‌روند را مرور می‌کنیم. یادآوری می‌کنیم که یک عضو $a \in R$، M–منظم نامیده می‌شود هرگاه $(0 :_M a) = 0$.

لم ۱.۱.۱.۲ *[۱۲، Lemma ۲.۱.۱]*

(i) اگر I شامل یک عضو M–منظم باشد، آنگاه M یک مدول I–بی‌تاب است.

(ii) اگر M یک مدول متناهی‌مولد و I–بی‌تاب باشد، آنگاه I یک عضو M–منظم دارد.

قضیه ۲.۱.۲. *[۱۲، Corollary ۲.۱.۷]*

(i) اگر M یک مدول I–تاب‌دار باشد، آنگاه برای هر $i \in \mathbb{N}$، $H_I^i(M) = 0$.

(ii) برای هر $i \in \mathbb{N}$، $H_I^i(M) \cong H_I^i(M/\Gamma_I(M))$.

قضیه ۳.۱.۲ (دنباله مایر–ویتوریس[۳]). *[۱۲، ۳.۲.۳] دنباله دقیق طولانی زیر (که دنباله*

[۳] Mayer-Vietoris

مایر-ویتوریس M نسبت به ایدآل‌های I و J نامیده می‌شود) موجود است

$$
\begin{aligned}
\circ \quad &\longrightarrow \quad H^{\circ}_{I+J}(M) \longrightarrow H^{\circ}_{I}(M) \oplus H^{\circ}_{J}(M) \longrightarrow H^{\circ}_{I\cap J}(M) \longrightarrow \cdots \\
&\longrightarrow \quad H^{i}_{I+J}(M) \longrightarrow H^{i}_{I}(M) \oplus H^{i}_{J}(M) \longrightarrow H^{i}_{I\cap J}(M) \longrightarrow \cdots .
\end{aligned}
$$

قضیه ۴.۱.۲. *[۱۲، Theorem ۳.۴.۱۰] برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، تابعگون کوهمولوژی موضعی $H^i_I(-)$ با حد مستقیم جابجا می‌شود.*

قضیه ۵.۱.۲ (استقلال[۴]). *[۱۲، Theorem ۴.۲.۱] فرض کنیم $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی بین حلقه‌های جابجایی و نوتری باشد و $|_R : \mathfrak{C}(R') \longrightarrow \mathfrak{C}(R)$ تابعگون حاصل از تحدید ضرب اسکالر توسط f باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، تابعگون‌های $H^i_{IR'}(-)|_R$ و $H^i_I(-|_R)$ (از $\mathfrak{C}(R')$ به $\mathfrak{C}(R)$) به طور طبیعی هم‌ارزند.*

قضیه ۶.۱.۲ (تغییر پایه یکدست[۵]). *[۱۲، Theorem ۴.۳.۲] فرض کنیم $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی یکدست بین حلقه‌های جابجایی و نوتری باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، تابعگون‌های $H^i_I(-) \otimes_R R'$ و $H^i_{IR'}(- \otimes_R R')$ (از $\mathfrak{C}(R)$ به $\mathfrak{C}(R')$) به طور طبیعی هم‌ارزند.*

۲.۲ مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل

پس از ابداع نظریه کوهمولوژی موضعی توسط گروتندیک[۶]، تلاش‌های زیادی برای تعمیم این نظریه انجام گرفته است. در سال ۱۹۷۱، هرتزوگ[۷] [۳۵] مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته را به صورت زیر تعریف کرد. برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، i-امین تابعگون کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته نسبت به I را با $H^i_I(-,-)$ نشان می‌دهیم و برای هر دو R-مدول N و M، به صورت

$$H^i_I(N, M) = \varinjlim_{t \in \mathbb{N}} \mathrm{Ext}^i_R(N/I^tN, M)$$

[۴]Independence
[۵]Flat Base Change
[۶]A. Grothendieck
[۷]J. Herzog

تعریف می‌کنیم. روشن است که $H_I^i(R,M) \cong H_I^i(M)$، و از این‌رو مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی حالت خاصی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی تعمیم‌یافته هستند. این مدول‌ها توسط بسیاری از ریاضی‌دانان مورد مطالعه قرار گرفته‌اند، برای نمونه به [۱۳، ۱۵، ۱۸، ۲۷، ۲۸، ۳۱، ۴۶، ۴۷، ۶۱، ۶۴] مراجعه کنید.

در سال ۱۹۷۹، محمدحسن بیژن‌زاده [۸] تعمیم دیگری از نظریه کوهمولوژی موضعی را به صورت زیر ارائه کرد. مجموعه ناتهی Φ از ایدآل‌های R را یک دستگاه ایدآلی می‌نامیم هرگاه به ازای هر دو ایدآل $\mathfrak{a},\mathfrak{b} \in \Phi$، ایدآل $\mathfrak{c} \in \Phi$ موجود باشد به طوری که $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. فرض کنیم Φ یک دستگاه ایدآلی باشد. قرار می‌دهیم

$$\Gamma_\Phi(M) = \{x \in M : \exists\ \mathfrak{a} \in \Phi,\ \mathfrak{a}x = \circ\} = \bigcup_{\mathfrak{a}\in\Phi} (\circ :_M \mathfrak{a}).$$

به راحتی می‌توان دید که $\Gamma_\Phi(M)$ یک زیرمدول M است و $\Gamma_\Phi(-)$ یک تابعگون همورد، جمعی، R–خطی و دقیق چپ روی رسته R–مدول‌ها است. برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، i–امین تابعگون مشتق‌شده راست $\Gamma_\Phi(-)$ را با $H_\Phi^i(-)$ نشان می‌دهیم و آن را i–امین تابعگون کوهمولوژی موضعی عمومی نسبت به Φ می‌نامیم. همچنین $H_\Phi^i(M)$ را i–امین مدول کوهمولوژی موضعی عمومی M نسبت به Φ می‌نامیم. تابعگون‌های کوهمولوژی موضعی عمومی نسبت به Φ را می‌توان به صورت حد مستقیم تابعگون‌های Ext تعریف کرد؛ به عبارت دیگر ([۸، Proposition ۲.۳] را ببینید) برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$ داریم

$$H_\Phi^i(M) \cong \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \operatorname{Ext}_R^i(R/\mathfrak{a}, M).$$

روشن است که اگر $\Phi = \{I^t : t \in \mathbb{N}\}$، آنگاه $\Gamma_\Phi(M) = \Gamma_I(M)$، و در نتیجه مدول‌های کوهمولوژی موضعی عمومی نسبت به یک دستگاه ایدآلی، تعمیمی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی هستند. برای مطالعه بیشتر درباره این مدول‌ها به [۵، ۱۰، ۱۷، ۳۲، ۳۹] مراجعه کنید.

در سال ۱۹۸۰، بیژن‌زاده [۹] تعمیم کلی‌تری از نظریه کوهمولوژی موضعی مطرح کرد که شامل دو تعمیم قبل می‌شود. فرض کنیم Φ یک دستگاه ایدآلی باشد. برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، تابعگون

$H^i_\Phi(-,-)$ را برای هر دو R–مدول N و M به صورت

$$H^i_\Phi(N,M) = \varinjlim_{\mathfrak{a}\in\Phi} \mathsf{Ext}^i_R(N/\mathfrak{a}N, M)$$

تعریف می‌کنیم. روشن است که برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، $H^i_\Phi(M) \cong H^i_\Phi(R,M)$، و همچنین اگر $\Phi = \{I^t : t \in \mathbb{N}\}$، آنگاه $H^i_\Phi(N,M) = H^i_I(N,M)$.

در سال ۲۰۰۹، تاکاهاشی، یوشینو و یوشیزاوا [۶۲] مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل را به صورت زیر تعریف کردند. زیرمجموعه (I,J)–تابدار M را با $\Gamma_{I,J}(M)$ نشان می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Gamma_{I,J}(M) = \{x \in M : \exists\, t \in \mathbb{N}, I^t x \subseteq Jx\}.$$

روشن است که $\Gamma_{I,J}(M)$ یک زیرمدول M است و $\Gamma_{I,J}(-)$ یک تابعگون هموردا، جمعی، R–خطی و دقیق چپ روی رسته R–مدول‌ها است و آن را تابعگون (I,J)–تابدار می‌نامیم.

برای هر $i \in \mathbb{N}_\circ$، i–امین تابعگون مشتق‌شده راست $\Gamma_{I,J}(-)$ را با $H^i_{I,J}(-)$ نشان می‌دهیم و آن را i–امین تابعگون کوهمولوژی موضعی نسبت به ایدآل‌های (I,J) می‌نامیم. همچنین $H^i_{I,J}(M)$ را i–امین مدول کوهمولوژی موضعی M نسبت به ایدآل‌های (I,J) می‌نامیم. به راحتی می‌توان دید که تابعگون‌های $H^\circ_{I,J}(-)$ و $\Gamma_{I,J}(-)$ به طور طبیعی هم‌ارزند.

گوییم M یک R–مدول (I,J)–تاب‌دار است هرگاه $\Gamma_{I,J}(M) = M$، و (I,J)–بی‌تاب است هرگاه $\Gamma_{I,J}(M) = \circ$.

روشن است که اگر $J = \circ$، آنگاه $\Gamma_{I,J}(M) = \Gamma_I(M)$، و در نتیجه مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل، تعمیمی از مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی هستند. همچنین اگر $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $I^t \subseteq \sqrt{J}$، آنگاه $\Gamma_{I,J}(M) = M$.

تعریف ۱.۲.۲. *[۶۲، Definition ۳.۱]*

$$\tilde{\mathrm{W}}(I,J) = \{\mathfrak{a} \trianglelefteq R : \exists\, t \in \mathbb{N}, I^t \subseteq \mathfrak{a} + J\}.$$

به راحتی می‌توان دید $\tilde{\mathrm{W}}(I,J)$ تحت تخصیص و ضرب ایدآل‌ها بسته است. همچنین $\tilde{\mathrm{W}}(I,J)$ یک دستگاه ایدآلی است و $x \in \Gamma_{\tilde{\mathrm{W}}(I,J)}(M)$ اگر و تنها اگر $\mathsf{Ann}_R(x) \in \tilde{\mathrm{W}}(I,J)$.

از طرف دیگر داریم، $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ اگر و تنها اگر $t \in \mathbb{N}$ موجود باشد به طوری که $I^t \subseteq \mathrm{Ann}_R(x) + J$. بنابراین، $x \in \Gamma_{I,J}(M)$ اگر و تنها اگر $\mathrm{Ann}_R(x) \in \tilde{\mathrm{W}}(I,J)$. نتیجه می‌گیریم $\Gamma_{I,J}(M) = \Gamma_{\tilde{\mathrm{W}}(I,J)}(M)$. بنابراین نظریه کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل، حالت خاصی از نظریه کوهمولوژی موضعی عمومی نسبت به یک دستگاه ایدآلی است و تعریف معادل زیر برای تابعگون (I,J)-تاب‌دار موجود است

$$\Gamma_{I,J}(M) = \{x \in M : \exists\, \mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I,J),\ \mathfrak{a}x = 0\} = \bigcup_{\mathfrak{a} \in \tilde{\mathrm{W}}(I,J)} (0 :_M \mathfrak{a}).$$

در ادامه، به بعضی از ویژگی‌های اساسی مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل که در آینده به کار می‌روند، اشاره می‌شود.

گزاره ۲.۲.۲. *[۶۲، Proposition 1.4] فرض کنیم I' و J' ایدآل‌هایی از R باشند. گزاره‌های زیر برقرار هستند:*

(i) $\Gamma_{I,J}(\Gamma_{I',J}(M)) = \Gamma_{I+I',J}(M)$.

(ii) $\Gamma_{I,J}(\Gamma_{I,J'}(M)) = \Gamma_{I,JJ'}(M) = \Gamma_{I,J\cap J'}(M)$. *مخصوصاً برای هر* $i \in \mathbb{N}_0$ *داریم* $H^i_{I,JJ'}(M) = H^i_{I,J\cap J'}(M)$.

(iii) *برای هر* $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{I+J,J}(M) = H^i_{I,J}(M)$.

(iv) *برای هر* $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{\sqrt{I},J}(M) = H^i_{I,J}(M)$.

(v) *برای هر* $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{I,\sqrt{J}}(M) = H^i_{I,J}(M)$.

تعریف ۳.۲.۲. *[۶۲، Definition 1.5]*

$$\mathrm{W}(I,J) = \{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) : \exists\, t \in \mathbb{N}, I^t \subseteq \mathfrak{p} + J\}.$$

هرچند $\mathrm{W}(I,J)$ تحت ضرب ایدآل‌ها بسته نیست، اما تحت تخصیص بسته است.

گزاره ۴.۲.۲. *[۶۲، Proposition 1.7] گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(i) M یک مدول (I,J)-تاب‌دار است؛

(ii) $\mathsf{Min}_R M \subseteq \mathrm{W}(I,J)$؛

(iii) $\mathsf{Ass}_R M \subseteq \mathrm{W}(I,J)$؛

(iv) $\mathsf{Supp}_R M \subseteq \mathrm{W}(I,J)$.

نتیجه ۵.۲.۲. *[۶۲، ۱.۸ Corollary] برای هر $x \in M$، گزاره‌های زیر معادل هستند:*

(i) $x \in \Gamma_{I,J}(M)$؛

(ii) $\mathsf{Supp}_R Rx \subseteq \mathrm{W}(I,J)$.

نتیجه زیر، تعریف معادل دیگری برای تابعگون (I,J)-تاب‌دار ارائه می‌کند.

نتیجه ۶.۲.۲. $\Gamma_{I,J}(M) = \{x \in M : \mathsf{Supp}_R Rx \subseteq \mathrm{W}(I,J)\}$.

نتیجه ۷.۲.۲. *[۶۲، ۱.۹ Corollary] اگر M یک R-مدول (I,J)-تاب‌دار باشد، آنگاه M/JM یک R-مدول I-تابدار است. اگر M متناهی‌مولد باشد، عکس این مطلب نیز برقرار است.*

لم ۸.۲.۲. *[۵، ۴.۴ Lemma] اگر E یک R-مدول انژکتیو باشد، آنگاه $\Gamma_{I,J}(E)$ انژکتیو است.*

نتیجه ۹.۲.۲. $\Gamma_{I,J}(E_R(M)) \cong E_R(\Gamma_{I,J}(M))$.

برهان. چون بنابر لم ۸.۲.۲، $\Gamma_{I,J}(E_R(M))$ انژکتیو است، کافی است نشان دهیم $\Gamma_{I,J}(E_R(M))$ یک توسیع اساسی $\Gamma_{I,J}(M)$ است. فرض کنیم $\circ \neq x \in \Gamma_{I,J}(E_R(M))$. در این صورت عدد صحیح مثبت t و عضو a از حلقه R وجود دارد به طوری که $I^t x \subseteq Jx$ و $\circ \neq ax \in M \cap Rx$. بنابراین $I^t(ax) \subseteq J(ax)$ و $\circ \neq ax \in \Gamma_{I,J}(M) \cap Rx$. در نتیجه، $\Gamma_{I,J}(E_R(M))$ یک پوش انژکتیو $\Gamma_{I,J}(M)$ است. $\square$

گزاره ۱۰.۲.۲. *[۶۲، ۱.۱۱ Proposition] فرض کنیم $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}(R)$. اگر $\mathfrak{p} \in \mathrm{W}(I,J)$، آنگاه $E_R(R/\mathfrak{p})$ یک R-مدول (I,J)-تاب‌دار است. اگر $\mathfrak{p} \notin \mathrm{W}(I,J)$، آنگاه $E_R(R/\mathfrak{p})$ یک R-مدول (I,J)-بی‌تاب است.*

گزاره ۱۱.۲.۲. *[۶۲، ۱.۱۲ Proposition] فرض کنیم M یک R-مدول (I,J)-تاب‌دار باشد. در این صورت M یک تحلیل انژکتیو دارد که هر جمله آن یک R-مدول (I,J)-تاب‌دار است.*

نتیجه ۱۲.۲.۲. *[۶۲، ۱.۱۳ Corollary] گزاره‌های زیر برقرارند:*

(i) اگر M یک R-مدول (I,J)-تاب‌دار باشد، آنگاه برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{I,J}(M) = 0$.

(ii) $M/\Gamma_{I,J}(M)$ یک R-مدول (I,J)-بی‌تاب است، یعنی $\Gamma_{I,J}(M/\Gamma_{I,J}(M)) = 0$.

(iii) برای هر $i \in \mathbb{N}$، $H^i_{I,J}(M) \cong H^i_{I,J}(M/\Gamma_{I,J}(M))$.

(iv) برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{I,J}(M)$ یک R-مدول (I,J)-تاب‌دار است.

قضیه ۱۳.۲.۲. *[۸، ۲.۳ Proposition] برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، تابعگون کوهمولوژی موضعی $H^i_{I,J}(-)$ با حد مستقیم جابجا می‌شود.*

نتیجه زیر را می‌توان به عنوان تعمیمی از قضیه استقلال (قضیه ۵.۱.۲) در نظر گرفت.

قضیه ۱۴.۲.۲. *[۶۲، ۲.۷ Theorem] فرض کنیم $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی بین حلقه‌های جابجایی و نوتری و $|_R : \mathfrak{C}(R') \longrightarrow \mathfrak{C}(R)$ تابعگون حاصل از تحدید ضرب اسکالر توسط f باشد. فرض کنیم $f(J) = JR'$. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، تابعگون‌های $H^i_{IR',JR'}(-)|_R$ و $H^i_{I,J}(-|_R)$ (از $\mathfrak{C}(R')$ به $\mathfrak{C}(R')$) به طور طبیعی هم‌ارزند.*

نکته ۱. اگر $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ها و پوشا باشد، آنگاه $f(J) = JR'$. اما اگر در قضیه بالا شرط $f(J) = JR'$ حذف شود، حکم برقرار نخواهد بود. به عنوان مثال، فرض کنیم k یک میدان باشد، $R = k[x,y]$ و $R' = k[x,y,z]/(xz - yz^2)$. فرض کنیم $I = (x)$ و $J = (y)$. اگر $f : R \longrightarrow R'$ همریختی طبیعی باشد، آنگاه $f(J) \subset JR'$ و $\Gamma_{I,J}(R') \neq \Gamma_{IR',JR'}(R')$.

نکته ۲. [۶۲، Remark ۲.۸] اگر $f : R \longrightarrow R'$ یک همریختی حلقه‌ها و یکدست باشد، آنگاه برای هر $i \in \mathbb{N}_0$ همریختی طبیعی زیر موجود است

$$H^i_{I,J}(M) \otimes_R R' \longrightarrow H^i_{IR',JR'}(M \otimes_R R').$$

اما همریختی فوق لزوماً یکریختی نیست. به عنوان مثال، فرض کنیم

$$f : R = k[x,y]_{(x,y)} \longrightarrow \widehat{R} = k[[x,y]]$$

همریختی تکمیل باشد، $I = (x)$ و $J = (y)$. همچنین فرض کنیم $S = \{x^t + ya : a \in R\}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از R و $\widehat{S} = \{x^t + yb : b \in \widehat{R}\}$ یک زیرمجموعه بسته ضربی از $\widehat{R}$ باشد. در این صورت $H^1_{I,J}(R) \otimes_R \widehat{R} = S^{-1}\widehat{R}/\widehat{R}$ و $H^1_{I\widehat{R},J\widehat{R}}(\widehat{R}) = \widehat{S}^{-1}\widehat{R}/\widehat{R}$. به راحتی می‌توان دید که همریختی طبیعی $S^{-1}\widehat{R}/\widehat{R} \longrightarrow \widehat{S}^{-1}\widehat{R}/\widehat{R}$ یک‌به‌یک است، ولی پوشا نیست.

در نتایج زیر، رابطه بین مدول‌های کوهمولوژی موضعی معمولی و مدول‌های کوهمولوژی موضعی نسبت به دو ایدآل را بررسی می‌کنیم.

قضیه ۱۵.۲.۲. [۶۲، Corollary ۲.۵] فرض کنیم M یک R-مدول J-تاب‌دار باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، $H^i_{I,J}(M) \cong H^i_I(M)$.

قضیه ۱۶.۲.۲. [۸، Proposition ۲.۳] و [۹، Lemma ۲.۱] فرض کنیم M یک R-مدول باشد. در این صورت برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، یکریختی‌های طبیعی زیر موجود است

$$\begin{aligned} H^i_{I,J}(M) &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M) \\ &\cong \varinjlim_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} H^i_{\mathfrak{a}}(M). \end{aligned}$$

نتیجه ۱۷.۲.۲. برای هر $i \in \mathbb{N}_0$، گزاره‌های زیر برقرارند:

(i)

$$\mathrm{Supp}_R H^i_{I,J}(M) \subseteq \bigcup_{\mathfrak{a} \in \tilde{W}(I,J)} \mathrm{Supp}_R \mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{a}, M).$$