بسم الله الرحمن الرحيم

١.٤.٩٥

دانشگاه پیام نور
مرکز مشهد

دانشکده علوم پایه

گروه ریاضی

پایان نامه تحصیلی برای دریافت درجه کارشناسی ارشد

ریاضی محض

عنوان:

میانگین پذیری جبرهای باناخ از عملگرهای فشرده

استاد راهنما:

دکترعلی جلیلیان عطار

دانشجو:

محمدباقرصحابی

شهریور ماه ۱۳۸۵

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم تحقیقات وفناوری

تاریخ:
شماره:
پیوست:

دانشگاه پیام نور

بسمه تعالی

تصویب نامه پایان نامه

پایان نامه تحت عنوان : میانگین پذیری جبرهای باناخ ازعملگرهای فشرده

که توسط آقای **محمد باقر صحابی** تهیه و به هیئت داوران ارائه گردیده است مورد تائید قرارگرفت

تاریخ دفاع : ۱۳۸۵/۶/۲۰ نمره : ۱۷/۵ درجه ارزشیابی : **عالی**

نام ونام خانوادگی	هیئت داوران	مرتبه علمی	امضاء
دکتر علی جلیلیان عطار	استاد راهنما	استادیار	
دکترثریا طالبی	استاد ممتحن	استادیار	
دکتر مرتضی آقایی	نماینده گروه آموزشی	استادیار	

تحمیدیه و سپاسگزاری :

به نام خدایی که جـــــان آفرید — سخـن گـفتـن انـدر زبـان آفـریـد

خـــداونـد بخشنـــده دستگیـــر — کریم خطابخش بخش پوزش پذیـر

عزیزی کـه هرکز درش سربتافت — به هر در که شد هیچ عزت نیـافـت

منت خدای را عزوجل که طاعتش موجب قربت است وبه شکر اندرش مزید نعمت .

شکر وسپاس بیکران به درگاه ایزد لایزال که اندیشه را در حریم معرفت او راه نیست و پرنده جان خرد را در مسیر شناختش قدرت ویارای پرواز نه؛ شاهین سخن هرچند اوج پر و تیز پرواز ، در آسمان وصف کمالش ناتوان .

درود بی پایان بر پیشوای انبیا و مقتدای اصفیا، حضرت محمد(ص) و صلوات الله علیه و علی آله اجمعین الـی یـوم الدین .

سپاس پاک ودرود بی شائبه به معلمان و استادانی که از ابجد خوانی دبستان تا این مرحله دستم را گرفته وسـرورانی که با کمال اخلاص و گشاده رویی پرتو آفتاب معرفت و زلال اندیشه خود را ارزانی داشته و غبار ظلمت از صـفحه ضمایر و پرده اذهان زدوده و همواره صیقلی بخش آیینه زنگار گرفته دلها بودند .

شکر ایزد که بر بنده کمترین منت نهاد و توفیقم عطـا فرمـود کـه در مـسیر کـسب علـم ودانـش از محـضر فیـاض گوهرانی گوهرین و خـرمن فـضل عالمـانی نیـک آیـین ، خوشـه چیـنم و توشـه گیـرم اسـتادانی ظلمـت سـتیز و اندیشمندانی خرد فروز که با شمس وجود خویش راه تیره وتار انسان را ضیا وصفا بخشیده و از دریای مـوج خیـز نگاه خویش درّ شرف ، بزرگی ، مهربانی ، تواضع وانسانیت نثار نمودند .

نگارنده بر خود فرض می داند از استاد گرانقدر و دانش پرور توانمند جنـاب ***آقای دکتر علی جلیلیـان عطـار*** کـه راهنمایی پایان نامه را تقبل و با نهایت شکیبایی نگارنده را هدایت و ارشاد فرموده سپاسگزاری نماید.

از استاد گرانقدر *سرکارخانم دکتر ثریا طالبی* که با فضل اخلاق علمـی بنـده را مـدیون الطـاف خـویش سـاختند و داوری این پایان نامه را بر عهده گرفتند سپاسگزاری می گردد.

از زحمات استاد گرانقدر آقای مرتضی آقایی ،نماینده گروه محترم آموزشی نهایت تشکر و قدر دانی را نماید

از عنایت و توجهات بی دریغ استاد بزرگوار جناب ***آقای دکتر صحت خواه*** مدیریت محتـرم گـروه ریاضـی کمـال تشکر وقدر دانی را دارد.

و، زانوی ادب بر زمین نهاده برتربت پاک مـــــــــــــــــــــــادری بوسه زند که دستش بگرفـت و پابـه پـا بـرد شمعی که سوخت و سوخت و ... تا روشایی بخش محفل اش باشد

در خاتمه برخود وظیفه می داند از تمامی اساتید گرانقدر دانشگاه پیام نور مشهد و عزیزان زحمتکش کادر دانـشگاه بخصوص خانم نبی زاده نهایت قدردانی وتشکر را نماید.همچنین از دوست عزیزم جنـاب آقـای ناصـر خانیـار کـه درنگارش وتدوین این پایان نامه نقشی بزرگ داشتند تقدیر و تشکر نماید.

تقدیم به:

دانشمند فرزانه:

استاد بزرگوارم جناب آقای دکتر

عــــلی جــــلیلیان عطــــار

روان پاک مــادرم:

مـــــهربانترین مـــــهرورزان

هـــــــمسرم :

کسی که رنج زنــدگی را بی منت

پذیراست، صــــبور وبــــــردبار

و

تـمــــامی آنــــانی که رنـجم

را متــــــحمل شــــــده اند

فهرست مطالب

عنوان **صفحه**

فصل پنجم

پیوست

چکیده

دراین پایان نامه، شـرایطی روی فـضای بانـاخ X را کـه تـضمین مـی کنـدجبر بـا نـاخ $\mathcal{K}(X)$ ازعملگرهای فشرده، میانگین پذیر باشد را مطالعه می کنیم. یک خاصیت تقریبی متقارن شده از X را که در این وضعیت به اثبات رسیده ارائه می دهیم. این خاصیت بوسیله گروهی از فـضاهای بـا ناخ شامل همه فضاهای کلاسیک برقرار می شود. سپس ساختارهایی از فضاهای جدید بـا نـاخ را از فضاهای قبلی که خصوصیت جبرهای میانگین پذیر از عملگرهای فـشرده را حفـظ مـی کننـد، بررسی میکنیم.

فضاهای دوگان، فضاهای پیش دوگان و حاصل ضـربهای تانـسوری معـین، ایـن خـصوصیت را به همراه دارند. برای جمع مستقیم، این سوال کاملاً بـا تجزیـه (فـاکتورگیری) عملگرهـای خطـی مرتبط است. در بخشهای دیگر،از سوالات باز، بـویژه ایـن مـسئله معکـوس کـه چـه خواصـی از خصوصیات X بوسیله میانگین پذیری $\mathcal{K}(X)$ایجاب می شوند را مورد بحث قرار می دهیم.

فصل ۱

پیشنیازها

انتقال پایا : یک اندازه μ روی یک فضای اندازه پذیر(X,m)،از چپ (از راست)انتقال پایاست اگر

برای هر $x \in X$وهر $A \in m$ داشته باشیم $\mu(xA) = \mu(A)$ ، $(\mu(Ax) = \mu(A))$

اندازه بورل : اندازه M تعریف شده بر جبر تمام مجموعه‌های بـورل در فـضای هاسـدورن بطـور

موضعی فشرده Xیک اندازه بورل X نام دارد .

اندازه رادن:هر اندازه بورلی منظم مختلط کرانداریک اندازه رادن نامیده می شود. منظم بودن به این

معنی است که هر مجموعه اندازه پذیر را می توان از درون توسط مجموعه هاییفـشرده و از بیـرون

توسط مجموعه هایی باز تقریب نمود.

اندازه هارچپ : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک آبلی فـشرده موضـعی باشـد و فـرض کنیـد

$M(G) \ni m \neq ۰$ منظم باشد . اگر به ازای هر زیر مجموعه بـورل $E \subseteq G$و بـه ازای هـر $X \in G$

$m(x+E) = m(E)$ در این صورت m را یک اندازه هار نامند .

پایه زیر متقارن انقباضی: یک پایه $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$در یک فضای با ناخ Xزیر متقارن نامیده مـی شـود

اگـر $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$غیـر شـرطی باشـد و معـادل بـا دنبالـه پایـه ای $(x_{n_i})_{i\in\mathbb{N}}$ بـرای هردنبالـه

صعودی $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$، باشـد

پایه نامشروط: اگر $\{e_n\}_{n\geq ۰}$ پایه یکـا متعامـدی از فـضای هیلبـرت H باشـد و اگـر T عملگـر

وارونپذیری روی H باشد ، آنگاه $\{Te_n\}_{n\geq ۰}$ یک پایهٔ نامشروط است

پیچش : فرض کنید f و g دو تابع اندازه‌پذی ربورل روی یک گـروه توپولوژیـک آبلـی فـشرده

موضعی G باشد . تعریف می‌کنیم :

$\int_G f_y(x)g(y)d_y = \int_G f(x-y)g(y)d_y = (f*g)(x)$ به شرط آنکه $\int\int_G |f(x-y)g(y)| d_y < \infty$

پیوسته یکنواخت : فرض کنید $(x,d), E \subseteq G$ یک فضای متریک باشد تابع $f : E \longrightarrow X$ را پیوسته یکنواخت گویند اگر به ازای هر $E>0$ یک همسایگی V از ۰ در E موجود باشد بطوریکه $x-y \in v$ ایجاب کند $d\left(f\langle x\rangle, f\langle y\rangle\right) < E$ وقتی که $x, y \in E$

تبدیل خطی کراندار : فرض کنید T یک تبدیل خطی از فضای خطی نرمدار x به فضای نرمدار y باشد نرم T را به صورت زیر تعریف می‌کنیم : $\|T\| = SUP\left\{\|T(x)\| \;:\; \|x\| \leq ۱, x \in X\right\}$

هر گاه $\|T\| < \infty$ ، آن گاه T را یک تبدیل خطی کراندار می‌نامند .

ترکیب محدب: اگر V یک میدان برداری روی میدان F باشد و $a, b \in V$ و $\mu, \lambda \in F$ آنگاه

$\lambda a + \mu b$ را یک ترکیب محدب از a, b نامند اگر $\lambda + \mu = ۱$

توپولوژی : گردایه T ، از زیر مجموعه‌های X را یک توپولوژی در X گویند اگر دارای سه خاصیت زیر باشد :

۱) $\Phi \in T$ و $X \in T$

۲) هر گاه به ازای $J = ۱, ۲, -, n$ $\quad V_i \in T$ آن گاه $V_۱ \cap V_۲ \cap ...... \cap V_n \in T$

۳) هر گاه V_∂ ۲ گردایه دلخواهی از اعضای T (متناهی ، شمارش‌پذیر ، ناشمارا باشد) آن‌گاه $U_\partial V_\partial \in T$ در اینصورت (X, T) را فضای توپولوژیک واعضای T را مجموعه‌های بازدر X می‌نامند .

تور: یک رابطه دوتایی $\leq$ یک مجموعه D را جهت دار می کند اگر $D \neq \phi$ و

$$\forall\; a \in D \quad (a \leq a)$$

$$\forall a,b \in D \ \exists c \in D \ \ni (\ a \le c\ ,\ b \le c\ )$$
$$\forall a,b,c \in D\left(a \le b\ ,\ b \le c \ \Rightarrow\ a \le c\right)$$

یک تور یک جفت $(D,\le)$است طوری که Sیک تابع است و≤دامنه Sرا جهت دار می کند.

جبر : گردایه mاز زیر مجموعه‌های Xرا یک $\sigma-$جبر در Xنامیم . اگر دارای خواص زیر باشد :

۱) $X \in M$

۲) هر گاه $A \in M$ آن گاه $A^c \in M$که در آن A^c متمم A نسبت به X است .

۳) هر گاه $A = U_{n=1}^{\infty} A_n$و به ازای ....,۱,۲=n $A_n \in m$آن گـاه $A \in m$در ایـن صـورت (x,m) را

فضای اندازه‌پذیر و اعضای m را مجموعه‌های اندازه‌پذیردر Xمی‌نامیم .

C^*-جبر:اگر Hیک فضای هیلبرت و $B(H)$جبر باناخ عملگرهای کراندار روی Hباشد. یک

زیر جبر از $B(H)$خود الحاق نامیده می شود اگر شامل الحاق هر یک از عملگرهای خود باشـد .

زیر جبرهای باناخ از $B(H)$که خود الحاق اند ، C^*-جبر نامیده می شوند.

جبر باناخ : جبر باناخ جبری است مانند A روی میدان F با نرم $\|\ \|$ که با ایـن نـرم A یـک

فضای باناخ بوده و برای هر $a,b \in A$ $\|ab\| \le \|a\|\ \|b\|$

جبر بورل : اگـر X یـک فـضای توپولوژیـک بـاش آن گـاه کـوچکترین $\sigma-$جبـر شـامل همـه

مجموعه‌های باز را جبر بورل از Xو آن را با B_x نمایش می‌دهند .

جـــــبرفون نیومان:توپولوژی عملگری ضعیف روی $B(H)$، توپولوژی ضعیف تولید شده توسط

تمام توابع به صورت $T \longrightarrow \langle Tx,y \rangle$ $(\ x,y \in H\ )$است یعنی ضعیف ترین توپولوژی کـه

نسبت به آن تمام این توابع ،پیوسته اند.یک C^*-جـــبر که نسبت به:توپولوژی عملگری ضعیف،

بسته باشد یک جبرفون نیومان نامیده می شود.

حاصل ضرب تانسوری تنگ: Y و X را فضاهای باناخ و α را یک نرم برداری برروی $X\otimes Y$ فرض می کنیم ، وآنرا با $X\otimes_{\alpha} Y$ نشان می دهیم $X\otimes_{\alpha} Y$ را یک حاصل ضرب تانسوری تنگ Y,X می نامیم، اگر دو شرط زیر را دارا باشد.

I) یک $k>o$ باشد بطوریکه برای همه $S\in\mathcal{F}(X),T\in\mathcal{F}(Y)$ عملگر بر روی $X\otimes Y$ داده شده با $(x\in X, y\in Y)$ $(S\otimes T)_{x\otimes y}=S_x\otimes T_y$ دارای نرم α عملگرهای حداکثر $K\ \|S\|\|T\|$ باشد.

ii) $\{S\otimes T|S\in\mathcal{F}(X),T\in\mathcal{F}(Y)\}$ $Span$ در $\mathcal{F}(X\otimes_{\alpha} Y)$ چگال باشد.

دوآل : فرض τ مجموعه تمامی مشخصه‌های پیوسته روی G باشد با $(V_1+V_2)=V_1(x)\times V_2(x)$ و $0\in\tau$ $\forall_X\in G$ $0(x)=1$ بنابراین $V(x)=\frac{1}{v(n)}$ در واقع τ یک گروه توپولوژیک فشرده موضعی است و $\tau\cong G$ در نتیجه τ را دوآل E گویند .

زیرگروه نرمال: زیرگروه N از E را یک گروه نرمال E می‌گویند هرگاه : $\forall g\in G$ $g\cap g^{-1}\in N, n\in N$

زیرگروه نرمال بسته: یک زیرگروه توپولوژیک H از یک گروه توپولوژیک G **که نرمال باشدیعنی** $g^{-1}Hg\subseteq H$ $\forall g\in G$ **و بسته باشد یعنی** $\overline{H}=H$ یک زیر گروه نرمال بسته از G نامیده می شود.

عملگر فشـــرده: اگر X,Y فضاهای باناخ باشند و U گوی واحد باز در X باشد آنگاه یک عملگر $T\in B(X,Y)$ فشرده نامیده می شود اگر بستار $T(U)$ فشرده در Y باشد .

عملـــگر نرمال: یک عملگر $T\in B(H)$ نرمـــال نامیده می شود اگر $TT^{*}=T^{*}T$ کــه دوآل

T^*عملگر الحاق حاصل از Tاست

فضای اندازه : فرض کنیم sمجموع ناتهی باشد یک $\sigma-$ جبر روی s گردایه‌ای است مانند x از زیر مجموعه‌های sبه قسمی که :

۱) $s\in m$

۲) اگر $A\in m$ آن گاه $S-A\in M$

۳) اگر $\{A_n\}\subseteq m$آن گاه $V_{n=1}^{\infty} A_n \in m$ در این حالت sرا یک فضای اندازه‌پـذیر و اعـضای m را مجموع اندازه‌پذیر گویند .

فضای باناخ : فضای خطی نرمدار xفضای باناخ گفته می‌شود هر گاه هر دنباله کوشی در این فـضا همگرا باشد .

فضای باناخ اولیه: فضای باناخ X، اولیه نامیده می شود اگر برای هرتصویر کراندار Q برروی X ، یا QX یا $(\mathcal{I}$-Q)X با X یکریخت باشد

فضای باناخ A-دومدولی: برای هر جبر باناخ $\mathcal{A}$ یک فضای باناخ X یک $\mathcal{A}$- دو مدولی باناخ است اگر X یک$\mathcal{A}$-دو مـدولی باشد و یک مقـدار ثابت k موجود باشد بطـوریکه نا مساویهای $\|a.x\| \leq k\|a\|\|x\|, \|x.a\| \leq k\|a\|\|x\|$ برای هر a در $\mathcal{A}$ و x در X برقراریاشد.

فضای توپولوژیک موضعاً فشــــرده : X را موضعاً فشرده گوئیم در صورتی که هر نقطه از X همسایگی مانند u داشته باشد به طوری که $\bar{u}$ به عنوان زیر فضای Xفشرده باشد .

فضای خطی توپولوژیک : فرض کنیم αیک توپولوژی روی فضای خطی X باشد طوری که :

۱) هر نقطه X یک مجموعه بسته باشد ۲ –عملگرهای جمع و ضرب اسکالر در X نسبت به τ پیوسته باشد در این صورت τ را یک توپولوژی برداری روی x و x را یک فضای خطی توپولوژیک می‌نامیم . اگر X و Y دو فضای خطی توپولوژیک باشند . مجموعه همه عملگرهای خطی کراندار از X به Y را با $B(X,Y)$ نمایش دهند .

فضای خطی نرمدار : فضای برداری مختلط X را یک فضای خطی نرمدار نامیم اگر به هر $x \in X$ یک عدد حقیقی نامنفی مانند $\|x\|$ به نام نرم x چنان مربوط شده باشد که :

۱) به ازای هر x,y در X $\quad \|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

۲) اگر $x \in X$ و X اسکالر باشد $\|\alpha x\| = \|\alpha\| \; \|x\|$

۳) $\|x\| = 0$ تساوی $x = 0$ را ایجاب می‌کند .

فضای دوگان : فضای دوگان از یک فضای برداری توپولوژیکی X عبارت است از فضای برداری X^* متشکل از تمام تابعک‌های خطی پیوسته روی X

فضای هیلبرت : فرض H یک فضای ضرب داخلی باشد ، فضای نرمدار X را یک فضای پیش هیلبرت نامند . هرگاه بتوان آن را از یک ضرب داخلی روی H بدست آورد ، حال اگر H نسبت به این نرم کامل باشد H را فضای هیلبرت نامند .

قضیه گوته- لــــورچ: هر پایه نامشروط در فضای هیلبرت مساوی پایه یکامتعامداست وبرعکس

میانگین پایای چپ: اگر $\mathcal{F}$ انتقال پایای چپ باشد به این معنی که $\lambda_s f$ در $\mathcal{F}$ برای هر $s \in G$ و $f \in \mathcal{F}$ باشد ، و اگر m میانگینی روی $\mathcal{F}$ باشد بطوی که $m(\lambda_s f) = m(f)$ برای هر

$s \in G$ و $f \in \mathcal{F}$ باشد ، آنگاه m میانگین پایای چپ روی $\mathcal{F}$ نامیده می شود

قضیه نمایش ریس : فرض کنید X یک فضای هاسدروف به طور موضعی فشرده بوده و T یک تابعک خطی مثبت به $C_c(x)$ باشد ، دراین صورت یک $\sigma-$ جبر مانند m در X هست که شامل مجموعه‌های بورل در X می‌باشد و یک اندازه مثبت منحصر بفرد مانند M بر m هست طوری که :

۱) به ازای هر $f \in C_c(x)$, $tf = \int_x fd_m$

۲) به ازای هر مجموع فشرده $K \subset X$, $M(k) < \infty$

۳) به ازای هر $E \in m$ داریم $M(E) = inf\{M(v) \ : \ V, E \subset v$ باز $\}$

۴) رابطه $M(E) = SUP\{M(k)$ فشرده k $K \subset E\}$ به ازای هر مجموعه باز E و هر $E \in m$ که $M(E) < \infty$ برقرار است .

۵) هر گاه $E \in m$ و $A \subset E$ و $M(E) = ۰$ آن گاه $A \in m$

قضیه هان باناخ : هر گاه M زیر فضایی از فضای خطی نرمدار x بود و f یک تابع خطی کراندار بر M باشد آن گاه f را می‌توان یک تابع خطی کراندار مانند F بر X توسیع داد که $\|F\| = \|f\|$

مشخصه : فرض کنید G یک گروه توپولوژیک آبلی فشرده موضعی باشد V را یک مشخصه G گویند ، اگر V یک همریختی $G \longrightarrow S^1$ باشد یعنی $V(x+y) = V(x)V(y)$ $\forall x \in G \ |v(x)| = ۱$

σ-متناهی : اگر X اجتماع تعدادی شمارش‌پذیر مجموع مانند $E_n \in m$ ....,$n = ۱, ۲$ باشد که $M(E_n)$ متناهی است M را $\sigma-$ متناهی می‌نامند .

نرم برداری معقول: نرم برداری معقول نامیده میشود اگر نرم دوگانش نیز یک نرم برداری باشد

۲-میانگین پذیری چیست؟

فـــرض کـــنید (Z) ℓ^{∞} مجـــموعـــه ای از دنبـــاله های کـــران دار (مخـــتلط شـــکل) با نـــرم سوپریمم تعـــریف شده به صورت زیرباشد $a = \{a_n\} \equiv \{a_n\}_{-\infty<n<\infty}$

$$\|a\|_{\infty} := \sup_{n\in z}|a_n|$$

بدیهی است که (Z) ℓ^{∞} با نـرم سوپریمم ، فضای خطی نرم دار است . فـرض کنید M مجموعه تمام $a=\{a_n\}$ در(Z) ℓ^{∞} باشد که برایش حد

$$L(a) := \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{۲n+۱}\sum_{k=-n}^{n} a_k$$

وجود دارد . روشن است که M زیر فضای خطی (Z) ℓ^{∞} است و L تا بعک خطی روی M با ۱ = (۱) L است (در اینجا ۱ در (۱) L جانشین دنباله پایدار$\{a_n\}$ بـا مقـدار ۱ =a_n بـرای تمام n ها می باشد) و (۱ ≥ $\|L\|$ درنتیجه ۱=$\|L\|$) است . با استفاده از قـضیه تـوسیع ها ن – باناخ[1] می دانیم که تابعک خطی m روی (z) ℓ^{∞} چنان تعریف شده که۱=$\|m\|$ و $m(a) = L(a)$ برای همه $a\in M$ (بطور خاص۱ = m (۱)) برای $a\in\ell^{\infty}(z)$ ، بایـد S_a را برای دنباله تعریف شده توسط $(S_a)_n = a_{n-۱}$ نوشت . می توان دریافـت کـه $a - S_a$ درM بـا $L(a-S_a)=۰$ وجود دارد،بادرنظرگرفتن

$$\frac{۱}{۲n+۱}\sum_{k=-n}^{n} a_k - \frac{۱}{۲n+۱}\sum_{k=-n}^{n} a_{k-۱} = \frac{۱}{۲n+۱}\sum_{k=-n}^{n}(a_n - a_{-n-۱})$$

که به صفـر میل می کندوقتـی که $n\to\infty$ ودنـــباله $a=\{a_n\}$ کـرانـدار باشد . بنابـر این

---

[1] Hahn Banach

$m(a) - m(S_a) = m(a - S_a) = L(a - S_a) = ۰$ نتیجه می گیریم که m تابعک خطی روی فضای $\ell^{\infty}(z)$ است به طوری که $||m|| = m(1) = 1$ و $m(S_a) = m(a)$ برای هر $a \in \ell^{\infty}(z)$ می باشد . بر اساس تعریف هایی که بعد می آید ، این امر بطور تلویحی نشان می دهد که m میانگین پایایی روی $\ell^{\infty}(z)$ است و به همین دلیل گروه گسستهٔ Z میانگین پذیر است. هرچند چنین m یکتا نیست، اما گاهی $m(a)$ به صورت $LIM\, a_n$ نوشته می شود ، که در آن LIM جانشین " میانگین پایای چپ"ونیز"حدود کلی با ناخ"می شود . توجه داشته باشید روشی که میانگین پایای m را روی $\ell^{\infty}(z)$ بدست می آوریم، غیر ساختنی است . این امر اجتناب ناپذیر است زیرا فضای ℓ^{∞} بیش از آن " بزرگ " است که بتوان روی آن عمل ساختن معقولی را انجام داد .

فرض کنید G یک گروه باشد با توجه به تابع f که روی G و $s \in G$ تعریف شده ، $\lambda_s f$ و $\rho_s f$ را برای تابع های روی G می نویسیم که از طریق $(\lambda_s f)(t) = f(s^{-1}t)$ و $(\rho_s f)(t) = f(ts)$ بدست آمده است.خیلی ساده می توان دریافت که ، برای هر $s,t \in G$ ، $\lambda_{st} = \lambda_s \lambda_t$ و $\rho_{st} = \rho_s \rho_t$ و $\lambda_s \rho_t = \rho_t \lambda_s$ بـه این معنی که λ_s و ρ_t جابجا میشوند.

فرض کنید $\mathcal{F}$ فضای خطی توابع کراندار(مختلط مقدار) روی G باشد ، و فرض کنید که $\mathcal{F}$ توابع ثابت را در خود دارد . برای $f \in \mathcal{F}$، $||f||_{\infty}$ برای نرم سوپریمم f ، یا نرم سوپریمم اساسی f با توجه به نرمی مناسب می نویسیم.

تابعک خطی m روی $\mathcal{F}$ میانگین روی $\mathcal{F}$ نامیده می شود ، اگر $1 = m(1) = \| m \|$ باشد ، و یا معادل آن $m(1) = 1$ و $\infty \| f \| \leq | m(f) |$ برای هر $f \in \mathcal{F}$ باشد . اگر $\mathcal{F}$ انتقال پایای چپ باشد به این معنی که $\lambda_s f$ در $\mathcal{F}$ برای هر $s \in G$ و $f \in \mathcal{F}$ باشد ، و اگر m میانگینی روی $\mathcal{F}$ باشد بطوری که $m(\lambda_s f) = m(f)$ برای هر $s \in G$ و $f \in \mathcal{F}$ باشد ، آنگاه m میانگین پایای چپ روی $\mathcal{F}$ نامیده می شود . میانگین پایای راست روی فضای تحت انتقال پایای راست $\mathcal{F}$ را هم به همان روش می توان تعریف کرد تنها ρ_s باید جایگزین λ_s بشود . اگر میانگینی هم پایای راست و هم پایای چپ باشد ، خیلی ساده آن را میانگین پایا می نامیم . بر اساس تعریفمان ،در یافت این امرآسان است که تابعک خطی m که در پاراگراف قبلی تعریف شد میانگین پایا روی $\ell^{\infty}(z)$ می باشد ، که بطور دقیق فضای تمام توابع کراندار روی z می باشد .

حال فرض کنید G گروه فشرده موضعی با اندازه هار[1] چپ ثابت λ باشد. برای تابع بورل[2] کراندار f روی G ، نرم سوپریمم اساسی نسبت به λ را با $\|f\|_{\infty}$ نشان می دهیم $L^{\infty}(G)$ فضای تمام (رده های هم ارزی) توابع بورل کراندار روی G (که در آن توابع را یکی فرض می کنیم اگر تنها روی مجموعه ای از اندازه هارصفر فرق دارند) و $C_b(G)$ فضای تمام توابع پیوسته کراندار روی G را نشان می دهد .فرض کنید $LUC(G)$ فضای همه توابع بطور یکنواخت پیوسته چپ کراندار روی G باشد در این صورت f در $LUC(G)$ است اگر و تنها

[1] Haar
[2] Borel