

pfnote,11pt
Zar [scale=1]XB

دانشگاه الزهرا
دانشکده فیزیک

پایان نامه کارشناسی ارشد
گرایش نظری

عنوان
شبیه سازی به حرکت در آوردن سیال دو فاز
(آب و نفت) در محیط متخلخل به کمک
امواج صوتی

نگارش
نرجس خاتون شاکری

اساتید راهنما
دکتر مهرداد تقی زاده منظری
دکتر احمد شریعتی

مهر ۸۹

دانشگاه الزهرا
دانشکده فیزیک

رساله کارشناسی ارشد

شبیه سازی به حرکت در آوردن سیال دو فاز (آب و نفت) در
محیط متخلخل به کمک امواج صوتی

نگارش: نرجس خاتون شاکری

امضاء:

اساتید راهنما:
دکتر مهرداد تقی زاده منظری
دکتر احمد شریعتی

امضاء:

استاد ممتحن داخلی: دکتر امیر آقا محمدی

امضاء:

استاد ممتحن خارجی: دکتر سیامک کاظم زاده حنانی

چکیده

محیط متخلخلی که بوسیله دو سیال مخلوط نشدنی اشباع شده است، در معرض تابش امواج فرا صوت قرار می گیرد؛ انرژی امواج صوتی منتقل شده به سیستم، خود را در محیط متخلخل به صورت تنش و در سیالات به صورت تغییر فشار نمایان می کنند. در اثر این تغییرات فشار، سیالات موجود در سیستم شروع به حرکت می کنند. معادلات حرکت هر کدام از سیالات را می توان با تعریف کردن رابطه انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی و تابع اتلاف انرژی (به دلیل وجود ویسکوزیته در سیالات، انرژی در محیط اتلاف می گردد) و در نهایت استفاده از رابطه لاگرانژی برای سیستم مورد بحث بدست آورد. برای شبیه سازی حرکت سیالات از دینامیک سیالات محاسباتی (CFD) و روش اختلاف محدود استفاده شده است؛ سیستم را به روش گرید جابجا تقسیم بندی کردیم. معادلات حرکت هر کدام از سیالات علاوه بر تابعیتی که از فرکانس و شدت امواج صوتی وارده بر سیستم و تنش حاصل از آنها دارد، تابعی از مشخصات ذاتی محیط متخلخل (سنگ) و سیال همچون اشباع، تخلخل موثر، نفوذپذیری، مدول حجمی سنگ و سیال، فشار موئینگی و ... می باشد.

کلمات کلیدی: انتشار امواج صوتی، محیط متخلخل، سیالات مخلوط نشدنی، روش اختلاف محدود

فهرست مطالب

۱	تاریخچه کاربرد امواج صوتی در مخازن نفتی	۱
۴	بررسی مکانیک سیستم	۲
۸	۱.۲ انرژی پتانسیل	۱.۲
۲۲	۲.۲ انرژی جنبشی	۲.۲
۲۵	۳.۲ تابع اتلاف انرژی	۳.۲
۲۶	۴.۲ لاگرانژی و معادلات حرکت	۴.۲
۲۷	محاسبه ضرائب روابط تنش و کرنش در سیستم	۳
۴۰	شبیه سازی سیستم	۴

لیست تصاویر

۶	تعریف ترشوندگی سیالات	۱.۲
۴۳	انتگرال به روش ذوزنقه ای	۱.۴
۴۸	شبکه بندی یک بعدی	۲.۴
۴۸	طریقه محاسبه جابجایی u در معلومات مسئله	۳.۴
۵۲	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول	۴.۴
۵۲	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت اول	۵.۴
۵۳	سرعت فاز نفت در گرید ۱۵۰ در حالت اول	۶.۴
۵۳	سرعت فاز آب در گرید ۱۵۰ در حالت اول	۷.۴
۵۴	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی نفوذپذیری ۱۰۰ برابر شده است	۸.۴
۵۴	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی نفوذپذیری ۱۰۰ برابر شده است	۹.۴
۵۴	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی نفوذپذیری ۱۰۰ برابر شده است	۱۰.۴
۵۵	است	
۵۶	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $\phi = 10\%$ است	۱۱.۴
۵۶	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $\phi = 10\%$ است	۱۲.۴
۵۷	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $\phi = 10\%$ است	۱۳.۴
۵۸	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $\phi = 72\%$ است	۱۴.۴
۵۸	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $\phi = 72\%$ است	۱۵.۴
۵۹	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $\phi = 72\%$ است	۱۶.۴
۶۰	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $S_n = 0.5$ است	۱۷.۴
۶۰	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $S_n = 0.5$ است	۱۸.۴
۶۰	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت اول هنگامی $S_n = 0.5$ است	۱۹.۴
۶۱	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم	۲۰.۴
۶۱	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت دوم	۲۱.۴
۶۲	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی نفوذپذیری ۱۰۰ برابر شده است	۲۲.۴
۶۲	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی نفوذپذیری ۱۰۰ برابر شده است	۲۳.۴
۶۲	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی نفوذپذیری ۱۰۰ برابر شده است	۲۴.۴
۶۳	است	
۶۴	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی $\phi = 10\%$ است	۲۵.۴
۶۴	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی $\phi = 10\%$ است	۲۶.۴
۶۵	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی $\phi = 10\%$ است	۲۷.۴
۶۶	سرعت فاز آب در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی $\phi = 72\%$ است	۲۸.۴
۶۶	سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی $\phi = 72\%$ است	۲۹.۴
۶۷	مقایسه سرعت فاز نفت در گرید $n+1$ در حالت دوم هنگامی $\phi = 72\%$ است	۳۰.۴
۶۸	دبی خروجی نفت در حالتی که سیال از سیستم خارج می شود	۳۱.۴

فصل ۱

تاریخچه کاربرد امواج صوتی در مخازن

نفتی

رفتار انتشار امواج صوتی در محیط های متخلخل، در زمینه های مختلف علوم مهندسی، از جمله در مکانیک خاک، زلزله شناسی، اقیانوس شناسی و ژئوفیزیک مورد توجه قرار گرفته است. یکی از انواع کاربرد امواج التراسونیک تأثیر آن در محیط های متخلخلی است که بوسیله یک یا چند سیال پر شده است، محیط های متخلخل را می توان به عنوان یک زنجیره متشکل از یک فاز جامد (یا ترکیبی از جامد) در نظر گرفت که خلل و فرج آن با یک نوع یا انواع سیالات پر شده باشد. مطالعه در زمینه پاسخ استاتیکی یا دینامیکی امواج صوتی در محیط های متخلخلی که از سیالات چند فاز پر شده است، مورد علاقه ی زمینه هایی همچون تجزیه دی اکسید کربن، افزایش برداشت از مخازن نفت، ارزیابی منابع گاز در رسوبات زیر اقیانوسی به وسیله شبیه سازی بازتابی سطوح (BSR)^۱ است.

مخازن نفتی دارای ساختاری متشکل از محیطهای متخلخل^۲ است که بوسیله چند نوع سیال پر شده است. متداول ترین و قدیمی ترین کاربرد امواج صوتی شناسایی موقعیت و نوع چینش زمین شناسی و نوع سنگ مخزن یا به طور کلی بررسی مخزن در حالت استاتیک مخازن نفتی است. استفاده از انرژی صوتی برای تحریک و افزایش بازیافت نفت در چهار دهه گذشته مورد بررسی قرار گرفته است. تمایل به استفاده از روش تحریک و ایبرو سیسمیک به اوایل دهه ۵۰ بر می گردد؛

^۱ botem simlation reflecting

^۲ porous

زمانی که به دنبال زمین لرزه ای بازیافت از مخازن افزایش یافت. [۲]

به دلیل هم سنخ بودن امواج لرزه‌ای با امواج التراسونیک دانشمندان بر آن شدند که تأثیرات امواج التراسونیک را بر رفتار دینامیکی سیالات در مخازن نفتی بررسی کنند.

پتانسیل امواج التراسونیک به عنوان روشی مفید برای افزایش بازیافت نفت در میدان‌های نفتی واقعی برای اولین بار توسط وهمن و کمپل (۱۹۶۵) مورد بررسی قرار گرفت. آنها یک سری آزمایشات جریان آب شور را بر روی نمونه‌های ماسه سنگ اشباع شده توسط نفت با امواج فراصوتی با دامنه‌ی بسامد ۵.۵-۱ انجام دادند. آنها فرض کردند که امواج التراسونیک، موج‌های بلند با فشار متمرکزی را در طول حفره‌ها ایجاد می‌کنند که باعث به دام افتادن نفت در منفذهای مجاور می‌شود. [۲]

بعد ها فیربنکز و چن (۱۹۷۱) یک سری آزمایش‌های عملی در مورد اثر انتقال گرما بر روی نفوذ مایعات در محیط‌های متخلخل با امواج التراسونیک انجام دادند. افزایش میزان نفوذ برای همه نمونه‌های مورد مطالعه توسط آنها، مشاهده شد. اما از آنجا که دما به شدت بر روی چسبندگی، کشش سطحی و چگالی فازها اثر می‌گذارد، مشخص نشد که آیا بهبودهای مشاهده شده به دلیل ارتعاشات امواج صوتی است یا گرما است.

ابرنزو و جانسون (۱۹۹۴) مرور جامعی از مهمترین پیشرفت‌های تحریک ارتعاشات سیسمیک (در ایالات متحده آمریکا و روسیه را) فراهم کردند. آنها مشاهده نمودند هنگامی که یک موج مرتعش (با طول موج بالا) از میان شکاف‌های محیط‌های متخلخل عبور کند، رزونانس و ویسکوالاستیک داخلی و ارتعاشات موج مرتعش صوتی، موج‌های پراکنده در بسامدهای مختلف التراسونیک در داخل مخزن تولید می‌کند. که نوسانات التراسونیک منجر به توزیع فازهای سیال در محیط‌های متخلخل می‌شود که این پدیده دگرگونی محلی در نفوذ پذیری سنگ‌ها را به وجود می‌آورد. اعتقاد بر این است که این فرایند یکی از مکانیزم‌هایی است که انرژی صوتی را در بین محیط متخلخل پراکنده می‌کند، دگرگونی محلی نفوذپذیری مانع بزرگی در انتقال کلی انرژی می‌شود. [۲]

اما تاکنون دانشمندان نتوانسته‌اند به هیچ مدل قابل اعتمادی که به توان بوسیله آن مقدار و پراکندگی انرژی را در طول گسترش امواج التراسونیک در محیط‌های متخلخل پیش بینی کند دست یابند.

حمیدا و باباداگلی (۲۰۰۷) اثر امواج صوتی را بر روی فرایند آشام موئینگی آب در ماسه سنگ اشباع شده توسط نفت و سنگ آهک ایندینا مورد مطالعه قرار دادند. [۲]

آنها به این نتیجه رسیدند که تابش امواج صوتی، جذب آشام موئین نفت را برای سیالات مختلف افزایش می‌دهد و میزان آن به کشش سطحی و تراکم مایعات وابسته است.

همچنین گزارش دادند که ترشوندگی با امواج صوتی تغییر نمی یابد و امواج التراسونیک، بر روی نیروی موئینگی در محیط متخلخل تاثیر گذار است که باعث تغییری قابل قبول در شکل لایه بین دو سیال غیر قابل امتزاج می شود. [۱]

در یک مطالعه دیگر (حمیدا و باباداگلی (۲۰۰۵)) به بررسی قابلیت امواج صوتی بر حل مواد فعال سطح و کاهش کشش سطحی مواد فعال سطح پرداختند. [۲]

آنها همچنین نشان دادند که ترشوندگی مایع به وسیله امواج التراسونیک افزایش می یابد. بنابراین به کار بردن امواج التراسونیک روی یک لوله موئین ممکن است نیروی موئینگی را افزایش دهد و خواص ترشوندگی لوله مرتعش را تغییر دهد. [۱]

اولین بار بایوت (۱۹۵۶) به صورت تئوری، به بررسی انتشار امواج صوتی - در محیط متخلخلی که با یک نوع سیال اشباع شده بود- در دو محدوده فرکانس (فرکانس پایین - فرکانس بالا) پرداخت. او اثر امواج صوتی را به صورت نیرویی که باعث اعمال تنش و کرنش بر سنگ و سیال در نظر گرفت؛ از تلفیق تنش و کرنش وارده بر محیط می توان به معادلاتی دست یافت که حرکت سیالی که محیط متخلخل بوسیله آن اشباع شده است را بیان کرد. این جابجایی در اثر نیرویی که امواج صوتی بر محیط وارد می کند روی می دهد.

بایوت به این نتیجه رسید که برای محیط متخلخلی که بوسیله تک سیال اشباع شده است می توان انتشار دو نوع موج را در محیط فرض کرد که از آنها به عنوان موج های انتشاری و چرخشی نام برده شده است.

بعد از بایوت، سانتوس (۱۹۸۹) به بررسی انتشار امواج صوتی در محیط متخلخل اشباع شده با دو سیال امتزاج پذیر پرداخت و دریافت که در سیستمی به این حال می توان چهار نوع موج را در هنگام انتشار در محیط متخلخل فرض کرد و اشاره کرد که سه نوع اول موج های انتشاری و نوع آخر موج چرخشی است.

فصل ۲

بررسی مکانیک سیستم

سیستم مورد بررسی را محیط متخلخلی در نظر بگیرید که کاملاً بوسیله سیالات آب و نفت اشباع شده است. (سیالات در این سیستم در حال تعادل هستند)

سیستم در معرض تابش امواج صوتی با فرکانس مشخص قرار گرفته و فرض کنید که انرژی امواج صوتی به آن انتقال می یابد. اگر در اثر اعمال این انرژی به سیستم، سیالات از حالت تعادل خارج شده و شروع به حرکت کنند؛ برای تحلیل حرکت سیالات موجود به معادلات حرکت آنها نیازمندیم. همانطور که می دانید یکی از روش های بدست آوردن معادله ی حرکت در هر سیستم مکانیکی، نوشتن لاگرانژی برای سیستم مفروض می باشد. باید توجه کرد برای بیان لاگرانژی در سیستم هایی که در آنها اتلاف انرژی مشاهده می شود به تابع اتلاف^۱ انرژی نیز نیازمندیم. برای محاسبه لاگرانژی سیستم، محاسبه انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی، تابع اتلاف سیستم (به علت وجود بعضی از خصوصیات ذاتی سیستم مورد بررسی در این پایان نامه، مقداری انرژی در سیستم اتلاف می گردد) مطلوب است.

برای بیان ماده موجود در هر کدام از سیستم های سیال و محیط متخلخل (جامد) و همچنین چگونگی رفتار سیال در محیط متخلخل به تعریف پارامترهایی همچون تخلخل^۲، اشباع^۳ و ترشوندگی^۴ نیازمندیم.

تخلخل

dissipation function^۱

porosity^۲

saturation^۳

wettability^۴

تخلخل یکی از خصوصیات سنگ ها و خاک هاست که با ϕ نمایش داده می شود. تخلخل یک سنگ عبارت است از میزان گنجایش (فضای خالی) یک سنگ که می تواند سیالات را در خود نگه دارد. بصورت کمی، تخلخل را می توان به عنوان نسبت حجم فضای خالی به حجم کل سنگ تعریف نمود.

در یک سنگ، برخی از فضاهای خالی به صورت پیوسته و مرتبط به هم و برخی دیگر به صورت مجزا وجود دارند. بر اساس نوع ارتباط فضاهای خالی با هم، تخلخل را به دو دسته تقسیم می کنند:

• ^۵تخلخل مطلق

تخلخل مطلق به عنوان نسبت کل فضاهای خالی یک سنگ به حجم کل سنگ تعریف می شود. یک سنگ ممکن است دارای میزان تخلخل مطلق قابل توجهی باشد ولی توانایی هدایت و خارج نمودن سیال از فضای خالی خود را نداشته باشد. در مخازن نفت میزان این پارامتر تأثیر فراوانی بر کیفیت مخزن خواهد داشت به طوری که مخازنی که درجه تخلخل آنها کمتر از 5% بوده قابل اغماض و درجه بالای 20% بسیار عالی هستند مقدار تخلخل مطلق به صورت:

$$\phi_a = \frac{\text{حجم کل فضای خالی سنگ}}{\text{حجم کل فضای سنگ}}$$

• ^۶تخلخل موثر

تخلخل موثر به صورت نسبت حجم فضاهای خالی به هم پیوسته به حجم کل سنگ تعریف می شود:

$$\phi_e = \frac{\text{حجم کل فضای بهم پیوسته خالی سنگ}}{\text{حجم کل فضای سنگ}}$$

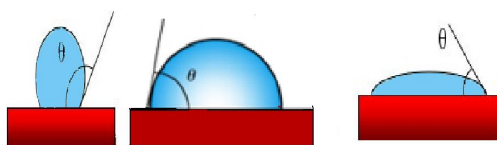
در محاسبات مهندسی مخازن، معمولاً از تخلخل موثر استفاده می شود، زیرا این تخلخل بیانگر فضاهایی از سنگ است که حاوی هیدروکربن قابل تولید باشد.

ترشوندگی

absolute Porosity ^۵

effect porosity ^۶

عبارت است از میزان تمایلی که یک سیال برای پخش شدن و چسبیدن به یک سطح جامد (در حضور سیالات غیر قابل امتزاج پذیر^۷ دیگر) از خود نشان می دهد. مفهوم ترشوندگی در شکل ۳۱.۴ نشان داده شده است. این شکل نشان می دهد که سه قطره از سه مایع متفاوت جیوه، نفت، آب بر روی یک صفحه شیشه ای قرار داده شده اند. اگر از یک زاویه یکسان به نحوه پخش شدن این سه قطره



شکل ۱.۲: تعریف ترشوندگی سیالات

بنگریم، مشاهده می کنیم که بر روی این سطح شیشه ای، قطره ی جیوه ی بصورت کره ای، قطره نفت به صورت نیم کره ای و قطره آب تقریباً بصورت کامل پخش شده اند. این نشان می دهد که بر روی این سطح شیشه ای، قابلیت ترشوندگی آب بیشتر می باشد.

تمایل یک سیال برای پخش شدن بر روی سطح جامد مهمترین مشخصه سیال می باشد. تمایل پخش شونده را می توان با اندازه گیری زاویه تماس سیال- جامد مشخص نمود. همانطور که در شکل نشان داده شده است، با افزایش قابلیت ترشوندگی، زاویه تماس کاهش می یابد. همچنین، در حالت ترشوندگی کامل مقدار این زاویه صفر و در حالت ناترشوندگی کامل^۸ مقدار این زاویه 180° خواهد شد.

برای حالت ترشوندگی متوسط تعاریف مختلفی وجود دارد، ولی اغلب محققین زاویه بین 60° تا 90° درجه را برای این حالت در نظر گرفته اند. ترشوندگی سنگ مخزن نسبت به سیالات مختلف بسیار حائز اهمیت است، زیرا نحوه توزیع سیالات موجود در خلل و فرج سنگ مخزن تابعی از ترشوندگی می باشد. بدلیل وجود نیروهای جاذبه، فاز تر تمایل دارد که خلل و فرج کوچک سنگ را اشغال کند ولی تمایل فاز ناتر به اشغال خلل و فرج بزرگتر می باشد.

اشباع

immiscible fluid^۷

nonwetting^۸

عبارت است از درصد یا کسری از حجم فضای خالی سنگ که بوسیله آن سیال (نفت، گاز یا آب) اشغال شده است. بصورت ریاضی این خاصیت را می توان چنین تعریف کرد:

$$\text{اشباع سیال} = \frac{\text{حجم کل سیال موجود در سنگ}}{\text{حجم فضای خالی سنگ}}$$

چنانچه همه حجم فضای خالی یک سنگ از سیال یا سیالات پر شده باشد، اشباع آن سیال یا مجموع اشباع سیالات در این سنگ ۱۰۰ خواهد بود. در واقع اگر اشباع سیالات به صورت کسری بیان شود:

$$\sum_{i=1}^n S_i = 1 \quad n = \text{تعداد سیالات}$$

• ^۹ اشباع بحرانی سیال

اگر سیالی در یک محیط متخلخل در نظر بگیرید، سیال هنگامی شروع به جریان یافتن می کند که مقدار اشباع آن از یک مقدار اشباع مخصوص که به آن اشباع بحرانی می گویند بیشتر شود. در این اشباع مخصوص، سیال در خلل و فرج محیط متخلخل بدون حرکت باقی خواهد ماند.

• ^{۱۰} اشباع سیال باقیمانده

هنگامی که فرایند جابجایی سیال در داخل محیط متخلخل به دلایلی همچون تزریق سیال دیگر به محیط انجام می گیرد، کل سیال اولیه موجود در محیط متخلخل جابجا نخواهد شد بلکه قسمتی از آن در خلل و فرج باقی خواهد ماند که به آن نفت باقی مانده و به میزان اشباع آن اشباع سیال باقیمانده می گویند. این مفهوم در مواقعی که یک فاز ناتر به وسیله یک فاز تر جابجا می شود معنای بیشتری می یابد.

^۹ critical saturation

^{۱۰} residual fluid saturation

۱.۲ انرژی پتانسیل

برای بدست آوردن تابع پتانسیل سیستم، حجم محدود Ω از سیستم را با مرز $\partial\Omega$ در نظر بگیرید که شامل خصوصیات کل سیستم می باشد.^{۱۱}

، نفت ، آب را به ترتیب در Ω نشان می دهد. جابجایی جامد، نفت و آب را در حالت تعادل اولیه به ترتیب به صورت \tilde{u}^s ، \tilde{u}^o ، \tilde{u}^w نشان می دهیم و در حالت کلی خواهیم داشت :

$$\tilde{u}^\theta = \tilde{u}^{\theta,T} - \bar{u}^\theta, \quad \theta = w, o$$

$$u^s = u^{s,T} - \bar{u}^s$$

سیستم در معرض تابش امواج صوتی قرار گرفته است و تنش یا انرژی وارده بر سیستم از طرف امواج صوتی در محیط متخلخل (قسمت جامد سیستم) به صورت تنش و در سیالات سیستم به صورت فشار وارده بر سیالات نمایان می گردد.

تانسور تنش کل به صورت $\tau_{ij} = \bar{\tau}_{ij} + \Delta \tau_{ij}$ و تانسور تنش وارده بر قسمت جامد سیستم (محیط متخلخل) به صورت $\sigma_{ij} = \bar{\sigma}_{ij} + \Delta \sigma_{ij}$ نشان داده می شود. $\Delta \tau_{ij}$ و $\Delta \sigma_{ij}$ بیانگر تغییرات تنش از حالت تعادل اولیه است. فشار وارده بر قسمت سیالات را به صورت زیر در سیستم بیان می کنند:

$$\sigma_\theta = -\phi S_\theta P_\theta, \quad \sigma = \sigma_o + \sigma_w \quad \theta = o, w$$

و در حالت کلی تانسور تنش در سیستم را به صورت زیر بیان می شود:

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij} \sigma \quad (۱.۱.۲)$$

تغییرات فشار سیالات از فشار در حالت تعادل اولیه را نیز به صورت $P_o = \bar{P}_o + \Delta P_o$ و $P_w = \bar{P}_w + \Delta P_w$ نمایش داده که به وسیله این تغییر فشار می توان به معرفی مشخصه مهم سیستم، یعنی

^{۱۱} سیستم را هموردا فرض شده است

اثر موئینگی پرداخت:

$$\begin{aligned} P_c &= P_c(S_o) = (\bar{P}_o + \Delta P_o) - (\bar{P}_w + \Delta P_w) \\ &= P_c(\bar{S}_o) + \Delta P_o - \Delta P_w \geq 0 \end{aligned}$$

P_c فقط به میزان اشباع نفت \bar{S}_o (اشباع در حالت تعادل اولیه است) بستگی دارد. با حفظ کلیت مسئله می توان فرض کرد که $\bar{P}_w = 0$ است و سپس با توجه به رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \bar{P}_o &= P_c(\bar{S}_o) \\ \Delta P_c &= \Delta P_o - \Delta P_w, & (2.1.2) \\ \Delta S_\theta &= S_\theta - \bar{S}_\theta, \quad \theta = o, w \end{aligned}$$

با صرفه نظر کردن از مشتق مرتبه دوم ΔS_θ خواهیم داشت:

$$\Delta P_c = P'_c(\bar{S}_o) \Delta S_\theta \quad (3.1.2)$$

در حال تعادل اولیه، حجم Ω از سیستم تحت تاثیر نیروی سطحی $\bar{f}_i^\theta, (\theta = o, w)$ قرار گرفته که \bar{f}_i^θ که نشان دهنده نیروی وارده بر θ -آمین ماده است که باعث تغییر حجم $\partial\Omega$ در واحد سطح می شود. (در اینجا از نیروی گرانشی صرف نظر شده است)

$$\begin{aligned} \bar{f}_i^o &= -\phi \bar{S}_o \bar{P}_o \delta_{ij} v_j \\ \bar{f}_i^w &= -\phi \bar{S}_w \bar{P}_w \delta_{ij} v_j = 0 \\ \bar{f}_i^s &= \bar{\sigma}_{ij} v_j, \theta = w, o \end{aligned}$$

نیروی سطحی f_i^θ را به سیستم مرجع \bar{f}_i^θ طوری وارد می کنیم که حجم Ω تحت تاثیر این نیروهای سطحی در حالت تعادل باشد.

$$\bar{f}_i^{\theta,T} = \bar{f}_i^\theta + f_i^\theta, \quad \theta = s, o, w \quad (*)$$

از آنجایی که سیالات در حالت تعادل ساکن اند، فشار سیال در Ω ثابت است از این رو: ^{۱۲}

$$\begin{aligned}\nabla P_o &= \frac{\partial P_o}{\partial x_j} = 0, & \nabla P_w &= 0 \\ \nabla \bar{P}_o &= \nabla \bar{P}_w = 0\end{aligned}\quad (۴.۱.۲)$$

و تنش کل در حالت تعادل به صورت زیر بیان می گردد:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \tau &= \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \\ \nabla \cdot \bar{\tau} &= 0\end{aligned}\quad (۵.۱.۲)$$

انرژی پتانسیل در کل سیستم را می توان به دو بخش انرژی نیروهای سطحی و انرژی کرنش

به صورت زیر تعریف نمود: $W^* = W^*(\Delta \tau_{ij}, \Delta P_o, \Delta P_w, \Delta P_c)$

$$V^* = \int_{\Omega} W^* dx - \int_{\partial\Omega} (f_i^s u_i^s + f_i^o \tilde{u}_i^o + f_i^w \tilde{u}_i^w) d\sigma$$

با توجه به قضیه انرژی [۱۸]، انرژی پتانسیل کل باید

- حالت تعمیم یافته ای از همه تانسورهای مسئله باشد
- اکسترمم (مینیموم) باشد
- شرایط تعادل ۴.۱.۲ و ۵.۱.۲ و شرایط محدود ۲.۱.۲ در مسئله نیز ارضا کند.

^{۱۲} با توجه به رابطه $P_c = P_c(\bar{S}_o) + \Delta P_o - \Delta P_w \geq 0$ و رابطه ۴.۱.۲ و این نکته که در حالت تعادل اولیه $\Delta P_o = \Delta P_w = 0$ است.

$$P'_c(\bar{S}_o) \nabla \bar{S}_o = \nabla \bar{P}_o - \nabla \bar{P}_w = 0$$

و از آنجایی که همیشه $P'_c > 0$ است نتیجه می گیریم، که:

$$\nabla \bar{S}_o = 0$$

رابطه $\nabla \bar{S}_o = 0$ به فرض غیر تراکمی در نظر گرفتن نفت در مسئله اشاره دارد

از آنجایی که شرط ۲.۱.۲ بر سیستم اعمال می شود برای اکستریم شدن تابع پتانسیل از تعریف لاگرانژی چندگانه استفاده می کنیم

$$J = V^* + \int_{\Omega} \lambda (\nabla P_o - \nabla P_w - \nabla P_c) dx$$

آنگاه جمله انرژی کل به صورت زیر نمایش داده می شود

$$\begin{aligned} \delta J = & \int_{\Omega} W^* dx + \int_{\Omega} [\delta \lambda (\nabla P_o - \nabla P_w - \nabla P_c) + \lambda (\delta \nabla P_o - \delta \nabla P_w - \delta \nabla P_c)] dx \\ & - \int_{\partial \Omega} (f_i^s u_i^s + f_i^o \tilde{u}_i^o + f_i^w \tilde{u}_i^w) d\sigma = 0 \end{aligned}$$

(۶.۱.۲)

که معادله

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W^* dx = & \int_{\partial \Omega} (f_i^s u_i^s + f_i^o \tilde{u}_i^o + f_i^w \tilde{u}_i^w) d\sigma - \int_{\Omega} \{ \delta \lambda (\nabla P_o - \nabla P_w - \nabla P_c) \\ & + \lambda (\delta \nabla P_o - \delta \nabla P_w - \delta \nabla P_c) \} dx \end{aligned}$$

نشان دهنده کار مجازی سیستم است. با استفاده از رابطه های ۲.۱.۲ ، ۳.۱.۲ و صرفنظر کردن از مشتق مرتبه دوم خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_i^{o,T} &= -\phi S_o P_o \delta_{ij} v_j = -\phi (\bar{S}_o + \Delta S_o) (\bar{P}_o + \Delta P_o) \delta_{ij} v_j \\ &\cong -\phi \bar{S}_o \bar{P}_o \delta_{ij} v_j - \phi (\bar{S}_o \Delta P_o + \bar{P}_o \Delta S_o) \delta_{ij} v_j \\ &= \bar{f}_i^o - \phi \left(\bar{S}_o \Delta P_o + \left[P_c (\bar{S}_o) / P'_c (\bar{S}_o) \right] \nabla P_c \right) \delta_{ij} v_j \end{aligned}$$

(۷.۱.۲)

$$\begin{aligned}
f_i^{w,T} &= -\phi S_w P_w \delta_{ij} v_j \\
&\cong \bar{f}_i^w - \phi \bar{S}_w \bar{P}_w \delta_{ij} v_j
\end{aligned}$$

به طور مشابه، با استفاده از رابطه های ۱.۱.۲ و ۳.۱.۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
f_i^{s,T} &= \sigma_{ij} v_j = [\tau_{ij} + \delta_{ij} \phi (S_o P_o + S_w P_w)] v_j \\
&\cong [\Delta \tau_{ij} + \bar{\delta}_{ij} \delta (\bar{S}_o \Delta P_o + \bar{S}_w \Delta P_w + \bar{P}_o \Delta S_o)] v_j \\
&\quad + (\bar{\tau}_{ij} + \delta_{ij} \phi \bar{S}_o \bar{P}_o) v_j \\
&= \bar{f}_i^s + \{ \bar{\delta}_{ij} \delta (\bar{S}_o \Delta P_o + \bar{S}_w \Delta P_w + [P_c (\bar{S}_o) / P'_c (\bar{S}_o)]) \nabla P_c \} v_j
\end{aligned} \tag{۸.۱.۲}$$

با قرار دادن رابطه $\beta = P_c (\bar{S}_o) / P'_c (\bar{S}_o)$ در رابطه های بالا و با توجه به رابطه (*) خواهیم

داشت:

$$\begin{aligned}
\delta f_i^o &= -\phi (\bar{S}_o \delta \Delta P_o + \beta \delta \Delta P_c) \delta_{ij} v_j \\
\delta f_i^w &= -\phi \bar{S}_w \delta \Delta P_w \delta_{ij} v_j \\
\delta f_i^s &= [\delta \Delta \tau_{ij} + \delta_{ij} \phi (\bar{S}_o \delta \Delta P_o + \bar{S}_w \delta \Delta P_w + \beta \delta \Delta P_c)] v_j
\end{aligned}$$

با جای گذاری روابط بالا در رابطه ۶.۱.۲ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\delta J &= \int_{\Omega} W^* dx + \int_{\Omega} \{ [\delta \lambda (\nabla P_o - \nabla P_w - \nabla P_c) + \lambda (\delta \nabla P_o - \delta \nabla P_w - \delta \nabla P_c)] \} dx \\
&\quad + \int_{\partial \Omega} [u_i^s \delta \Delta \tau_{ij} v_j - \tilde{u}_i^o \bar{S}_o \delta \Delta P_o \delta_{ij} v_j - \tilde{u}_i^w \bar{S}_w \delta \Delta P_w \delta_{ij} v_j - \tilde{u}_i^o \beta \delta \Delta P_c \delta_{ij} v_j] d\sigma \\
&= 0
\end{aligned} \tag{۹.۱.۲}$$

در رابطه بالا، u^o و u^w به ترتیب جابه جایی نسبی آب و نفت نسبت به جامد است که به صورت زیر

تعریف شده است.

$$u^o = \phi(\tilde{u}^o - u^s)$$

$$u^w = \phi(\tilde{u}^w - u^s)$$

همچنین تانسور کرنش بخش جامد به صورت $\epsilon_{ij}(u^s) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^s}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^s}{\partial x_i} \right)$ و بخش سیالات به صورت $\zeta^\theta = -\nabla \cdot u^\theta, \theta = o, w$ در حجم Ω از سیستم تعریف می شوند.^{۱۳}

همانطور که قبلاً ذکر شد، از آنجا که حجم Ω از سیستم بعد از تأثیر نیروهای سطحی f_i^θ در حالت تعادل است؛ تنش های مجازی $\delta \Delta P_o, \delta \Delta P_w, \delta \Delta P_c$ در سیستم باید شروط تعادل ۵.۱.۲، ۴.۱.۲ را ارضاء کند به طوری که:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \Delta \tau_{ij} = 0 \quad \nabla(\delta \Delta P_o) = \nabla(\delta \Delta P_w) = 0 \\ \nabla(\delta \Delta P_c) = 0 \end{aligned} \quad (۱۰.۱.۲)$$

با اعمال قانون انتگرالی گاوس و تبدیل انتگرال سطحی در مسئله به انتگرال خطی رابطه ی ۹.۱.۲ به صورت زیر بازنویسی می کنیم:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\Omega} W^* dx - \int_{\Omega} \epsilon_{ij} \delta \Delta \tau_{ij} + (\bar{S}_w \zeta^w + \lambda) \delta \Delta P_o + (\bar{S}_o \zeta^o - \lambda) \delta \Delta P_w + \\ + (\Delta P_o - \Delta P_w - \Delta P_c) \delta \Delta P_c + (\Delta P_o - \Delta P_w - \Delta P_c) \delta \lambda + u_i^s \frac{\partial}{\partial x_j} \delta \Delta \tau_{ij} \\ - \tilde{u}_i^o \frac{\partial}{\partial x_j} (\delta \Delta P_o + \beta \delta \Delta P_{oc}) \delta \Delta P_o - \tilde{u}_i^w \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{S}_w \delta \Delta P_w) dx = 0 \end{aligned}$$

اگر شرایط تعادل ۱۰.۱.۲ را به رابطه بالا اعمال کنیم، با توجه به رابطه $\nabla \bar{S}_o = 0$ می توان رابطه بالا را بصورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \delta J = \int_{\Omega} W^* dx - \int_{\Omega} [\epsilon_{ij} \delta \Delta \tau_{ij} + (\bar{S}_w \zeta^w - \lambda) \delta \Delta P_o \\ + (\bar{S}_o \zeta^o + \lambda) \delta \Delta P_w + (\beta \zeta^o + \lambda) \delta \Delta P_c + (\Delta P_o - \Delta P_w - \Delta P_c) \delta \lambda] dx \end{aligned}$$

^{۱۳} در نمونه ی که دارای تخلخل یکنواخت است میزان سیال جابجا شده مانند نفت را از یک وجه ی مانند F از مکعب Q (با حجم Ω از حجم ماده) را به صورت $\int_F \varphi S_o \tilde{u}^o \cdot v d\sigma$ نشان می دهند. v بردار واحد عمود بر سطح ϕ و ϕ تخلخل موثر محیط و $d\sigma$ سطح اندازه گیری شده در سطح S است. مقدار سیال خارج شده از یک وجه مکعب را بوسیله $\bar{S}_o \zeta^o, \bar{S}_w \zeta^w$ اندازه گیری می کنند.

$$\equiv \int_{\Omega} \delta F (\Delta \tau_{ij}, \Delta P_o, \Delta P_w, \Delta P_c, \lambda) dx = 0$$

با توجه به این نکته که، δF باید تابع دیفرانسیلی دقیقی از متغیرهای تعمیم یافته مسئله (تنش های تعمیم یافته) $\Delta \tau_{ij}, \Delta P_o, \Delta P_w, \Delta P_c$ و λ باشد، δW^* یا dW^* نیز معادله دیفرانسیلی دقیقی از تنش های تعمیم یافته سیستم است. پس با توجه به رابطه بالا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \Delta \tau_{ij}} &= \frac{\partial W^*}{\partial \Delta \tau_{ij}} - \varepsilon_{ij} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \Delta P_o} &= \frac{\partial W^*}{\partial \Delta P_o} - \bar{S}_o \zeta^o + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \Delta P_w} &= \frac{\partial W^*}{\partial \Delta P_w} - \bar{S}_w \zeta^w - \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \Delta P_c} &= \frac{\partial W^*}{\partial \Delta P_c} - \beta \zeta^o + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= \Delta P_o - \Delta P_w - \Delta P_c = 0 \end{aligned}$$

(۱۱.۱.۲)

بنابراین

$$\delta W^* = \varepsilon_{ij} \Delta \tau_{ij} + (\bar{S}_o \zeta^o - \lambda) \delta \Delta P_o + (\bar{S}_w \zeta^w + \lambda) \delta \Delta P_w + (\beta \zeta^o + \lambda) \delta \Delta P_c$$

(۱۲.۱.۲)

از آنجایی که δW^* دیفرانسیل دقیق است روابط زیر می توانند برقرار باشند:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W^*}{\partial \Delta \tau_{ij} \partial \Delta \tau_{kl}} &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial \Delta \tau_{kl} \partial \Delta \tau_{ij}} \\ \frac{\partial^2 W^*}{\partial \Delta \tau_{ij} \partial \Delta P_{\theta}} &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial \Delta P_{\theta} \partial \Delta \tau_{ij}}, & \theta = o, w, c \\ \frac{\partial^2 W^*}{\partial \Delta P_{\alpha} \partial \Delta P_{\theta}} &= \frac{\partial^2 W^*}{\partial \Delta P_{\theta} \partial \Delta P_{\alpha}}, & \alpha, \theta = o, w, c, \alpha \neq \theta \end{aligned}$$