وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

دانشگاه دامغان
دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر

پایان‌نامه کارشناسی ارشد
ریاضی محض

مروری بر اثبات‌های مختلف از قضیه بورسوک-اولام

توسط:
ابوالفضل ایرجی‌پور

استاد راهنما:
دکتر سید علی تقوی

استاد مشاور:
دکتر محمد ابری

شهریور ۱۳۹۱

بسم الله الرحمن الرحیم

به نام خدا

مروری بر اثبات‌های مختلف از قضیه بورسوک-اولام

توسط:

ابوالفضل ایرجی‌پور

پایان‌نامه

ارائه شده به تحصیلات تکمیلی دانشگاه به عنوان بخشی از فعالیت‌های تحصیلی لازم برای اخذ درجه کارشناسی ارشد

در رشته

ریاضی محض

از دانشگاه دامغان

ارزیابی و تأیید شده توسط کمیته پایان‌نامه با درجه:

دکتر سید علی تقوی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز-هندسه دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد راهنما)

دکتر محمد ابری استادیار ریاضی محض گرایش توپولوژی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (استاد مشاور)

دکتر سید امین اصفهانی استادیار ریاضی محض گرایش سیستم‌های دینامیکی دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور اول)

دکتر محمد رمضانپور استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (داور دوم)

دکتر نرگس تولایی استادیار ریاضی محض گرایش آنالیز هارمونیک دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر دانشگاه دامغان (نماینده تحصیلات تکمیلی)

شهریور ۱۳۹۱

تقدیم به

تقدیم با بوسه بر دستان پدرم:

به او که نمی دانم از بزرگی اش بگویم یا مردانگی، سخاوت، سکوت، مهربانی و . . .

پدرم، از تو هرچه می گویم باز هم کم می آورم

اکنون حاصل دستان خسته ات رمز موفقیتم شد

تقدیم به مادر عزیزتر از جانم:

مادرم، آنکه آفتاب مهرش در آستانه قلبم همچنان پابرجاست و هرگز غروب نخواهد کرد

وای مادرم، عمری خستگی ها را به جان خریدی تا اکنون توانستی طعم خوش پیروزی را به من بچشانی

تقدیم به برادران و خواهر عزیزم که:

لحظات ناب باور بودن، لذت و غرور دانستن، جسارت خواستن، عظمت رسیدن و تمام تجربه های یکتا و زیبای زندگیم، مدیون حضور سبز آنهاست

سپاسگزاری

خداوند متعال را شاکرم که این توفیق را نصیب من نمود تا بتوانم این پایان نامه را به پایان برسانم.

در اینجا بر خود لازم می دانم از استاد عزیزم جناب آقای دکتر سید علی تقوی به عنوان استاد راهنما، و جناب آقای دکتر محمد ابری به عنوان استاد مشاور، که با راهنمایی های خود باعث فراهم آوردن فرصتی جهت تحقیق در این زمینه شدند و با صبر و حوصله بسیار مرا در این مسیر هدایت فرمودند، خاضعانه سپاسگزاری نمایم.

از اساتید محترم، جناب آقای دکتر امین اصفهانی و جناب آقای دکتر محمد رمضان پور که زحمت مطالعه و داوری این پایان نامه را بر عهده داشته اند، تشکر و قدردانی می نمایم.

و از تمام کسانی که در این راه مرا یاری نموده اند قدردانی کرده و برایشان آرزوی موفقیت می کنم.

چکیده

مروری بر اثبات‌های مختلف از قضیه بورسوک-اولام

به وسیله‌ی:
ابوالفضل ایرجی‌پور

قضیه تاریخی بورسوک-اولام از اهمیت خاصی درتوپولوژی عمومی و همچنین توپولوژی جبری برخوردار است. این قضیه در کلی‌ترین فرم خود می‌گوید که هر تابع پیوسته $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ لااقل دو نقطه متقاطر را به یک مقدار می‌نگارد. اولین صورت این قضیه در سال ۱۹۳۰ توسط لیسترنیک [۱] در مرجع $Lyusternik, L., Shnirel'man, S.(۱۹۳۰)$.*Topological Methods in Variational Problems*. پیشنهاد گردید. و اولین اثبات کامل از این قضیه توسط کارول بورسوک [۲] درسال ۱۹۳۳ ارائه گردید و در مرجع $Borsuk, K.(۱۹۳۳)."DreiStzeberdien-dimensionaleeuklidischeSphre."$ به چاپ رسید. پس از این اثبات، تاکنون اثبات‌های متعددی به روش‌های مختلف که اغلب ماهیت توپولوژی جبری دارند، ارائه گردیده است. در این پایان نامه دو اثبات اساسی از این قضیه به طور دقیق بررسی و شکافته می‌گردد. اولین اثبات از مفهوم درجه استفاده می‌کند، و دومین اثبات که ماهیتی پیشرفته‌تر دارد و از حلقه‌های کوهمولوژی استفاده می‌کند.

[۱] Lyusternik

[۲] Karol Borsuk

فهرست مطالب

فهرست مطالب ه

۱ مقدمات توپولوژی جبری ۲

۱-۱ گروه‌های بنیادی ۲

۲-۱ مجتمع حجره‌ای ۳

۳-۱ هموتوپی بین خم ها ۵

۴-۱ فضای پوششی ۸

۲ هومولوژی و محاسبه‌ی گروه‌های هومولوژی فضاهای افکنشی $\mathbb{R}P^n$ ۱۰

۱-۲ مقدمات هومولوژی ۱۰

۲-۲ هومولوژی سادکی ۱۲

۳-۲ هومولوژی تکین ۱۷

۴-۲ پایایی گروه‌های هومولوژی ۲۰

۵-۲ گروه‌های هومولوژی نسبی ۲۴

۶-۲ درجه(برای نگاشت‌های $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^n$) ۳۴

۷-۲ هومولوژی حجره‌ای ۴۲

۸-۲ دنباله‌های مایر-ویتُریس ۴۹

۹-۲ هومولوژی با ضرایب ۵۲

۳ کوهمولوژی ۵۷

۳-۱ گروه کوهمولوژی ... ۵۷
۳-۲ ساختار حلقوی H^* ... ۶۶

۴ محاسبه‌ی حلقه‌های کوهمولوژی $\mathbb{R}P^n$ و اثبات قضیه‌ی بورسوک اولام با نظریه همولوژی و کوهمولوژی ۷۰
۴-۱ محاسبه‌ی کوهمولوژی $\mathbb{R}P^n$ ... ۷۰
۴-۲ اثبات قضیه بورسوک اولام با نظریه همولوژی ... ۷۶
۴-۳ اثبات قضیه‌ی بورسوک اولام با نظریه کوهمولوژی ... ۸۰

مراجع ۸۳

واژه‌نامه فارسی به انگلیسی ۸۴

واژه‌نامه انگلیسی به فارسی ۸۶

پیشگفتار

قضیه بورسوک -اولام به دلیل داشتن اثبات‌های مختلف، کاربردهای جالب و متنوع و قضیه‌های هم ارز با آن یکی از مهمترین ابزار توپولوژی جبری است که در کلی‌ترین فرم خود می‌گوید که هر تابع پیوسته $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ لااقل دو نقطه متقاطر را به یک مقدار می‌نگارد. و در حالت پیشرفته‌تر آن بیان می‌کند هر نگاشت فرد از $\mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ درجه فرد دارد.
گزاره‌های هم ارز با قضیه بورسوک-اولام به این صورت است

- برای هر نگاشت فرد پیوسته $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$، $x \in \mathbb{S}^n$ به‌طوری‌که $f(x) = 0$.
- نگاشت متقاطر از $f : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ وجود ندارد.
- نگاشت پیوسته $f : B^n \longrightarrow \mathbb{S}^{n-1}$ وجود ندارد که روی مرز آن متقاطر باشد.

قضیه هام ساندویچ [۳] و نقطه ثابت بروئر [۴] از کاربردهای مهم قضیه بورسوک-اولام است ما در این پایان‌نامه با دیدگاه توپولوژی جبری به اثبات این قضیه می‌پردازیم.

[۳] Ham Sandwich

[۴] Brouwer fixed-point

فصل ۱

مقدمات توپولوژی جبری

۱-۱ گروه‌های بنیادی

تعریف ۱.۱.۱. فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند و f و g توابعی پیوسته از X به Y باشند در این صورت می‌گوییم f با g هموتوپ است، هرگاه تابع پیوسته‌ی $F : X \times I \longrightarrow Y$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $I = [۰, ۱]$ و

$$\begin{cases} \forall x \in X \quad F(x, ۰) = f(x) \\ \forall x \in X \quad F(x, ۱) = g(x). \end{cases}$$

قرارداد: برای هموتوپی دو تابع، نماد روبرو را به‌کار می‌بریم $f \overset{h}{\sim} g$

گزاره ۲.۱.۱. *هموتوپی یک رابطه‌ی هم ارزی روی مجموعه‌ی توابع تعریف می‌کند.*

تعریف ۳.۱.۱. نگاشت پیوسته $f : X \longrightarrow Y$ را هم ارز هموتوپی گوئیم هرگاه نگاشت پیوسته $g : Y \longrightarrow X$ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $gof \overset{h}{\sim} I_X$ و $fog \overset{h}{\sim} I_Y$. در این حالت گوئیم دو فضای X و Y هموتوپی از یک نوع دارند.

تعریف ۴.۱.۱. دو نگاشت پیوسته $f, g : X \longrightarrow Y$ نسبت به مجموعه $A \subset X$ را هموتوپ گوئیم هرگاه نگاشت پیوسته $F : X \times I \longrightarrow Y$ موجود باشد، به‌طوری‌که

$$\forall x \in X, F(x, ۰) = f(x), F(x, ۱) = g(x)$$

و دستور F در حین هموتوپی تعییر نکند یعنی

$$\forall a \in A, \forall t \in I \quad F(a,t) = f(a) = g(a)$$

در این حالت داریم

$$f \overset{relA}{\sim} g$$

تعریف ۵.۱.۱. X را انقباض‌پذیر گوییم هر گاه تابع همانی فضا با تابع ثابت $x_\circ$ هموتوپ باشد.

مثال ۶.۱.۱. فضاهای اقلیدسی $\mathbb{R}^m$ انقباض‌پذیرند. و اگر $U \subseteq \mathbb{R}^m$ محدب باشد، آن‌گاه U نیز انقباض‌پذیر است.

۱-۲ مجتمع حجره‌ای

با یک روند استقرایی مجتمع حجره‌ای تعریف می‌شود. ابتدا از یک مجموعه گسسته $X_\circ$ شروع می‌کنیم. فرض کنیم فضای X_{n-1} ساخته شده باشد. دیسک‌های D_α^n را روی مرزش به X_{n-1} می‌چسبانیم و بعد از چسباندن X_n بدست می‌آید.

$$\phi_\alpha : \partial D_\alpha^n = \mathbb{S}_\alpha^{n-1} \longrightarrow X_{n-1}$$

ϕ_α تابعی است پیوسته در این صورت روی $X_{n-1} \bigcup D_\alpha^n$ (اجتماع مجزا) رابطه هم ارزی زیر را تعریف می‌کنیم

$$x \in \partial D_\alpha^n \overset{\text{یکی کردن}}{\sim} \phi_\alpha(x) \in X_{n-1}$$
$$\Longrightarrow \frac{X_{n-1} \bigcup D_\alpha^n}{\sim} = X_n$$

اگر مراحل ساخت را در مرحله n ام قطع کنیم X_n آخرین X_n ای است که ساخته می‌شود $X = X_n$ و این یک فضای توپولوژیک است و اصطلاحاً یک مجتمع حجره‌ای متناهی نامیده می‌شود و اگر در هیچ مرحله‌ای متوقف نشویم و برای هر n، X_n ساخته شود قرار می‌دهیم

$$X = \bigcup_{n=\circ}^{\infty} X_n.$$

حال روی X، توپولوژی ضعیف را قرار می‌دهیم.
یعنی $u \subseteq X$ باز باشد $\Longleftrightarrow$ $u \cap X_n$ باز است.

$u \subseteq X$ بسته باشد $\Longleftrightarrow$ $u \cap X_n$ بسته است.
ساختار مجتمع حجره‌ای $\mathbb{R}P^n$ را بررسی می‌کنیم

$$\mathbb{R}P^n = \frac{\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}}{\sim}$$

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : x = \lambda y$$

داریم

$$\mathbb{R}P^n = \frac{D^n}{\sim} \begin{cases} x \sim -x (\text{یکی کردن}) \\ x \in \partial D^n \end{cases}$$

این دقیقاً مانند این است که یک دیسک D^n روی مرزش ($\mathbb{S}^{n-1}$) به $\mathbb{R}P^{n-1}$ توسط تابع ϕ چسبانده شود.

$$\phi : \mathbb{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$$

$$\phi(x) = [x]$$

به عبارتی $\frac{\mathbb{S}^{n-1}}{\sim} = \mathbb{R}P^{n-1}$ چون ضمن تعریف این رابطه‌ی هم ارزی علاوه بر این‌که درون دیسک D_n در سر جای خود قرار دارد مرز D_n توسط این رابطه به یک نسخه از $\mathbb{R}P^{n-1}$ چسبانده می‌شود.
در واقع درون D^n روی مرزش به $\mathbb{R}P^{n-1}$ چسبانده می‌شود.
بنابراین $\mathbb{R}P^n$ با چسبانیدن فقط یک حجره n بعدی e_n به $\mathbb{R}P^{n-1}$ بدست می‌آید و در نتیجه با فرآیند استقرا ساختار مجتمع حجره‌ای $\mathbb{R}P^n$ به‌صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbb{R}P^n = e^0 \bigcup e^1 \bigcup \ldots \bigcup e^n$$

ساختار مجتمع حجره‌ای $\mathbb{C}P^n$:

$$\mathbb{C}P^n = \frac{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}{\sim} \quad Z \sim W \Longleftrightarrow Z = \lambda W \quad ||\lambda|| = 1, \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}P^n = \frac{\mathbb{S}^{2n+1}}{\sim} \; x, y \in \mathbb{S}^{2n+1} \; x = \lambda y \; ||\lambda|| = 1 \; \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\mathbb{C}P^n = \frac{D^{2n}}{\sim} \quad x, y \in \partial D^{2n} \quad x \sim y \Longleftrightarrow x = \lambda y \; ||\lambda|| = 1 \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

$$D^{2n} = \{x \in \mathbb{R}^{2n} | \quad ||x|| \leq 1\}$$

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_{n+1}) \in \mathbb{S}^{2n+1} \Rightarrow |Z_1|^2 + |Z_2|^2 + \ldots + |Z_n|^2 + |Z_{n+1}|^2 = 1$$

فرض کنیم $Z_{n+1} > 0$ و حقیقی در واقع حداکثر یک کلاس $[Z_1, \ldots, Z_n, Z_{n+1}]$ وجود دارد که $Z_{n+1} > 0$ و با توجه به رابطه

$$|Z_1|^2 + |Z_2|^2 + \ldots + |Z_n|^2 + |Z_{n+1}|^2 = 1 \quad Z_{n+1} > 0$$

$$Z_{n+1} = \sqrt{1 - |Z_1|^2 + \ldots + |Z_n|^2}$$

بنابراین تعریف زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{cases} D^{2n} \longrightarrow \frac{\mathbb{S}^{2n+1}}{\sim} \\ (Z_1, \ldots, Z_n) \longrightarrow [Z_1, \ldots, Z_n, \sqrt{1 - \sum_{i=1}^{n} |Z_i|^2}] \end{cases}$$

f پوشاست و در درون D^{2n} یک به یک است و

$$f(y) = f(x) \quad \forall x, y \in \partial D^{2n} \Longleftrightarrow x = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{C}, ||\lambda|| = 1$$

در نتیجه

$$\frac{D^{2n}}{\sim} \xrightarrow{\tilde{f}} \frac{\mathbb{S}^{2n+1}}{\sim}$$

طبق نکته زیر یک به یک و پوشا و با وارون پیوسته است.
فرض کنید $g : X \longrightarrow Z$ نگاشتی پیوسته و پوشا باشد و X^* گردایه‌ای از زیر مجموعه‌های X باشد $X^* = \{g^{-1}(\{z\}) | z \in Z\}$، X^* را با توپولوژی خارج قسمتی در نظر می‌گیریم. در این صورت g نگاشت پیوسته و دو سویی $f : X^* \longrightarrow Z$ را القا می‌کند و این نگاشت همسانریختی است اگر و فقط اگر g نگاشتی خارج قسمتی باشد.
در نتیجه ساختار مجتمع حجره‌ای $\mathbb{C}P^n$ باچسباندن e^{2n} به $\mathbb{C}P^{n-2}$ بدست می‌آید.

$$\mathbb{C}P^{2n} = e^{\circ} \bigcup e^2 \bigcup \ldots \bigcup e^{2n}$$

۱-۳ هموتوپی بین خم ها

منظور از یک خم در فضای توپولوژیک X تابعی است پیوسته مانند $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$، اگر $\gamma(0) = x_0$ و $\gamma(1) = x_1$ اصطلاحاً می‌گوییم γ، x_0 را به x_1 وصل می‌کند و X را همبند کمانی گوییم هرگاه برای هر $x_0, x_1 \in X$ وجود داشته باشد تابع پیوسته‌ی $\gamma : [0, 1] \longrightarrow X$ به‌طوری‌که $\gamma(1) = x_1$ و $\gamma(0) = x_0$.

تعریف ۱.۳.۱. دو خم $\gamma_{\circ}$ و γ_{1} را که نقاط آغازین یکسان و پایانی یکسان دارند هموتوپ گویند، هرگاه تابع پیوسته‌ی

$$F : [\circ, 1] \times [\circ, 1] \longrightarrow X$$

وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $\forall s, t \in [\circ, 1]$

$$\begin{cases} F[\circ, s] = \gamma_{\circ}(s) \ \text{و} \ F[1, s] = \gamma_{1}(s) \\ F[t, \circ] = x_{\circ} \ \text{و} \ F[t, 1] = x_{1} \ \text{و} \ F[t, s] = \gamma_{t} \end{cases}$$

اصطلاحاً تعریف اخیر را می‌توان این‌گونه بیان کرد که یک هموتوپی γ_{1} از خم‌های واصل بین $x_{\circ}$ و x_{1} داریم. در واقع هموتوپ بودن دو خم $\gamma_{\circ}$ و γ_{1} به این مفهوم است که $\gamma_{\circ}$ و γ_{1} به‌عنوان موجوداتی در فضای خم‌های واصل از $x_{\circ}$ و x_{1} با کمانی به هم قابل وصل هستند.

گزاره ۲.۳.۱. *هموتوپی خم‌ها یک رابطه‌ی هم ارزی تعریف می‌کند.*

ترکیب خم‌ها: بطور کلی اگر γ یک خم از $x_{\circ}$ به x_{1} باشد و γ' یک خم از x_{1} به x_{2} باشد، ترکیب این دو خم را این‌گونه تعریف می‌کنیم

$$\gamma' * \gamma(s) = \begin{cases} \gamma(2s) & \circ \leqslant s \leqslant 1/2 \\ \gamma'(2s - 1) & 1/2 \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

بوضوح $\gamma' * \gamma$ یک خم پیوسته از $[\circ, 1]$ به X است که $x_{\circ}$ را به x_{2} وصل می‌کند.

حال فرض کنید X یک فضای توپولوژیک و $x_{\circ} \in X$ باشد، منظور از یک دور به پایه‌ی $x_{\circ}$ خمی پیوسته است که $x_{\circ}$ را به $x_{\circ}$ وصل می‌کند.

$L(X, x_{\circ})$ را مجموعه‌ی همه‌ی دورها به پایه‌ی $x_{\circ}$ در نظر می‌گیریم. بدیهی است که $L(X, x_{\circ})$ تحت عمل $(*)$ بسته است. اکنون روی $L(X, x_{\circ})$ رابطه‌ی هم ارزی هموتوپ بودن را در نظر می‌گیریم و مجموعه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی را مساوی $\pi_{1}(X, x_{\circ})$ قرار می‌دهیم در واقع

$$\pi_{1}(X, x_{\circ}) = \frac{L(X, x_{\circ})}{\sim}$$

به‌سادگی قابل بررسی است که عمل $(*)$ روی $\frac{L(X,x_{\circ})}{\sim}$ خوش تعریف است و لذا $\pi_{1}(X, x_{\circ})$ به $(*)$ مجهز می‌شود و یک گروه است.

قرارداد: اگر X همبند کمانی و $x_{\circ}$ یک نقطه‌ی دلخواه از X باشد آن‌گاه $\pi_{1}(X, x_{\circ})$ را به‌صورت $\pi_{1}(X)$ نمایش می‌دهیم $\pi_{1}(X, x_{\circ})$ را گروه هموتوپی مرتبه اول یا گروه بنیادی X در $x_{\circ}$ می‌گویند.

تعریف ۱.۳.۳. زیر مجموعه $A \subseteq X$ را **درون بر** X می‌نامند هر گاه نگاشتی پیوسته مانند $r : X \longrightarrow A$ چنان موجود باشد که $ri = I_A$، که در آن نگاشت $i : A \longrightarrow X$ نگاشت شمولیت است، به ازای هر a متعلق به A داریم $r(a) = a$، نگاشت r را **درون بری** می‌نامند.

تعریف ۱.۳.۴. زیر مجموعه $A \subseteq X$ را **درون بر دگردیسی** X می‌نامند هر گاه یک درون بری مانند $r : X \longrightarrow A$ چنان موجود باشد که $ir \simeq I_X$ که در آن نگاشت $i : A \longrightarrow X$ نگاشت شمول است.

به عبارت دیگر A **درون بر دگردیسی** X است هرگاه یک هموتوپی مانند $F : X \times I \longrightarrow X$ چنان موجود باشد که به ازای هر x متعلق به A داشته باشیم $F(x, ۰) = x$ و $F(x, ۰)$ متعلق به A باشد.

مثال ۱.۳.۵. اگر $S^۱ = \{z \mid |z| = ۱\} = A$ و $D = \{z \mid |z| \leqslant ۱\}$ و قرار دهیم $X = D - \{۰\}$ آن‌گاه A یک درون بر دگردیسی از X است.

$$\begin{cases} F : D - \{۰\} \times [۰, ۱] \longrightarrow D - \{۰\} \\ F(z, t) = t\frac{z}{|z|} + (۱ - t)z \end{cases}$$

ملاحظه ۱.۳.۶. اگر A یک درون بر دگردیسی از X باشد، آنگاه A یک درون بر از X است.

تعریف ۱.۳.۷. زیر مجموعه $A \subseteq X$ را **درون بر دگرگیسی قوی** X نامند هر گاه درون بری $r : X \longrightarrow A$ چنان موجود باشد که $ir \simeq I_x(relA)$ این تعریف معادل این است که، هر گاه هموتوپی مانند $F : X \times I \longrightarrow X$ چنان موجود باشد که:
به ازای هر x متعلق به X، $F(x, ۰) = x$ و به ازای هر $F(a) \in A$ و $t \in I$ داشته باشیم $F(a, t) = a$. به ازای هر $x \in X$، $F(x, ۱)$ متعلق به A باشد.

ملاحظه ۱.۳.۸. هر درون بر دگردیسی قوی، درون دگردیسی است.

مثال ۱.۳.۹. S^n درون بر دگردیسی قوی از $\mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}$ است.
نگاشت

$$\begin{cases} F : \mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\} \\ F(x, t) = (۱ - t)x + t\frac{x}{||x||} \qquad x \in \mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}, \;\; t \in I \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت نتیجه می‌گیریم S^n درون بر دگردیسی قوی $\mathbb{R}^{n+۱} - \{۰\}$ است.

تعریف ۱.۳.۱۰. فضای همبند راهی X را همبند ساده گویند هرگاه برای هر $x_۰ \in X$ ، $\pi_۱(X, x_۰)$ بدیهی باشد.

حال فرض کنید X همبند کمانی و $f : X \longrightarrow Y$ پیوسته باشد. f_* را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\begin{cases} f_* : \pi_۱(X) \longrightarrow \pi_۱(Y) \\ f_*[\gamma] = [fo\gamma] \end{cases}$$

نشان می‌دهیم $f_* : \pi_۱(X) \longrightarrow \pi_۱(Y)$ یک همریختی است. $\beta, \alpha \in \pi_۱(X)$

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(۲s) & ۰ \leq s \leq ۱/۲ \\ \beta(۲s - ۱) & ۱/۲ \leq s \leq ۱ \end{cases}$$

نشان می‌دهیم $f_*(\alpha * \beta) = f_*(\alpha) - f_*(\beta)$ یا معادلاً $fo(\alpha * \beta) = f\alpha * f\beta$

$$f(\alpha * \beta(s)) = f \begin{cases} \alpha(۲s) & ۰ \leq s \leq ۱/۲ \\ \beta(۲s - ۱) & ۱/۲ \leq s \leq ۱ \end{cases} = \begin{cases} f(\alpha(۲s)) ۰ \leq s \leq ۱/۲ \\ f(\beta(۲s - ۱)) & ۱/۲ \leq s \leq ۱ \end{cases}$$

$$= f(\alpha) * f(\beta)$$

۱-۴ فضای پوششی

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید X و $\widetilde{X}$ فضای توپولوژیک و همبند کمانی و نگاشت پیوسته و پوشای $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ مفروض باشد. این مجموعه را یک فضای پوششی می‌گوییم هرگاه برای هر $x \in X$ همسایگی U حول x وجود داشته باشد، به‌طوری‌که $p^{-۱}(U)$ برابر با اجتماع مجزائی از مجموعه‌های باز باشد. یعنی برای G_α باز

$$p^{-۱}(U) = \bigcup_{\alpha} G_\alpha.$$

و همچنین برای هر α، $U \approx G_\alpha$ یک همیومورفیسم باشد.

یک امر مهم در مورد فضاهای پوششی مسئله ترفیع است. یعنی اگر نمودار زیر وجود داشته باشد

$$\begin{tikzcd} & (\widetilde{X}, \widetilde{x}_۰) \arrow[d, "p"] \\ (Y, y_۰) \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (X, x_۰) \end{tikzcd} \qquad p\,\widetilde{f} \overset{?}{=} f$$

آن‌گاه آیا $\widetilde{f}$ ای وجود دارد به‌طوری‌که $p\,\widetilde{f}= f$ برقرار باشد. با انتخاب یک نقطه‌ی پایه‌ای می‌توان به سوال فوق جنبه‌های یگانگی را افزود. گزاره زیر در همین راستا است.

گزاره ۲.۴.۱. *فرض کنید فضای پوششی $p : (\widetilde{X}, \widetilde{x_\circ}) \longrightarrow (X, x_\circ)$ و یک نگاشت $f : (Y, y_\circ) \longrightarrow (X, x_\circ)$ مفروض باشد. به‌طوری‌که Y همبند کمانی و موضعاً همبند کمانی باشد آن‌گاه یک ترفیع $\widetilde{f}: (Y, y_\circ) \longrightarrow (\widetilde{X}, x_\circ)$ از f وجود دارد اگر و تنها اگر*

$$f_*(\pi_1(Y, y_\circ)) \subset p_*(\pi_1(\widetilde{X}, x_\circ)).$$

اثبات. ر.ک. [۲] $\square$

نکته ۱. $\pi_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}$

اثبات. ر.ک. [۲] $\square$

ملاحظه ۳.۴.۱. برای $n > 2$ داریم $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \approx \mathbb{Z}_2$.

اثبات. ایده این اثبات این است که نشان دهیم $p : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ یک فضای پوششی دو لایه است.

$$\begin{cases} p : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n \\ p(x) = [x] = [-x] \end{cases}$$

کلاس $[x]$ در $\mathbb{R}P^n$ انتخاب می‌کنیم بردار x در $\mathbb{S}^n$ را در نظر می‌گیریم، ابرصفحه قائم بر x، $\mathbb{S}^n$ را به دو نیمکره V_1 و V_2 تقسیم می‌کند. U را برابر با $p(V_1)$ و $p(V_2)$ قرار می‌دهیم. آن‌گاه داریم $p^{-1}(U) = V_1 \sqcup V_2$ که در آن $p : V_1 \longrightarrow U$ و $p : V_2 \longrightarrow U$ همیومورفیسم ایجاد می‌کند، پس $\mathbb{S}^n$ یک فضای پوششی دو لایه است. $\square$

فصل ۲

هومولوژی و محاسبه‌ی گروه‌های هومولوژی فضاهای افکنشی $\mathbb{R}P^n$

۲-۱ مقدمات هومولوژی

چون π_1 در مطالعات فضاهای توپولوژیک ابعاد بالاتر ناتوان است به عنوان مثال تمایز توپولوژیک S^n و S^m را وقتی $m, n > 1$ است متوجه نمی‌شویم از این رو به‌جای π_1 از ابزار دیگری مانند π_n برای $n > 1$ و هومولوژی و کوهمولوژی استفاده می‌شود که جایگزین مناسبی هستند. هومولوژی مهمترین نظریه درتوپولوژی جبری است و در این بین هومولوژی کاربرد ویژه‌ای دارد. ما ابتدا به معرفی نسخه‌ی ابتدایی هومولوژی تکین که هومولوژی سادکی نامیده می‌شود می‌پردازیم تا ابزارهای که در حالت کلی هومولوژی استفاده می‌شود در حالت ساده‌تر آن (هومولوژی سادکی) بررسی کنیم.
تعریف امروزی هومولوژی تکین اولین بار توسط ایلنبرگ [۱] درسال ۱۹۴۴ مطرح شد و مفهوم Δ -مجتمع در سال ۱۹۵۰ توسط ایلنبرگ-زیلبر [۲] ارائه گردید.

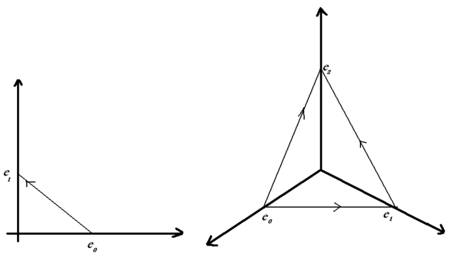
تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^m$ به‌طوری‌که بردارهای $v_n - v_0$ و ... و $v_2 - v_0$ و $v_1 - v_0$ مستقل خطی‌اند یا به طور معادل $v_0, \dots, v_n$ در یک ابر صفحه از بعد کمتر از n قرار نگیرند.
لذا یک n -سادک مساوی پوشش محدب $[v_0, \dots, v_n]$ است. یعنی کوچکترین مجموعه محدب

[۱] Eilenberg

[۲] Eilenberg-Zilber

تولید شده توسط رئوس $v_0, \ldots, v_n$ به عبارتی

$$[v_0, v_1, \ldots, v_n] = \{\sum_{i=0}^{n} t_i v_i | t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$$



۱- سادک   ۲- سادک

تعریف ۲.۱.۲. n -سادک استاندارد را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\Delta^n = \{(t_0, t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$$

$$\Delta^n = \{(e_0, e_1, \ldots, e_n)\}$$

توجه کنیم عنصر $i+1$ برابر با یک می‌باشد.

$$e_i = (0, 0, \ldots, 1_{=i+1}, 0, 0, \ldots, 0).$$

حال به نکات زیر توجه کنیم که:

۱) سه نقطه در $\mathbb{R}^2$ تشکیل یک مثلث می‌دهند هرگاه v_0 و v_1 و v_2 مستقل باشند یعنی در یک راستا نباشند و با انتقال روی هم قرار نگیرند.

۲) برای هر n -سادک یک جهت قائل می‌شویم و جهت آن طبق قرار داد همان ترتیب صعودی اندیس‌ها و جهت القا شده به زیر سادک‌ها بر اساس همان ترتیب صعودی است.

۳)یک همسانریختی خطی بین n -سادک $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ و n -سادک استاندارد به صورت زیر وجود دارد.

$$\begin{cases} \Delta^n \longrightarrow [v_0, v_1, \ldots, v_n] \\ (t_0, t_1, \ldots, t_n) \longrightarrow t_0 v_0 + \ldots + t_n v_n. \end{cases}$$

تعریف ۲.۱.۳. اگر $[v_0, v_1, \dots, v_n]$ یک n -سادک باشد وجه i ام آن را از حذف راس i ام به‌دست می‌آوریم و با نماد $[v_0, v_1, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ نمایش می‌دهیم به وضوح وجه هر n -سادک یک $(n-1)$ -سادک می‌باشد.

۲-۲ همولوژی سادکی

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید X یک فضای توپولوژیک باشد. X را یک $\Delta-$ مجتمع گویند هر گاه ساختار زیر به نام یک $\Delta-$ مجتمع برای آن وجود داشته باشد.

۱) خانواده توابع پیوسته $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$ وجود داشته باشد که α به n وابسته است به صورت زیر:

i) $\sigma_\alpha|_{\Delta^{n^\circ}}$ یک به یک باشد و هر نقطه از X در تصویر یک $\sigma_\alpha(\Delta^{n^\circ})$ یگانه قرار گیرد.

ii) تحدید σ_α به هر وجه از Δ^n نیز یکی از σ_β های مربوط به Δ -مجتمع باشد.

به عبارتی اگر

$$\sigma_\beta \in \{\sigma_\alpha\}_\alpha \Leftarrow \sigma_\beta = \sigma_\alpha|[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$$

در نظر اول تحدید σ_α به یک وجه Δ^n تابعی از Δ^{n-1} به X نیست که این تحدید را σ_β بنامیم. اما وجه $[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ به طور یگانه و خطی همسانریخت با Δ^{n-1} است. یعنی همسانریختی خطی یگانه‌ای مانند $j : \Delta^{n-1} \longrightarrow [v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]$ وجود دارد که ترتیب رئوس را حفظ می‌کند حال قرار دهید $\sigma_\beta = \sigma_\alpha o j : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ پس $\sigma_\beta = \sigma_\alpha|_{[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_n]}$ ، $\sigma_\beta = \sigma_\alpha o j$ که $j : \Delta^{n-1} \longrightarrow X$ یگانه همسانریختی خطی است که Δ^{n-1} را به روی وجه i ام از Δ^n می‌نگارد.

iii) $U \subseteq X$ باز است اگر و تنها اگر $\sigma_\alpha^{-1}(U)$ در هر Δ^n باز باشد.

تعریف ۲.۲.۲. برای یک Δ -مجتمع X، گروه آبلی آزاد تولید شده توسط n -سادک‌ها را با $\Delta_n(x)$ نشان می‌دهیم به‌عبارتی گروه آبلی آزاد تولید شده همه توابع $\sigma_\alpha : \Delta^n \longrightarrow X$ معادلاً گروه آبلی آزاد تولید شده توسط e_α^n که $e_\alpha^n = \sigma_\alpha(\Delta^{n^\circ})$. درواقع $\sigma_\alpha(\Delta^{n^\circ})$ حجره‌های e_α^n درساختار مجتمع حجره‌ای x هستند. اعضای $\Delta_n(x)$ را n -زنجیر می‌نامیم که به‌صورت $\sum_\alpha n_\alpha e_\alpha^n$ نشان داده می‌شود که در آن $n_\alpha \in \mathbb{Z}$ و معادلاً می‌توانیم به‌دست آوریم که اعضای $\Delta_n(x)$ را به‌صورت $\sum_\alpha n_\alpha \sigma_\alpha$