به نام خدا

پیش‌بینی آماره‌های مرتب و رکوردها

استاد راهنما:

دکتر جعفر احمدی

استاد مشاور:

دکتر مهدی دوست‌پرست

نگارنده:

سید محمد تقی کامل میرمصطفائی

دانشکده علوم ریاضی

دانشگاه فردوسی مشهد

آذر ۱۳۹۰

پیشگفتار

امروزه داده‌های ترتیبی در اکثر شاخه‌های آمار و احتمال مورد توجه پژوهشگران قرار گرفته‌اند. ساده‌ترین این دسته از مشاهدات زمانی است که داده‌ها به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب شوند، در این صورت این داده‌های مرتب شده را آماره‌های مرتب نمونه اصلی گویند. مثال ساده‌ی دیگری از داده‌های ترتیبی، رکوردها هستند. زمانی که یک دنباله از مشاهدات در دسترس باشند، مشاهده‌ای را که از تمام مشاهدات ماقبل خود بزرگتر(کوچک‌تر) باشد، رکورد بالا(پایین) می‌نامند. در این رساله ساده‌ترین مدل داده‌های ترتیبی یعنی آماره‌های مرتب و رکوردهای معمولی در نظر گرفته می‌شود و گاه تعمیمی از نتایج به دست آمده برای k—رکوردها و سانسور فزاینده نوع II ذکر می‌گردد.

پژوهشگران بسیاری در زمینه پیش‌بینی آماره‌های مرتب بر اساس آماره‌های مرتب مشاهده شده یا پیش‌بینی رکوردهای آینده بر اساس رکوردهای مشاهده شده تحقیق کرده‌اند. آن‌چه در این رساله مورد بررسی قرار می‌گیرد، ایده جدیدی است که بر مبنای آن می‌توان به پیش‌بینی آماره‌های مرتب بر اساس رکوردهای مشاهده شده و یا بر عکس پرداخت.

- در فصل ۱، ابتدا به معرفی آماره‌های مرتب، برخی از انواع سانسور و رکوردها پرداخته می‌شود، سپس ویژگی‌های توزیعی این آماره‌ها در توزیع نمایی دو پارامتری مورد بررسی قرار می‌گیرد. مختصری از نظریه k—رکوردها به عنوان تعمیمی از رکوردهای عمومی نیز بیان می‌شود. از آن‌جا که موضوع اصلی این رساله مبحث پیش‌بینی است، مفاهیم اولیه پیش‌بینی و روش‌های مربوطه از دیدگاه‌های گوناگون به طور خلاصه بیان شده است. همچنین تاریخچه کوتاهی از پیش‌بینی داده‌های ترتیبی ذکر می‌گردد. به خاطر رابطه نزدیک برآورد و پیش‌بینی، خلاصه‌ای از روش‌های برآورد نیز آورده شده است.
- فصل ۲ اختصاص به پیش‌بینی نقطه‌ای کلاسیک غیربیزی آماره‌های مرتب بر اساس رکوردهای معمولی مشاهده شده در خانواده مکان—مقیاس دارد. در این راستا چهار نوع پیش‌بینی کننده

نقطه‌ای بررسی می‌شوند. این پیش‌بینی کننده‌ها عبارتند از: بهترین پیش‌بینی کننده‌ی نااریب، بهترین پیش‌بینی کننده‌ی پایا، پیش‌بینی کننده‌ی درستنمایی ماکسیمم و پیش‌بینی کننده‌ای که از طریق جایگزینی برآورگرهای درستنمایی ماکسیمم پارامترهای موجود در امید ریاضی آماره‌ی مرتب آینده بر اساس رکوردها به دست می‌آید. به عنوان مثال این پیش‌بینی کننده‌ها در توزیع نمایی دو پارامتری به کار گرفته می‌شوند و در این توزیع با معیار میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی، مقایسه می‌شوند. همچنین پیش‌بینی میانگین نمونه آینده بر اساس رکوردها موضوع جالبی است که به عنوان یک حالت خاص در این فصل مورد توجه قرار می‌گیرد. تعمیم نتایج به k—رکوردها به همراه دو مثال عددی پایان‌بخش این فصل است.

- در فصل ۳، این فرض در نظر گرفته شده است که داده‌های سانسور نوع II از خانواده مکان—مقیاس در دسترس باشند و به کمک آن‌ها برای رکوردهای آینده پیش‌بینی کننده‌های نقطه‌ای به دست می‌آیند. مجدداً این پیش‌بینی کننده‌ها در توزیع نمایی دو پارامتری بررسی و مقایسه می‌گردند. همچنین تعمیم نتایج این فصل به k—رکوردها و آماره‌های مرتب سانسور شده فزاینده نوع II نیز بیان می‌شوند.

- پیش‌بینی فاصله‌ای کلاسیک آماره‌های مرتب بر اساس رکوردها و یا برعکس، موضوعی است که در فصل ۴ بدان پرداخته می‌شود. برای این منظور، دو روش کمیت محوری و روش تقریبی والد مطرح می‌شود. فرض بر این است که توزیع پایه متعلق به خانواده با تابع نرخ خطر متناسب می‌باشد. البته باید اذعان داشت که روش تقریبی والد[1] برای هر توزیع پیوسته و دلخواهی قابل به کارگیری است. توزیع نمایی دو پارامتری به عنوان مثال ذکر می‌شود و روش‌های مذکور برای آن به کار می‌رود. پیش‌بینی فاصله‌ای میانگین نمونه آینده نیز بر اساس رکوردها فقط در توزیع نمایی دو پارامتری مورد بررسی قرار می‌گیرد.

- در فصل ۵، پیش‌بینی بیزی با این فرض که توزیع پایه، نمایی تک پارامتری است و توزیع پیشین متعلق به خانواده توزیع‌های گاماست، مورد توجه قرار می‌گیرد. پیش‌بینی کننده‌های

[1] Wald

بیزی نقطه‌ای و فاصله‌ای برای آماره‌های مرتب و میانگین نمونه آینده بر اساس رکوردها به دست می‌آیند. سپس پیش‌بینی بیزی رکوردها بر اساس داده‌های سانسور نوع II بررسی می‌شود. تعمیم نتایج به k–رکوردها و آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II نیز در توزیع نمایی تک پارامتری بیان می‌گردد. این فصل با دو مثال عددی پایان می‌پذیرد.

- آن‌چه که فصل ٦ را از سایر فصول متمایز می‌کند، موضوع پیش‌بینی ناپارامتری است. ابتدا پیش‌بینی ناپارامتری آماره‌های مرتب بر اساس رکوردهای معمولی بررسی می‌شود، سپس فاصله‌های پیش‌بینی بیرونی و درونی برای آماره‌های مرتب با فرض در اختیار داشتن رکوردهای بالا، پایین یا هردو مطالعه می‌گردند. پیش‌بینی کننده‌های فاصله‌ای بیرونی و درونی برای رکوردهای بالا یا پایین بر اساس آماره‌های مرتب مشاهده شده نیز به دست می‌آیند.

- سرانجام در فصل ۷ به جمع‌بندی مطالب مطرح شده در این رساله پرداخته می‌شود و مسائل و ایده‌هایی که در آینده می‌توان مورد تحقیق قرار داد، مطرح می‌گردند.

سید محمد تقی کامل میرمصطفائی
آذر ۱۳۹۰

نمادگذاری

متغیر تصادفی i ام	Y_i
مقدار مشاهده i ام	y_i
jامین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم m	$Y_{j:m}$
مقدار مشاهده شده j امین آماره مرتب در نمونه‌ای به حجم m	$y_{j:m}$
sامین رکورد بالا	R_s
sامین رکورد پایین	L_s
nامین $k-$ رکورد بالا	$R_{n(k)}$
i امین آماره مرتب سانسور فزاینده نوع II از راست با j شکست در نمونه‌ای به حجم m	$Y_{i:j:m}$
تابع چگالی احتمال متغیر تصادفی Y	$f_Y(y)$
تابع توزیع تجمعی متغیر تصادفی Y	$F_Y(y)$
تابع چگالی احتمال jامین آماره مرتب	$f_{Y_{j:m}}(y)$
تابع توزیع تجمعی jامین آماره مرتب	$F_{Y_{j:m}}(y)$
تابع چگالی احتمال توام iامین و jامین آماره‌های مرتب	$f_{Y_{i:m},Y_{j:m}}(y_i,y_j)$
تابع چگالی احتمال توام آماره‌های مرتب	$f_{Y_{1:m},\ldots,Y_{m:m}}(y_m,\ldots,y_m)$
تابع چگالی احتمال توام آماره‌های مرتب سانسور نوع II	$f_{Y_{1:m},\ldots,Y_{j:m}}(y_{1:m},\ldots,y_{j:m})$
تابع چگالی احتمال توام آماره‌های مرتب سانسور فزاینده نوع II	$f_{Y_{1:j:m},\ldots,Y_{j:j:m}}(y_{1:j:m},\ldots,y_{j:j:m})$
تابع چگالی احتمال sامین رکورد بالا	$f_{R_s}(r_s)$
تابع چگالی احتمال توام iامین و jامین رکوردهای بالا	$f_{R_i,R_j}(r_i,r_j)$
تابع چگالی احتمال توام jامین رکورد بالا و iامین رکورد پایین	$f_{L_i,R_j}(l_i,r_j)$
تابع چگالی احتمال توام n رکورد بالای نخست	$f_{R_1,\ldots,R_n}(r_1,\ldots,r_n)$
تابع چگالی احتمال توام sامین رکورد بالا تا nامین رکورد بالا	$f_{R_s,\ldots,R_n}(r_s,\ldots,r_n)$
تابع چگالی احتمال nامین $k-$رکورد بالا	$f_{R_{n(k)}}(r)$
تابع بقا	$\overline{F}(x)$
تابع درستنمایی θ	$L(\theta;x_1,\ldots,x_n)$
توزیع نمایی با پارامتر مکان μ و پارامتر مقیاس σ	$E(\mu,\sigma)$

توزیع گاما با پارامتر شکل α و پارامتر مقیاس β	$\Gamma(\alpha,\beta)$
توزیع بتا با پارامترهای α و β	$Beta(\alpha,\beta)$
تابع گامای کامل با مولفه α	$\Gamma(\alpha)$
تابع بتای کامل با مولفه‌های α و β	$B(\alpha,\beta)$
تابع بتای ناقص با مولفه‌های α و β	$I(\alpha,\beta,x)$
تابع پلی‌گاما	$\psi^{(\ell)}(x)$
بهترین برآوردگر خطی نااریب برای θ	$\hat{\theta}^*$
بهترین برآوردگر خطی پایا برای θ	$\tilde{\theta}$
برآوردگر درستنمایی ماکزیمم برای θ	$\hat{\theta}_M$
برآوردگر بیز θ	$\hat{\theta}_{BS}$
توزیع پیشین θ	$\pi(\theta)$
توزیع پسین θ	$\pi(\theta\|x_1,\ldots,x_n)$
پیش‌بینی کننده‌ی درستنمایی ماکزیمم برای Y	$\hat{Y}^P$
امید ریاضی	$E(.)$
واریانس	$Var(.)$
کواریانس	$Cov(.)$
تابع زیان	$L(.,.)$
تابع مخاطره	$R(.,.)$
میانگین توان دوم خطای پیش‌بینی	$MSPE(.)$
احتمال رخداد پیشامد A	$Pr(A)$
ثابت اویلر	γ
برداری که تمام درایه‌های آن یک باشند	$\underline{1}$
دارای توزیع	$\sim$
x متعلق به مجموعه A	$x \in A$
مکمل مجموعه A	A^c
معکوس ماتریس Σ	Σ^{-1}
مجموعه اعداد حقیقی	R
مجموعه اعداد طبیعی	N
انتخاب k عضو از n عضو	$\binom{n}{k}$

به ازای هر $\forall$

پایان برهان $\square$

فضای پارامتر Θ

فهرست مقالات مستخرج از پایان‌نامه

[1] Ahmadi, J. and MirMostafaee, S. M. T. K. (2009) Prediction intervals for future records and order statistics coming from two parameter exponential distribution, *Statist. Probab. Lett.*, **79**, 977-983.

[2] Ahmadi, J., MirMostafaee, S. M. T. K. and Balakrishnan, N. (2010) Nonparametric prediction intervals for future record intervals based on order statistics, *Statist. Probab. Lett.*, **80**, 1663–1672.

[3] Ahmadi, J., MirMostafaee, S. M. T. K. and Balakrishnan, N. (2011) Bayesian prediction of order statistics based on k-record values from exponential distribution, *Statistics*, **45**, 375–387.

[4] Ahmadi, J., MirMostafaee, S. M. T. K. and Balakrishnan, N. (2011) Bayesian prediction of k-record values based on progressively censored data from exponential distribution, *J. Stat. Comput. Simul.*, DOI: 10.1080/00949655.2010.526609.

[5] MirMostafaee, S. M. T. K. and Ahmadi, J. (2011) Point prediction of future order statistics from exponential distribution, *Statist. Probab. Lett.*, **81**, 360–370.

[6] MirMostafaee, S. M. T. K. and Ahmadi, J. (2009) Prediction intervals for future order statistics from a general class of distributions, *The 7th Seminare on Probability and Stochastics Processes*, Isfehan University of Technology, Isfehan, Iran.

[7] MirMostafaee, S. M. T. K. and Ahmadi, J. (2010) Prediction of future order statistics coming from Pareto model, *The 45th Scientific Meeting of the Italian Statistical Society*, University of Padova, Padova, Italy.

[8] MirMostafaee, S. M. T. K. and Ahmadi, J. (2010) Point prediction of order statistics from uniform distribution, *The 10th Iranian Statistical Conference*, University of Tabriz, Tabriz, Iran.

[9] MirMostafaee, S. M. T. K. and Ahmadi, J. (2010) Prediction of repair times in a minimal repair process based on lifetimes of k-out-of-n systems, *The 28th European Meeting of Statisticians*, University of Piraeus, Piraeus, Greece.

فهرست مندرجات

۱ مقدمات و کلیات ۱۰

۱—۱ مقدمه ۱۲

۱—۲ آماره‌های مرتب و سانسورها ۱۲
۱—۲—۱ آماره‌های مرتب ۱۲
۱—۲—۲ سانسورها ۱۳
۱—۲—۳ کاربردهای سانسور و آماره‌های مرتب ۱۵

۱—۳ رکوردها ۱۶
۱—۳—۱ رکوردهای معمولی ۱۶
۱—۳—۲ k—رکوردها ۱۸
۱—۳—۳ کاربرد رکوردها ۱۹

۱—۴ رکوردها و آماره‌های مرتب در توزیع نمایی ۲۰

۱–۵ نظریه برآورد ۲۳
۱–۵–۱ دیدگاه کلاسیک ۲۴
۱–۵–۲ دیدگاه بیزی ۲۹

۱–۶ نظریه پیش‌بینی، تاریخچه و روش‌ها ۳۰
۱–۶–۱ تاریخچه پیش‌بینی ۳۰
۱–۶–۲ پیش‌بینی از دیدگاه کلاسیک ۳۲
۱–۶–۳ پیش‌بینی از دیدگاه بیزی ۳۷

۲ پیش‌بینی نقطه‌ای کلاسیک آماره‌های مرتب بر اساس رکوردها ۳۸

۲–۱ مقدمه ۴۰

۲–۲ روش جایگزینی برآوردگر درستنمایی ماکسیمم ۴۰
۲–۲–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۴۱
۲–۲–۲ توزیع نمایی دو پارامتری: μ معلوم ۴۲

۲–۳ بهترین پیش‌بینی کننده‌ی نااریب ۴۳
۲–۳–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۴۵

۲–۴ بهترین پیش‌بینی کننده‌ی پایا ۴۶
۲–۴–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۴۷
۲–۴–۲ توزیع نمایی دو پارامتری: μ معلوم ۴۹

۲–۵ پیش‌بینی کننده‌ی درستنمایی ماکسیمم ۵۰

۲–۶ حالت‌های خاص ۵۲
۲–۶–۱ آماره‌های فرین ۵۲
۲–۶–۲ میانگین نمونه‌ی آینده ۵۳

۲–۷ مقایسه پیش‌بینی کننده‌ها ۵۶
۲–۷–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۵۷
۲–۷–۲ توزیع نمایی دو پارامتری: μ معلوم ۵۸

۲–۸ تعمیم نتایج به k–رکوردها ۵۹

۲–۹ مثال‌های عددی ۶۰

۳ پیش‌بینی نقطه‌ای کلاسیک (غیربیزی) رکوردها بر اساس آماره‌های مرتب ۶۵

۳–۱ مقدمه ۶۷

۳–۲ روش جایگزینی برآوردگر درستنمایی ماکسیمم ۶۷
۳–۲–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۶۸
۳–۲–۲ توزیع نمایی دو پارامتری: μ معلوم ۶۹

۳–۳ بهترین پیش‌بینی کننده‌ی نااریب ۷۰
۳–۳–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۷۱

۳–۴ بهترین پیش‌بینی کننده‌ی پایا ۷۲
۳–۴–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۷۳
۳–۴–۲ توزیع نمایی دو پارامتری: μ معلوم ۷۴

۳–۵ پیش‌بینی کننده‌ی درستنمایی ماکسیمم ۷۵

۳–۶ مقایسه‌ی پیش‌بینی کننده‌ها ۷۷
۳–۶–۱ توزیع نمایی دو پارامتری: μ مجهول ۷۷
۳–۶–۲ توزیع نمایی دو پارامتری: μ معلوم ۷۸

۳–۷ تعمیم نتایج ۷۸

۳–۸ مثال عددی ۷۹

۴ پیش‌بینی فاصله‌ای کلاسیک آماره‌های مرتب و رکوردها ۸۱

۴–۱ مقدمه ۸۲

۴–۲ پیش‌بینی فاصله‌ای آماره‌های مرتب ۸۳
۴–۲–۱ روش کمیت محوری ۸۳
۴–۲–۲ روش والد ۹۵

۴–۳ پیش‌بینی فاصله‌ای رکوردها ۹۷

۴–۳–۱ روش کمیت محوری ۹۷
۴–۳–۲ روش والد ۱۰۴

۴–۴ مثال‌های عددی ۱۰۶

۵ پیش‌بینی بیزی آماره‌های مرتب و رکوردها ۱۰۹

۵–۱ مقدمه ۱۱۰

۵–۲ پیش‌بینی بیزی آماره‌های مرتب بر اساس رکوردها ۱۱۰
۵–۲–۱ پیش‌بینی نقطه‌ای بیزی ۱۱۲
۵–۲–۲ پیش‌بینی فاصله‌ای بیزی ۱۱۴

۵–۳ پیش‌بینی بیزی میانگین بر اساس رکوردها ۱۱۷
۵–۳–۱ پیش‌بینی نقطه‌ای بیزی ۱۱۸
۵–۳–۲ پیش‌بینی فاصله‌ای بیزی ۱۱۹

۵–۴ پیش‌بینی بیزی رکوردها بر اساس آماره‌های مرتب ۱۲۰
۵–۴–۱ پیش‌بینی نقطه‌ای بیزی ۱۲۲
۵–۴–۲ پیش‌بینی فاصله‌ای بیزی ۱۲۴

۵–۵ تعمیم نتایج ۱۲۶

۵–۶ مثال‌های عددی ۱۲۹

٦ پیش‌بینی ناپارامتری آماره‌های مرتب و رکوردها ۱۴۳

٦–۱ مقدمه ۱۴۴

٦–۲ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای رکوردهای آینده بر اساس آماره‌های مرتب ۱۴۴

٦–۲–۱ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای رکوردهای بالای آینده ۱۴۵

٦–۲–۲ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای رکوردهای پایین آینده ۱۴۷

٦–۳ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای آماره‌های مرتب آینده بر اساس رکوردها ۱۴۸

٦–۳–۱ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای آماره‌های مرتب آینده بر اساس رکوردهای بالا ۱۴۹

٦–۳–۲ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای آماره‌های مرتب آینده بر اساس رکوردهای پایین ۱۵۰

٦–۳–۳ فاصله‌های پیش‌بینی ناپارامتری برای آماره‌های مرتب آینده بر اساس رکوردهای بالا و پایین ۱۵۱

٦–۴ فاصله‌های پیش‌بینی بیرونی ناپارامتری برای رکوردها بر اساس آماره‌های مرتب ۱۵۱

٦–۴–۱ فاصله‌های پیش‌بینی بیرونی ناپارامتری برای رکوردهای بالا بر اساس آماره‌های مرتب ۱۵۲

٦–۴–۲ فاصله‌های پیش‌بینی بیرونی ناپارامتری برای رکوردهای پایین بر اساس آماره‌های مرتب ۱۵۷

٦–۴–۳ فاصله‌های پیش‌بینی بیرونی ناپارامتری برای رکوردهای بالا و پایین توأماً بر اساس آماره‌های مرتب ۱۵۷

٦–٥ فاصله‌های پیش‌بینی درونی ناپارامتری برای رکوردها بر اساس آماره‌های مرتب ١٦٠

٦–٦ مثال عددی ١٦٢

٧ جمع‌بندی نتایج به دست آمده در رساله و آینده تحقیق ١٦۴

٧–١ مقدمه ١٦٥

٧–٢ جمع‌بندی نتایج به دست آمده در رساله ١٦٥

٧–٣ آینده تحقیق ١٦٦

فصل ۱

مقدمات و کلیات

۱—۱ مقدمه

۱—۲ آماره‌های مرتب و سانسورها

۱—۲—۱ آماره‌های مرتب

۱—۲—۲ سانسورها

۱—۲—۳ کاربردهای سانسور و آماره‌های مرتب

۱—۳ رکوردها

۱—۳—۱ رکوردهای معمولی

۱—۳—۲ k—رکوردها

۱—۳—۳ کاربرد رکوردها

۱—۴ رکوردها و آماره‌های مرتب در توزیع نمایی

۱—۵ نظریه برآورد

۱–۵–۱ دیدگاه کلاسیک

۱–۵–۲ دیدگاه بیزی

۱–۶ نظریه پیش‌بینی، تاریخچه و روش‌ها

۱–۶–۱ تاریخچه پیش‌بینی

۱–۶–۲ پیش‌بینی از دیدگاه کلاسیک

۱–۶–۳ پیش‌بینی از دیدگاه بیزی

۱—۱ مقدمه

در این فصل، درصدد هستیم تا مفاهیم آماره‌های مرتب، سانسور و رکوردها را به همراه کاربردهای آنان به اختصار بیان کنیم. تعمیمی از نظریه رکوردها موسوم به k—رکوردها نیز همراه با برخی از کاربردهای آن آورده خواهد شد. در سرتاسر این رساله، ساده‌ترین مدل داده‌های ترتیبی یعنی آماره‌های مرتب و رکوردهای معمولی را در نظر خواهیم گرفت و در برخی از مواقع، تعمیمی از نتایج به دست آمده را برای k—رکوردها و سانسور فزاینده نوع II ذکر خواهیم کرد.

از آنجا که هدف این رساله پیش‌بینی رکوردها و آماره‌های مرتب می‌باشد، مختصری از نظریه پیش‌بینی و روش‌های آن در حالت کلی در این فصل یادآوری می‌شود. چون بخش وسیعی از نظریه پیش‌بینی نیازمند برآورد پارامترهای مجهول است، اشاره‌ای به روش‌های برآورد نیز خواهد شد.

۱—۲ آماره‌های مرتب و سانسورها

در این بخش به طور مختصر با نظریه و کاربردهای آماره‌های مرتب و سانسورها آشنا می‌شویم.

۱—۲—۱ آماره‌های مرتب

فرض کنید $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ یک نمونه‌ی تصادفی از جامعه‌ای با تابع توزیع تجمعی پیوسته $F_Y(y)$ و تابع چگالی احتمال $f_Y(y)$ باشد. اگر Y_iها را به ترتیب صعودی مرتب کنیم و مقادیر مرتب شده را با $Y_{i:m}$ نشان دهیم، آن‌گاه $Y_{i:m}$ را iامین آماره‌ی مرتب از نمونه‌ی فوق گویند.

- تابع چگالی احتمال توأم $(Y_{1:m}, Y_{2:m}, \cdots, Y_{m:m})$ عبارت است از

$$f_{Y_{1:m},Y_{2:m},\cdots,Y_{m:m}}(y_1, y_2, \ldots, y_m) = m! \prod_{i=1}^{m} f_Y(y_i), \quad y_1 < y_2 < \ldots < y_m. \qquad (1—1)$$

- همچنین تابع توزیع تجمعی $Y_{i:m}$ به صورت زیر داده می‌شود

$$F_{Y_{i:m}}(y) = \sum_{k=i}^{m} \binom{m}{k} [F_Y(y)]^k [1 - F_Y(y)]^{m-k}. \qquad (2—1)$$

- با مشتق‌گیری از (۱—۲) تابع چگالی احتمال $Y_{i:m}$ به صورت زیر به دست می‌آید

$$f_{Y_{i:m}}(y) = \frac{m!}{(i-1)!(m-i)!}[F_Y(y)]^{i-1}[1-F_Y(y)]^{m-i} f_Y(y). \qquad (3-1)$$

- با انتگرال‌گیری از (۱—۱) تابع چگالی احتمال توأم $Y_{i:m}$ و $Y_{j:m}$ به دست می‌آید که $1 \le i < j \le m$ و داریم

$$\begin{aligned} f_{Y_{i:m},Y_{j:m}}(y_i, y_j) &= \frac{m!}{(i-1)!(j-i-1)!(m-j)!}[F_Y(y_i)]^{i-1}[F_Y(y_j)-F_Y(y_i)]^{j-i-1} \\ &\quad \times [1-F_Y(y_j)]^{m-j} f_Y(y_i) f_Y(y_j), \qquad y_i < y_j. \qquad (4-1) \end{aligned}$$

۱—۲—۲ سانسورها

بسیاری از اوقات در آزمون‌های طول عمر، تحقیقات زیست‌شناسی، آنالیز بقا و دیگر زمینه‌های کاربردی علم آمار با نمونه‌هایی مواجه هستیم که برخی از مقادیر ممکن متغیرهای تصادفی مورد مطالعه محدود شده‌اند و همه مشاهدات نمونه ثبت نشده‌اند یا به نتیجه نرسیده‌اند. این محدودیت ممکن است به صورت اختیاری توسط خود آماردان اعمال گردد یا ماهیت آزمایش به گونه‌ای است که خود به خود این محدودیت بر مشاهدات تحمیل می‌شود. این محدودیت پیش‌آمده در نمونه‌ها را سانسور گوییم. سانسورها معمولاً به صورت‌های مختلفی اعمال می‌شوند. برخی از انواع سانسور عبارتند از: سانسور نوع اول، سانسور نوع دوم، سانسور تصادفی و سانسور فزاینده.

تعریف ۱.۱ اگر آزمایشی شامل m مؤلفه مستقل با طول عمرهای $Y_1, \cdots, Y_m$ دقیقاً تا زمانی ادامه یابد که زمان‌های از کارافتادگی j مؤلفه مشاهده گردند که j عدد از قبل تعیین شده‌ای است و $1 \le j \le m$، در این صورت مقدارهای مشاهده شده

$$y_{1:m} \le \cdots \le y_{j:m}$$

تشکیل داده‌های سانسور شده نوع II از راست را می‌دهند.