به نام او

که هستی از نام او شکل گرفت

دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

موضوع:

برخی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی

نگارش:
طیبه نصیری

استاد راهنما:
دکتر عظیم امین عطائی

استاد مشاور:
دکتر علی ذاکری

شهریور ۱۳۹۱

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان‌نامه: برخی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی

استاد راهنما: دکتر عظیم امین عطائی

نام دانشجو: طیبه نصیری

شماره دانشجویی: ۸۹۰۶۱۲۴

اینجانب طیبه نصیری دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

تقدیم به

قلب مهربان مادر و دستان پر مهر پدرم

تشکر و قدردانی

خداوندا تو را سپاس می‌گویم توفیق را نصیب من فرمودی تا امروز شاهد دفاع از پایان‌نامه‌ام باشم. بر خود لازم می‌دانم با کمال امتنان از اساتید عالی‌قدر و ارجمندم جناب آقای دکتر عظیم امین عطائی به عنوان استاد راهنما و جناب آقای دکتر علی ذاکری به عنوان استاد مشاور که با راهنمایی‌ها و نکات ارزنده علمی خودشان خالصانه و در کمال دلسوزی وقتشان را صرف راهنمایی اینجانب نمودند تقدیر نمایم. از اساتید گرامی آقایان دکتر داود رستمی و دکتر محمود هادیزاده که برای داوری این پایان‌نامه قبول زحمت نمودند و وقت گران بهای خود را در اختیار اینجانب قرار دادند سپاس‌گزاری می‌نمایم. همچنین از آقای دکتر محمدعلی جعفری به جهت راهنمایی‌هایشان نهایت سپاس را دارم. از خانواده عزیزم به خصوص خانواده برادرم که بودنشان همیشه دلگرمی بود برای ادامه راهم، سپاس‌گزارم که بی‌شک بدون همراهی این مهربانان نمی‌توانستم به مقصد برسم.

چکیده رساله

این پایان‌نامه به حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل معمولی و کسری می‌پردازد. این نوع معادلات ترکیبی از معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال فردهلم و ولترا می‌باشند. نخست ضمن اشاره به تاریخچه‌ای کوتاه از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، به بحث پیرامون وجود و یکتایی جواب در معادلات انتگرال-دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل کسری پرداخته شده است، سپس به قابلیت کنترل این نوع معادلات از مرتبه کسری اشاره شده است. برای حل معادلات از سه روش تبدیل دیفرانسیل، اختلال هموتوپی و روش تکرار تغییراتی استفاده کرده و در نهایت چند مثال عددی به منظور نشان دادن کارایی و دقت بالای این روش‌ها ارائه داده‌ایم.

واژگان کلیدی: معادلات انتگرال-دیفرانسیل، حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، وجود و یکتایی جواب، روش تبدیل دیفرانسیل، روش اختلال هموتوپی، روش تکرار تغییراتی، کنترل‌پذیری

مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل نقش مهمی در مدل‌سازی مسائل مختلف در علوم و مهندسی دارند. این معادلات در پدیده‌های مختلف فیزیکی (مانند تئوری الاستیک، صوت، دینامیک‌های سیال) و سایر علوم مانند زیست‌شناسی، شیمی و غیره بکار برده می‌شوند. از طرف دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در چند دهه اخیر بازتاب خوبی در علوم و مهندسی داشته‌اند و تحقیقات قابل ملاحظه‌ای در زمینه کاربردها و حل عددی معادلات، شامل مشتق از مرتبه کسری انجام شده است. از جمله این معادلات، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری می‌باشد که به عنوان یک موضوع جدید در ریاضیات مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین بر آن شدیم تا به بررسی معادلات انتگرال-دیفرانسیل شامل مشتق از مرتبه صحیح و کسری بپردازیم.

این پایان‌نامه در ۵ فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

فصل اول به بیان برخی مفاهیم و تعاریف اولیه که مورد نیاز برای فصل‌های آتی است، اختصاص داده شده است.

در فصل دوم به ارائه تاریخچه مختصری از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و انواع خاصی از مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم.

در فصل سوم وجود و یکتایی جواب در معادلات انتگرال-دیفرانسیل معمولی و کسری اثبات می‌شود. همچنین در این فصل کنترل‌پذیری معادلات انتگرال-دیفرانسیل از نوع کسری مورد بحث قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم به معرفی و توصیف روش‌های تبدیل دیفرانسیل، اختلال هموتوپی و تکرار تغییراتی پرداخته و به شرح آنالیز همگرایی روش تکرار تغییراتی می‌پردازیم.

سرانجام فصل آخر را به پیاده‌سازی روش‌های مذکور در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل اختصاص داده‌ایم. چند مثال عددی ارائه شده و جواب‌های به دست آمده با استفاده از این روش‌ها با جواب‌های دقیق مقایسه شده‌اند.

فهرست مطالب

عنوان صفحه

لیست جداول

عنوان صفحه

فصل ۱
تعاریف و قضایای اولیه

۱.۱ برخی تعاریف و قضایا در فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱. فضای همه توابع پیوسته روی بازه $[0,\infty)$ را با نماد $C[0,\infty)$ نمایش داده و نرم زیر را برای آن تعریف می‌کنند:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x\in[0,\infty)} |f(x)|. \tag{۱-۱}$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ یک عدد طبیعی باشد در این صورت فضای توابع n بار مشتق‌پذیر پیوسته روی بازه $[0,\infty)$ را با نماد $C^n[0,\infty)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. تابع حقیقی مقدار f در دامنه $[x_0,\infty)$ متعلق به فضای $C_\mu[x_0,\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$ نامیده می‌شود، هر گاه عدد حقیقی $p > \mu$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $x \geq x_0$ داشته باشیم: $f(x) = (x-x_0)^p f_1(x)$ که $f_1(x) \in C[x_0,\infty)$.

تعریف ۴.۱.۱. فضای شامل تمام توابع حقیقی مقدار f بر دامنه $[x_0,\infty)$ را که در آن $f^{(n)} \in C_\mu[x_0,\infty)$، فضای $C^n_\mu[x_0,\infty)$ می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید که $p \in [1,\infty)$، تابع $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ را p-انتگرالپذیر محلی [1] گوییم و به صورت $f \in L^p_{loc}(D)$ نمایش می‌دهیم، هر گاه به ازای هر $x \in D$، همسایگی بازی از x مانند D' موجود باشد به‌طوری‌که $\overline{D'} \subset D$ و $f \in L^p(D')$.

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید (M,d) یک فضای متریک و M' یک زیرمجموعه از M با نگاشت زیر باشد:

$$T : M' \to M, \qquad T(u) = v$$

در این صورت نگاشت T را یک نگاشت انقباضی [2] گوییم، هر گاه عدد حقیقی نامنفی α , $0 \leq \alpha < 1$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $u_1, u_2 \in M'$ داشته باشیم:

$$d\left(T(u_1), T(u_2)\right) \leq \alpha d\left(u_1, u_2\right). \tag{۲-۱}$$

[1] Locally p-integrabel
[2] Contractive mapping

قضیه ۱.۱.۱. قضیه نقطه ثابت باناخ[۱]

فرض کنید (M,d) یک فضای باناخ و $T : M \to M$ یک نگاشت انقباضی باشد، در این صورت T، دقیقاً یک نقطه ثابت دارد.

تعریف ۷.۱.۱. یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک به طور نسبی فشرده نامیده می‌شود هرگاه بستار آن فشرده باشد.

تعریف ۸.۱.۱. یک فضای توپولوژیک به طور محلی فشرده نامیده می‌شود هر گاه هر نقطه از آن، یک همسایه به طور نسبی فشرده داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. یک زیرمجموعه در یک فضای متریک پیش فشرده نامیده می‌شود اگر از هر دنباله از نقاط آن بتوان یک زیر دنباله کوشی استخراج کرد.

تعریف ۱۰.۱.۱. خانواده $\mathcal{F}$ از توابع $f : X \to Y$ روی مجموعه X به طور یکنواخت کراندار نامیده می‌شود هر گاه مجموعه مقادیر $V = \{y \in Y | \exists f \in \mathcal{F}, \exists x \in X \, (y = f(x))\}$ در Y کراندار باشد.

قضیه ۲.۱.۱. در فضای متریک (M,d)، زیرمجموعه $E \subseteq M$ کراندار کلی است اگر و فقط اگر هر دنباله از نقاط E شامل یک زیر دنباله کوشی باشد. توجه شود در حالتی که M یک فضای به طور محلی فشرده باشد، کرانداری یکنواخت معادل کرانداری کلی است.

قضیه ۳.۱.۱. یک زیرمجموعه از یک فضای متریک فشرده است اگر و فقط اگر کراندار کلی و بسته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید X و Y فضاهای متریک باشند. در این صورت خانواده $\mathcal{F}$ از توابع $f : X \to Y$ روی X همپیوسته نامیده می‌شود هر گاه به ازای هر $\varepsilon > 0$، $\delta > 0$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که وقتی $d_X(x_1, x_2) < \delta$ آنگاه به ازای هر تابع f داشته باشیم:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon, \qquad x_1, x_2 \in X. \tag{۳-۱}$$

[۱] Banach fixed point theorem

تعریف ۱۲.۱.۱. فرض کنید f_j دنباله ای از توابع بر دامنه S باشد در این صورت گوییم توابع f_j به طور یکنواخت همگرا به f است هر گاه به ازای $\varepsilon > 0$ موجود، $N > 0$ موجود باشد به‌طوری‌که به ازای هر $j > N$ و $x \in S$ داشته باشیم:

$$|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{۱-۴}$$

قضیه ۴.۱.۱. قضیه آرزلا-اسکولی [۱]

فرض کنید که $\mathcal{F}$ خانواده ای از توابع $f : K \to Y$ باشد که K یک فضای متریک فشرده و Y یک فضای متریک کامل است. در این صورت یک شرط لازم وکافی برای هر دنباله $\{f_n \in \mathcal{F} \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ برای داشتن یک زیردنباله همگرای یکنواخت آن است که خانواده $\mathcal{F}$ به طور کلی کراندار و همپیوسته باشد.

قضیه ۵.۱.۱. قضیه نقطه ثابت کراسنولسکی [۲]

فرض کنید که M یک مجموعه محدب و $Pz = Bz + Az$ یک نگاشت باشد. در این صورت اگر:

۱- به ازای هر $x, y \in M$ داشته باشیم $Bx + Ay \in M$،

۲- A پیوسته و فشرده باشد،

۳- B یک نگاشت انقباضی باشد،

آنگاه P یک نقطه ثابت دارد.

۲.۱ عملگرها در فضای برداری

تعریف ۱.۲.۱. هر گاه X و Y دو فضای برداری باشند، آنگاه نماد T را که نشان‌دهنده یک نگاشت از مجموعه نگاشت‌های تعریف شده از فضای X به فضای Y می‌باشد را یک عملگر می‌نامیم. در این صورت برای $T : X \to Y$ داریم:

$$y = Tx. \tag{۱-۵}$$

[۱] Arzela–Ascoli theorem
[۲] Krasnoselskii's fixed–point theorem

تعریف ۲.۲.۱. عملگر T بر دامنه $D(T)$ خطی نامیده می‌شود هر گاه $D(T)$ یک فضای برداری باشد و برای هر $x, y \in D(T)$ و هر اسکالر α, β داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \qquad (۱-۶)$$

در غیر این صورت آن را غیرخطی گوییم.

تعریف ۳.۲.۱. عملگر $T : X \to Y$ کراندار نامیده می‌شود اگر و فقط اگر برای هر $x_۱, x_۲ \in X$، عدد حقیقی $c < \infty$ موجود باشد، به‌طوری‌که:

$$\|Tx_۱ - Tx_۲\| \leq c \|x_۱ - x_۲\|. \qquad (۱-۷)$$

در غیر این صورت آن را غیرکراندار گوییم.

۳.۱ معرفی برخی مفاهیم مقدماتی

۱.۳.۱ تابعک

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید U یک مجموعه‌ای از توابع قابل قبول باشد در این صورت یک تابعک [1] مانند $J : U \to \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی است که برای هر تابع $y(x) \in U$ مقدار حقیقی یکتای $J(y(x))$ را متناظر می‌کند.

۲.۳.۱ نظریه تغییراتی

نظریه تغییراتی [2] در محاسبه مقدار بیشینه یا کمینه تابعکها بکار می‌رود و عبارت است از:

بدست آوردن تابعی که تحت آن تابعک موردنظر بیشینه یا کمینه شود.

۳.۳.۱ تابع گاما

تابع گاما [3] را با نماد Γ نشان داده و به ازای عدد حقیقی α، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(\alpha) = \int_۰^\infty t^{\alpha-۱} e^{-t} dt, \qquad \alpha > ۰. \qquad (۱-۸)$$

[1] Functional
[2] Variational theory
[3] Gamma function

تابع Γ دارای خواص زیر می‌باشد:

۱- $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$

۲- $\Gamma(\alpha+n)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\Gamma(\alpha)$

۳- $\Gamma(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\alpha^n}{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)},\qquad \alpha\neq 0,-1,-2,\cdots$

۴- $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin(\pi z)},\qquad z\neq 0,\pm1,\pm2,\cdots$

۵- $\Gamma(2z)=\frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}),\qquad 2z\neq 0,-1,-2,\cdots$

۶- $\Gamma(n+\frac{1}{2})=\frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!},\qquad n=0,1,2,\cdots$

۴.۳.۱ تابع بتا

تابع بتا [۱] را با نماد $\beta(p,q)$ نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta(p,q)=\int_0^1(1-t)^{p-1}t^{q-1}dt,\qquad p,q>0. \tag{۱-۹}$$

برخی از خواص تابع β به صورت زیر می‌باشد:

۱- $\beta(p,q)=\beta(q,p)$

۲- $\beta(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

۳- $\beta(p,q+1)=\frac{q}{p+q}\beta(p,q)$

۵.۳.۱ تابع میتاژ-لفلر

یکی از مهمترین و کاربردی‌ترین توابعی که در مبحث حسابان کسری از آن استفاده می‌شود، تابع میتاژ-لفلر [۲] است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\qquad z\in\mathbb{C}. \tag{۱-۱۰}$$

[۱] Beta function
[۲] Mittag–Leffler function

به عنوان تعمیمی از تابع میتاژ–لفلر تک پارامتری بالا، تابع میتاژ–لفلر دو پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \qquad \alpha > 0, \beta > 0 \tag{۱-۱۱}$$

برخی خواص تابع میتاژ–لفلر را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

۱- $E_{1,1}(z) = e^z$

۲- $E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left(e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right)$

۳- $E_{2,1}(z^2) = \cosh(z)$

۴- $E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z)$

۵- $E_{2,2}(z^2) = \frac{\sinh(z)}{z}$

۴.۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن، تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. مثال عمومی این معادلات برای تابع مفروض u به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)u(t)dt, \tag{۱-۱۲}$$

که در آن $k(x,t)$ هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و $b(x), a(x)$ کران‌های انتگرال هستند. لازم به ذکر است که توابع k و f توابعی معلوم هستند.

معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

شکل کلی معادلات انتگرال خطی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x,t)u(t)dt, \tag{۱-۱۳}$$

و شکل کلی معادلات انتگرال غیرخطی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} F(x,t,u(t))dt. \tag{۱-۱۴}$$