

به نام او

که هستی از نام او شکل گرفت



دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی  
دانشکده علوم - گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد  
ریاضی کاربردی - آنالیز عددی

موضوع:

## **برخی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل - انتگرالی**

نگارش:

طیبه نصیری

استاد راهنما:

دکتر عظیم امین عطائی

استاد مشاور:

دکتر علی ذاکری

شهریور ۱۳۹۱

## فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱- حق چاپ و تکثیر این پایان نامه متعلق به نویسنده آن می باشد. هرگونه کپی برداری بصورت کل پایان نامه یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه دانشکده علوم پایه دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می باشد.

۲- کلیه حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می باشد و بدون اجازه کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.

همچنین استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در پایان نامه بدون ذکر مرجع مجاز نمی باشد.

## اظهارنامه دانشجو

موضوع پایان نامه: برخی روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل-انتگرالی

استاد راهنما: دکتر عظیم امین عطائی

نام دانشجو: طیبه نصیری

شماره دانشجویی: ۸۹۰۶۱۲۴

اینجانب طیبه نصیری دانشجوی کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی دانشکده علوم دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه شده در این پایان‌نامه توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش شده مورد تایید می‌باشد و در مورد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است. همچنین گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در پایان‌نامه تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ جا ارائه نشده است و در تدوین متن پایان‌نامه آئین نامه مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضاء دانشجو:

تاریخ:

تقدیم بہ

قلب مہربان مادر و دستان پر مہر پدرم

## تشکر و قدردانی

خداوندا تو را سپاس می‌گویم توفیق را نصیب من فرمودی تا امروز شاهد دفاع از پایان‌نامه‌ام باشم. بر خود لازم می‌دانم با کمال امتنان از اساتید عالی‌قدر و ارجمندم جناب آقای دکتر عظیم امین عطائی به عنوان استاد راهنما و جناب آقای دکتر علی ذاکری به عنوان استاد مشاور که با راهنمایی‌ها و نکات ارزنده علمی خودشان خالصانه و در کمال دلسوزی وقتشان را صرف راهنمایی اینجانب نمودند تقدیر نمایم. از اساتید گرامی آقایان دکتر داود رستمی و دکتر محمود هادیزاده که برای داوری این پایان‌نامه قبول زحمت نمودند و وقت گران بهای خود را در اختیار اینجانب قرار دادند سپاس‌گزاری می‌نمایم. همچنین از آقای دکتر محمدعلی جعفری به جهت راهنمایی‌هایشان نهایت سپاس را دارم. از خانواده عزیزم به خصوص خانواده برادرم که بودندشان همیشه دلگرمی بود برای ادامه راهم، سپاس‌گزارم که بی‌شک بدون همراهی این مهربانان نمی‌توانستم به مقصد برسم.

## چکیده رساله

این پایان نامه به حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل معمولی و کسری می پردازد. این نوع معادلات ترکیبی از معادلات دیفرانسیل و معادلات انتگرال فردهلم و ولترا می باشند. نخست ضمن اشاره به تاریخچه ای کوتاه از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، به بحث پیرامون وجود و یکتایی جواب در معادلات انتگرال-دیفرانسیل و انتگرال-دیفرانسیل کسری پرداخته شده است، سپس به قابلیت کنترل این نوع معادلات از مرتبه کسری اشاره شده است. برای حل معادلات از سه روش تبدیل دیفرانسیل، اختلال هموتوپی و روش تکرار تغییراتی استفاده کرده و در نهایت چند مثال عددی به منظور نشان دادن کارایی و دقت بالای این روش ها ارائه داده ایم.

واژگان کلیدی: معادلات انتگرال-دیفرانسیل، حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری، وجود و یکتایی جواب، روش تبدیل دیفرانسیل، روش اختلال هموتوپی، روش تکرار تغییراتی، کنترل پذیری

## مقدمه

معادلات انتگرال-دیفرانسیل نقش مهمی در مدل‌سازی مسائل مختلف در علوم و مهندسی دارند. این معادلات در پدیده‌های مختلف فیزیکی (مانند تئوری الاستیک، صوت، دینامیک‌های سیال) و سایر علوم مانند زیست‌شناسی، شیمی و غیره بکار برده می‌شوند. از طرف دیگر حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری در چند دهه اخیر بازتاب خوبی در علوم و مهندسی داشته‌اند و تحقیقات قابل ملاحظه‌ای در زمینه کاربردها و حل عددی معادلات، شامل مشتق از مرتبه کسری انجام شده است. از جمله این معادلات، معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری می‌باشد که به عنوان یک موضوع جدید در ریاضیات مورد توجه قرار گرفته است. بنابراین بر آن شدیم تا به بررسی معادلات انتگرال-دیفرانسیل شامل مشتق از مرتبه صحیح و کسری بپردازیم.

این پایان‌نامه در ۵ فصل به شرح زیر تنظیم شده است:

فصل اول به بیان برخی مفاهیم و تعاریف اولیه که مورد نیاز برای فصل‌های آتی است، اختصاص داده شده است. در فصل دوم به ارائه تاریخچه مختصری از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و انواع خاصی از مشتق و انتگرال کسری می‌پردازیم.

در فصل سوم وجود و یکتایی جواب در معادلات انتگرال-دیفرانسیل معمولی و کسری اثبات می‌شود. همچنین در این فصل کنترل‌پذیری معادلات انتگرال-دیفرانسیل از نوع کسری مورد بحث قرار می‌گیرد.

در فصل چهارم به معرفی و توصیف روش‌های تبدیل دیفرانسیل، اختلال هموتوپی و تکرار تغییراتی پرداخته و به شرح آنالیز همگرایی روش تکرار تغییراتی می‌پردازیم.

سرانجام فصل آخر را به پیاده‌سازی روش‌های مذکور در حل معادلات انتگرال-دیفرانسیل اختصاص داده‌ایم. چند مثال عددی ارائه شده و جواب‌های به دست آمده با استفاده از این روش‌ها با جواب‌های دقیق مقایسه شده‌اند.



# فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	۱ تعاریف و قضایای اولیه
۲	۱.۱ برخی تعاریف و قضایا در فضاهاى توپولوژیک
۴	۲.۱ عملگرها در فضای برداری
۵	۳.۱ معرفی برخی مفاهیم مقدماتی
۵	۱.۳.۱ تابعک
۵	۲.۳.۱ نظریه تغییراتی
۵	۳.۳.۱ تابع گاما
۶	۴.۳.۱ تابع بتا
۶	۵.۳.۱ تابع میتاژ-لفلر
۷	۴.۱ معادلات انتگرال
۹	۲ حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری
۱۰	۱.۲ مقدمه
۱۱	۲.۲ مشتقات و انتگرال‌های کسری
۱۱	۱.۲.۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی
۱۶	۲.۲.۲ انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل روی $\mathbb{R}^+$
۱۷	۳.۲.۲ برخی ویژگی‌های انتگرال و مشتق کسری ریمان-لیوویل

۱۷	..... مشتق کسری کاپوتو	۴.۲.۲
۱۸	..... برخی ویژگی‌های مشتق کسری کاپوتو	۵.۲.۲
۲۰	..... رهیافت تحلیلی اجمالی بر معادلات انتگرال-دیفرانسیل	۳
۲۱	..... مقدمه	۱.۳
۲۲	..... بررسی وجود و یکتایی جواب در معادلات انتگرال-دیفرانسیل	۲.۳
۳۰	..... بررسی وجود جواب در معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری	۳.۳
۳۸	..... کنترل‌پذیری معادلات انتگرال-دیفرانسیل کسری	۴.۳
۴۴	..... روش تبدیل دیفرانسیل، اختلال هموتوپی و تکرار تغییراتی	۴
۴۵	..... مقدمه	۱.۴
۴۵	..... روش تبدیل دیفرانسیل	۲.۴
۴۶	..... تبدیل دیفرانسیل یک بعدی	۱.۲.۴
۴۷	..... تبدیل دیفرانسیل دو بعدی	۲.۲.۴
۴۸	..... تبدیل دیفرانسیل کسری	۳.۲.۴
۵۲	..... روش اختلال هموتوپی	۳.۴
۵۲	..... تاریخچه	۱.۳.۴
۵۴	..... مروری بر هموتوپی در توپولوژی	۲.۳.۴
۵۵	..... توصیف روش	۳.۳.۴
۵۷	..... روش تکرار تغییراتی	۴.۴
۵۷	..... تاریخچه	۱.۴.۴
۵۷	..... ضریب لاگرانژ تعمیم یافته	۲.۴.۴

۵۸	شرایط ساکن	۳.۴.۴
۵۹	تغییر محدود شده	۴.۴.۴
۶۱	توصیف روش	۵.۴.۴
۶۱	همگرایی روش	۶.۴.۴
۷۱	نتایج و تفسیر آنها در معادلات انتگرال-دیفرانسیل	۵
۷۲	مقدمه	۱.۵
۷۲	حل معادله انتگرال-دیفرانسیل مرتبه $n$	۲.۵
۷۳	حل به روش تبدیل دیفرانسیل	۱.۲.۵
۷۵	حل به روش اختلال هموتوپی	۲.۲.۵
۷۷	حل به روش تکرار تغییراتی	۳.۲.۵
۸۴	حل معادله انتگرال-دیفرانسیل کسری مرتبه چهارم	۳.۵
۸۴	حل به روش تبدیل دیفرانسیل	۱.۳.۵
۸۵	حل به روش اختلال هموتوپی	۲.۳.۵
۸۶	حل به روش تکرار تغییراتی	۳.۳.۵
۹۹	نتیجه‌گیری و پیشنهادات	
۱۰۵	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی	

# لیست جداول

صفحه	عنوان
۴۶	۱۰۴ برخی از ویژگی‌های تبدیل دیفرانسیل یک بعدی
۴۸	۲۰۴ برخی از ویژگی‌های تبدیل دیفرانسیل دو بعدی
۴۸	۳۰۴ برخی از ویژگی‌های اصلی تبدیل دیفرانسیل
۸۰	۱۰۵ نتایج عددی حاصل از DTM برای مثال ۱
۸۰	۲۰۵ نتایج عددی حاصل از HPM برای مثال ۱
۸۱	۳۰۵ نتایج عددی حاصل از VIM برای مثال ۱
۸۳	۴۰۵ نتایج عددی حاصل از DTM برای مثال ۲
۸۳	۵۰۵ نتایج عددی حاصل از HPM برای مثال ۲
۸۴	۶۰۵ نتایج عددی حاصل از VIM برای مثال ۲
۹۲	۷۰۵ نتایج عددی حاصل برای $A, B$ برای معادله (۷۱-۵) به ازای مقادیر مختلف $q$
۹۲	۸۰۵ نتایج عددی حاصل از روش DTM به ازای مقادیر مختلف $x$ و $q$ برای مثال ۱
۹۲	۹۰۵ نتایج عددی حاصل برای $A, B$ برای معادله (۸۳-۵) به ازای مقادیر مختلف $q$
۹۲	۱۰۰۵ نتایج عددی حاصل از روش HPM به ازای مقادیر مختلف $x$ و $\alpha$ برای مثال ۱
۹۳	۱۱۰۵ نتایج عددی به دست آمده برای $A, B$ برای معادله (۸۶-۵)
۹۳	۱۲۰۵ نتایج عددی حاصل از روش VIM به ازای مقادیر مختلف $x$ و $\alpha$ برای مثال ۱
۹۷	۱۳۰۵ نتایج عددی حاصل برای $A, B$ برای معادله (۹۳-۵) به ازای مقادیر مختلف $q$

- ۱۴.۵ نتایج عددی حاصل از روش DTM به ازای مقادیر مختلف  $x$  و  $q$  برای مثال ۲ . . . . . ۹۷
- ۱۵.۵ نتایج عددی حاصل برای  $A, B$  برای معادله (۵-۱۰۵) به ازای مقادیر مختلف  $q$  . . . . . ۹۷
- ۱۶.۵ نتایج عددی حاصل از روش HPM به ازای مقادیر مختلف  $x$  و  $q$  برای مثال ۲ . . . . . ۹۷
- ۱۷.۵ نتایج عددی حاصل برای  $A, B$  برای معادله معادله (۵-۱۰۹) . . . . . ۹۷
- ۱۸.۵ نتایج عددی حاصل از روش VIM به ازای مقادیر مختلف  $x$  و  $q$  برای مثال ۲ . . . . . ۹۸

# فصل ۱

## تعاریف و قضایای اولیه

## ۱.۱ برخی تعاریف و قضایا در فضاهای توپولوژیک

تعریف ۱.۱.۱. فضای همه توابع پیوسته روی بازه  $[0, \infty)$  را با نماد  $C[0, \infty)$  نمایش داده و نرم زیر را برای آن تعریف می‌کنند:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0, \infty)} |f(x)|. \quad (1-1)$$

تعریف ۲.۱.۱. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$  یک عدد طبیعی باشد در این صورت فضای توابع  $n$  بار مشتق‌پذیر پیوسته روی بازه  $[0, \infty)$  را با نماد  $C^n[0, \infty)$  نمایش می‌دهند.

تعریف ۳.۱.۱. تابع حقیقی مقدار  $f$  در دامنه  $[x_0, \infty)$  متعلق به فضای  $C_{\mu}[x_0, \infty)$ ،  $\mu \in \mathbb{R}$  نامیده می‌شود، هر گاه عدد حقیقی  $p > \mu$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $x \geq x_0$  داشته باشیم:  $f(x) = (x - x_0)^p f_1(x)$  که  $f_1(x) \in C[x_0, \infty)$ .

تعریف ۴.۱.۱. فضای شامل تمام توابع حقیقی مقدار  $f$  بر دامنه  $[x_0, \infty)$  را که در آن  $f^{(n)} \in C_{\mu}[x_0, \infty)$ ، فضای  $C_{\mu}^n[x_0, \infty)$  می‌نامند.

تعریف ۵.۱.۱. فرض کنید که  $p \in [1, \infty)$ ، تابع  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  را  $p$ -انتگرال‌پذیر محلی<sup>۱</sup> گوئیم و به صورت  $f \in L_{loc}^p(D)$  نمایش می‌دهیم، هر گاه به ازای هر  $x \in D$  همسایگی بازی از  $x$  مانند  $D'$  موجود باشد به طوری که  $f \in L^p(D')$  و  $\overline{D'} \subset D$ .

تعریف ۶.۱.۱. فرض کنید  $(M, d)$  یک فضای متریک و  $M'$  یک زیرمجموعه از  $M$  با نگاشت زیر باشد:

$$T : M' \rightarrow M, \quad T(u) = v$$

در این صورت نگاشت  $T$  را یک نگاشت انقباضی<sup>۲</sup> گوئیم، هر گاه عدد حقیقی نامنفی  $\alpha$ ،  $0 \leq \alpha < 1$  موجود باشد، به طوری که برای هر  $u_1, u_2 \in M'$  داشته باشیم:

$$d(T(u_1), T(u_2)) \leq \alpha d(u_1, u_2). \quad (2-1)$$

<sup>۱</sup> Locally p-integrabel  
<sup>۲</sup> Contractive mapping

قضیه ۱.۱.۱. قضیه نقطه ثابت باناخ<sup>۱</sup>

فرض کنید  $(M, d)$  یک فضای باناخ و  $T : M \rightarrow M$  یک نگاشت انقباضی باشد، در این صورت  $T$ ، دقیقاً یک نقطه ثابت دارد.

تعریف ۷.۱.۱. یک زیرمجموعه از یک فضای توپولوژیک به طور نسبی فشرده نامیده می‌شود هرگاه بستار آن فشرده باشد.

تعریف ۸.۱.۱. یک فضای توپولوژیک به طور محلی فشرده نامیده می‌شود هرگاه هر نقطه از آن، یک همسایه به طور نسبی فشرده داشته باشد.

تعریف ۹.۱.۱. یک زیرمجموعه در یک فضای متریک پیش فشرده نامیده می‌شود اگر از هر دنباله از نقاط آن بتوان یک زیر دنباله کوشی استخراج کرد.

تعریف ۱۰.۱.۱. خانواده  $\mathcal{F}$  از توابع  $f : X \rightarrow Y$  روی مجموعه  $X$  به طور یکنواخت کراندار نامیده می‌شود هرگاه مجموعه مقادیر  $V = \{y \in Y \mid \exists f \in \mathcal{F}, \exists x \in X (y = f(x))\}$  در  $Y$  کراندار باشد.

قضیه ۲.۱.۱. در فضای متریک  $(M, d)$ ، زیرمجموعه  $E \subseteq M$  کراندار کلی است اگر و فقط اگر هر دنباله از نقاط  $E$  شامل یک زیر دنباله کوشی باشد. توجه شود در حالتی که  $M$  یک فضای به طور محلی فشرده باشد، کرانداری یکنواخت معادل کرانداری کلی است.

قضیه ۳.۱.۱. یک زیرمجموعه از یک فضای متریک فشرده است اگر و فقط اگر کراندار کلی و بسته باشد.

تعریف ۱۱.۱.۱. فرض کنید  $X$  و  $Y$  فضاهای متریک باشند. در این صورت خانواده  $\mathcal{F}$  از توابع  $f : X \rightarrow Y$  روی  $X$  همپیوسته نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر  $\varepsilon > 0$ ،  $\delta > 0$  وجود داشته باشد به طوری که وقتی  $d_X(x_1, x_2) < \delta$  آنگاه به ازای هر تابع  $f$  داشته باشیم:

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon, \quad x_1, x_2 \in X. \quad (۳-۱)$$

---

Banach fixed point theorem<sup>۱</sup>



**تعریف ۱.۲.۱.۱.** فرض کنید  $f_j$  دنباله ای از توابع بر دامنه  $S$  باشد در این صورت گوئیم توابع  $f_j$  به طور یکنواخت همگرا به  $f$  است هر گاه به ازای  $\varepsilon > 0$  موجود،  $N > 0$  موجود باشد به طوری که به ازای هر  $j > N$  و  $x \in S$  داشته باشیم:

$$|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (۴-۱)$$

**قضیه ۴.۱.۱.** قضیه آرزلا-اسکولی<sup>۱</sup>

فرض کنید که  $\mathcal{F}$  خانواده ای از توابع  $f: K \rightarrow Y$  باشد که  $K$  یک فضای متریک فشرده و  $Y$  یک فضای متریک کامل است. در این صورت یک شرط لازم و کافی برای هر دنباله  $\{f_n \in \mathcal{F} : n \in \mathbb{N}\}$  برای داشتن یک زیردنباله همگرای یکنواخت آن است که خانواده  $\mathcal{F}$  به طور کلی کراندار و همپیوسته باشد.

**قضیه ۵.۱.۱.** قضیه نقطه ثابت کراسنولسکی<sup>۲</sup>

فرض کنید که  $M$  یک مجموعه محدب و  $Pz = Bz + Az$  یک نگاشت باشد. در این صورت اگر:

۱- به ازای هر  $x, y \in M$  داشته باشیم  $Bx + Ay \in M$ ،

۲-  $A$  پیوسته و فشرده باشد،

۳-  $B$  یک نگاشت انقباضی باشد،

آنگاه  $P$  یک نقطه ثابت دارد.

## ۲.۱ عملگرها در فضای برداری

**تعریف ۱.۲.۱.** هر گاه  $X$  و  $Y$  دو فضای برداری باشند، آنگاه نماد  $T$  را که نشان دهنده یک نگاشت از مجموعه نگاشت‌های تعریف شده از فضای  $X$  به فضای  $Y$  می‌باشد را یک عملگر می‌نامیم. در این صورت برای  $T: X \rightarrow Y$  داریم:

$$y = Tx. \quad (۵-۱)$$

<sup>۱</sup>Arzela-Ascoli theorem  
<sup>۲</sup>Krasnoselskii's fixed-point theorem

**تعریف ۲.۲.۱.** عملگر  $T$  بر دامنه  $D(T)$  خطی نامیده می‌شود هر گاه  $D(T)$  یک فضای برداری باشد و برای هر  $x, y \in D(T)$  و هر اسکالر  $\alpha, \beta$  داشته باشیم:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty. \quad (۶-۱)$$

در غیر این صورت آن را غیرخطی گوئیم.

**تعریف ۳.۲.۱.** عملگر  $T : X \rightarrow Y$  کراندار نامیده می‌شود اگر و فقط اگر برای هر  $x_1, x_2 \in X$  عدد حقیقی  $c < \infty$  موجود باشد، به طوری که:

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq c \|x_1 - x_2\|. \quad (۷-۱)$$

در غیر این صورت آن را غیرکراندار گوئیم.

## ۳.۱ معرفی برخی مفاهیم مقدماتی

### ۱.۳.۱ تابع

**تعریف ۱.۳.۱.** فرض کنید  $U$  یک مجموعه‌ای از توابع قابل قبول باشد در این صورت یک تابع  $^1$  مانند  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  یک تابع حقیقی است که برای هر تابع  $y(x) \in U$  مقدار حقیقی یکتای  $J(y(x))$  را متناظر می‌کند.

### ۲.۳.۱ نظریه تغییراتی

نظریه تغییراتی  $^2$  در محاسبه مقدار بیشینه یا کمینه تابعها بکار می‌رود و عبارت است از: بدست آوردن تابعی که تحت آن تابع موردنظر بیشینه یا کمینه شود.

### ۳.۳.۱ تابع گاما

تابع گاما  $^3$  را با نماد  $\Gamma$  نشان داده و به ازای عدد حقیقی  $\alpha$ ، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0. \quad (۸-۱)$$

تابع  $\Gamma$  دارای خواص زیر می‌باشد:

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha) \quad -۱$$

$$\Gamma(\alpha + n) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)\Gamma(\alpha) \quad -۲$$

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \alpha^n}{\alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n)}, \quad \alpha \neq 0, -1, -2, \dots \quad -۳$$

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad -۴$$

$$\Gamma(2z) = \frac{2^{2z-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}), \quad 2z \neq 0, -1, -2, \dots \quad -۵$$

$$\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{2n}n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad -۶$$

### ۴.۳.۱ تابع بتا

تابع بتا<sup>۱</sup> را با نماد  $\beta(p, q)$  نشان داده و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\beta(p, q) = \int_0^1 (1-t)^{p-1} t^{q-1} dt, \quad p, q > 0. \quad (۹-۱)$$

برخی از خواص تابع  $\beta$  به صورت زیر می‌باشد:

$$\beta(p, q) = \beta(q, p) \quad -۱$$

$$\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad -۲$$

$$\beta(p, q+1) = \frac{q}{p+q} \beta(p, q) \quad -۳$$

### ۵.۳.۱ تابع میتاژ-لفلر

یکی از مهمترین و کاربردی‌ترین توابعی که در مبحث حسابان کسری از آن استفاده می‌شود، تابع میتاژ-لفلر<sup>۲</sup> است

که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (۱۰-۱)$$

---

Beta function<sup>۱</sup>  
Mittag-Leffler function<sup>۲</sup>

به عنوان تعمیمی از تابع میتاز-لفلر تک پارامتری بالا، تابع میتاز-لفلر دو پارامتری به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \quad (11-1)$$

برخی خواص تابع میتاز-لفلر را به صورت زیر می‌توان بیان نمود:

$$E_{1,1}(z) = e^z \quad -1$$

$$E_{1,m}(z) = \frac{1}{z^{m-1}} \left( e^z - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{z^k}{k!} \right) \quad -2$$

$$E_{2,1}(z^2) = \cosh(z) \quad -3$$

$$E_{\alpha,1}(z) = E_{\alpha}(z) \quad -4$$

$$E_{\gamma, \gamma}(z^{\gamma}) = \frac{\sinh(z)}{z} \quad -5$$

## ۴.۱ معادلات انتگرال

یک معادله انتگرال معادله‌ای است که در آن، تابع مجهول در زیر علامت انتگرال ظاهر می‌شود. مثال عمومی این معادلات برای تابع مفروض  $u$  به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t) u(t) dt, \quad (12-1)$$

که در آن  $k(x, t)$  هسته معادله انتگرال نامیده می‌شود و  $b(x), a(x)$  کران‌های انتگرال هستند. لازم به ذکر است که توابع  $k$  و  $f$  توابعی معلوم هستند.

### معادلات انتگرال خطی و غیرخطی

شکل کلی معادلات انتگرال خطی را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} k(x, t) u(t) dt, \quad (13-1)$$

و شکل کلی معادلات انتگرال غیرخطی که در این پایان‌نامه مورد استفاده قرار می‌گیرد به صورت زیر است:

$$h(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{a(x)}^{b(x)} F(x, t, u(t)) dt. \quad (14-1)$$