بسم الله الرحمن الرحیم

دانشکده علوم

گروه ریاضیات و کاربردها

حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از درونیابی گاوسی

استاد راهنما:

دکتر محمد ضارب‌نیا

استاد مشاور:

دکتر اکبر جعفری شاعرلر

توسط:

سکینه خانی کشکی

دانشگاه محقق اردبیلی

مهر ۱۳۹۱

تقدیر و تشکر:

سپاس خدایی را که اندیشیدن آموخت و آموخت که باید در برابر کسانی که دست به دست هم می‌دهند تا اندیشه‌ها در راه تعالی انسان تجلی یابند سپاس‌گزار بود. اکنون که این دفتر با لطف و عنایت الهی به پایان آمد جا دارد از استاد فرزانه و ارجمندم جناب آقای دکتر محمد ضارب‌نیا، علاوه بر این‌که با بزرگواری خاص خویش همواره مهربانانه پذیرای اینجانب بوده و از راهنماییهای ارزنده‌ی خویش دریغ نفرموده‌اند، در دوران تحصیلم در مقطع کارشناسی ارشد بهره‌ی فراوانی از دانش ایشان بردم نهایت تشکر و سپاس را بجا آورم و توفیق روزافزون برایشان از ایزد منان خواستارم. از جناب آقای دکتر جعفری که زحمت مطالعه و مشاوره‌ی این پایان‌نامه را تقبل نموده‌اند، همچنین از استاد گرانمایه جناب آقای دکتر عبداله برهانی‌فر که زحمت بازخوانی و داوری این رساله را پذیرفته‌اند کمال امتنان را دارم.

در پایان لازم می‌دانم از پدر و مادر عزیزم که هستی خود را مدیون بزرگواری و محبتشان هستم خاضعانه سپاس‌گزاری نموده و بر دستان پر مهرشان بوسه زنم. همچنین وظیفه‌ی خود می‌دانم از برادر عزیزم که همواره در طول تحصیل متحمل زحماتم بود و تکیه‌گاه من در مواجهه با مشکلات و حمایت و دل‌گرمی بی‌منتهای ایشان همواره قوت قلبی برای ادامه‌ی راهم بوده، تشکری ویژه و صمیمانه داشته باشم و از خداوند متعال برای ایشان توفیق سعادت و کامیابی را مسئلت نمایم. امید که روزی بتوانم ذره‌ای از محبت‌های ایشان را جبران کنم.

نام خانوادگی: خانی کشکی **نام:** سکینه
عنوان پایان نامه : حل عددی معادلات انتگرال با استفاده از درونیابی گاوسی
استاد راهنما: دکتر محمد ضارب‌نیا
استاد مشاور: دکتر اکبر جعفری شاعرلر
مقطع تحصیلی: کارشناسی ارشد **رشته:** ریاضی کاربردی **گرایش:** آنالیزعددی **دانشگاه:** محقق اردبیلی **دانشکده:** علوم ریاضی **تاریخ فارغ التحصیلی:** ۱۳۹۱/۷/۳ **تعداد صفحه:** ۷۷
کلید واژه‌ها : معادله انتگرال فردهلم، معادله انتگرال همرشتاین، معادله انتگرال ولترا، درونیابی گاوسی، روش نیسترم، آنالیز همگرایی
چکیده: در این پایان‌نامه، یک تقریب عددی بر اساس روش درونیابی گاوسی برای حل معادله انتگرال فردهلم نوع دوم، معادله انتگرال غیر خطی از نوع همرشتاین و معادله انتگرال ولترای نوع دوم به دست می‌آوریم. همچنین همگرایی روش گاوسی را به طور تحلیلی مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای نشان دادن دقت و کارایی روش، روش گاوسی برای حل معادلات ذکر شده به کار برده شده است.

فهرست مندرجات

لیست اشکال

لیست جداول

مقدمه

می‌دانیم که معادلات انتگرال، یکی از مهمترین معادلات به دست آمده از رشته‌های مختلف، مانند فیزیک، شیمی، مهندسی، زیست‌شناشی و غیره می‌باشد.

با توجه به اینکه حل تحلیلی دسته‌ای از این معادلات وجود ندارد یا به راحتی قابل حل نمی‌باشد، لذا برای حل این مشکل از روش‌های عددی استفاده می‌کنیم. در روش‌های عددی، برای حل معادلات انتگرال دو عامل درونیابی و انتگرال‌گیری عددی حائز اهمیت می‌باشد.

با توضیحات داده شده، در این پایان نامه با به دست آوردن اطلاعاتی در مورد معادلات انتگرال، درونیابی و انتگرال‌گیری عددی، درونیابی گاوسی را مد نظر قرار داده و سپس با استفاده از درونیابی گاوسی، انتگرال‌گیری عددی را هم برای این دسته از معادلات به دست می آوریم.

با ارائه دادن فرمول‌هایی برای قانون‌های درونیابی و انتگرال‌گیری عددی معادلات انتگرال فردهلم، همرشتاین و ولترا را با استفاده از روش نیسترم گسسته‌سازی می‌کنیم. نتیجه این گسسته‌سازی، یک سیستم جبری می‌باشد که این سیستم جبری با روش‌های مختلف قابل حل می‌باشد. با در نظر گرفتن جواب به دست آمده از حل سیستم جبری و با استفاده از روش نیسترم، یک جواب تقریبی برای معادلات انتگرال فردهلم، همرشتاین و ولترا ارائه خواهیم داد. با استفاده از قضایا، به صورت تحلیلی نشان می‌دهیم جواب تقریبی به دست آمده از روش ارائه شده به جواب دقیق مساله همگرا است.

برای نشان دادن این ادعا از منابع مختلف مثال‌هایی را جمع آوری کرده و این مثال‌ها را با روش ارائه شده و با استفاده از نرم‌افزار ریاضی متمتیکا حل می‌کنیم. سپس نتایج عددی به دست آمده را که همان جواب تقریبی می‌باشد، با نتایج حاصل از جواب تحلیلی مقایسه می‌کنیم و انتظار داریم که نتایج حاصله بحث‌های تحلیلی را مورد تائید قرار دهند.

فصل ۱

مقدمات و مفاهیم اولیه

مطالب این فصل از مراجع [۱]،[۳]، [٦]، [۵]، [۷]، [۲۴]، [۱۱]، [۱۸]، [۲۵] می‌باشد. بخش ۱.۱ شامل تاریخچه‌ای از درونیاب گاوسی و همچنین معادلاتی که با این روش حل شده‌اند می‌باشد. در بخش ۲.۱ تعاریف و مفاهیمی که در فصل‌های بعدی نیاز می‌باشد آورده شده است. در بخش ۳.۱ تابع گاوسی را معرفی کرده و نشان داده شده که مجموع گاوسی تقریبی از یک می‌باشد، همچنین به تعریف درونیابی گاوسی و بررسی خطای آن می‌پردازیم. بخش ۴.۱ شامل روش حل دستگاه معادلات خطی می‌باشد. و در بخش ۵.۱ تاریخچه‌ی معادلات انتگرال، دسته‌بندی و کاربردهای معادلات انتگرال آورده شده است.

۱.۱ مقدمه

روش درونیابی گاوسی [۱] در سال ۱۹۹۱ توسط مازیا [۲] معرفی و تحت عنوان، تخمین تقریبی [۳] نام گرفت. در سال‌های بعد، کاربردهای زیادی از این روش توسط اشمیت [۴] و مازیا ارائه شد، که عبارتند از: تقریب کمترین مربعات، عملگرهای انتگرال کابچور [۵]، تقریب موجک [٦] و غیره.

[۱] quasi-interpolation
[۲] Maz'ya
[۳] Approximate Approximation
[۴] Schmidt
[۵] cubature
[٦] walelet

مفهوم تخمین تقریبی و نتایج آن در کتاب‌های روش نقطه‌ی مرزی و تقریب در ریاضیات با استفاده از عناصر متناهی و کاربرد آن، آورده شده است، لذا این مفاهیم در سال‌های بعد، از جنبه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفت. از خصوصیات مهم روش درونیابی گاوسی این می‌باشد، که علاوه بر این‌که روی تمام فضا بحث می‌شود، امکان به دست آوردن فرمول صریح برای مقادیر مختلف عملگر انتگرال و دیفرانسیل بر اساس توابع اعمال شده می‌باشد.

در سال ۲۰۰۵ زانگ مین[۱] [۲۵]، گره‌های دینامیکی و شکل تنظیمات پارامتر شبیه‌سازی شوک موج[۲] را با استفاده از درونیابی گاوسی مورد مطالعه قرار داد. در سال ۲۰۰۶ رانگ جن[۳] و زانگ مین[۵]، در کاربرد روش درونیابی گاوسی برای حل معادلات برگر پیشگام شدند و در سال ۲۰۰۷ به حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی با استفاده از درونیابی گاوسی پرداختند[۶]. در سال ۲۰۱۰ حل عددی معادلات برگر[۴]– فیشر[۵] با استفاده از درونیابی گاوسی، توسط جان گانگ[۶] و ون– شنگ کانگ[۷] [۷]، ارائه شد. و اخیراً روش درونیابی گاوسی برای توابع خطی، توسط ونوگائو[۸] و زانگ مین [۲۴]، ارائه شده است و ژیانگ[۹] و رن– هانگ وانگ[۱۰] [۱۱] نیز به حل عددی یک بعدی معادلات ساین–گوردون[۱۱] با استفاده از درونیابی گاوسی پرداخته‌اند، و مقالات دیگر که نشان دهنده‌ی اهمیت این روش می‌باشد.

۲.۱ تعاریف و مفاهیم اولیه

در این بخش برخی از تعاریف و مفاهیمی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند را مرور می‌کنیم.

۱.۲.۱ تعریف

---

[۱] Zangmin
[۲] wave
[۳] Ronghua Chen
[۴] Burger
[۵] Fisher
[۶] Chun-Gang
[۷] Wen-Sheng kang
[۸] Wenwu Gao
[۹] Zi–Wu Jiang
[۱۰] Ren-Hong wang
[۱۱] Sine–Gordon

تابع f راهموار گویند، هرگاه تابع f و مشتق آن تا مرتبه n ام پیوسته باشند.

۲.۲.۱ تعریف

تابع $f(x)$ را متناوب با دوره‌ی تناوب T گویند، هرگاه:

الف) به ازای هر $x \in D_f$، $x+T \in D_f$،

ب) $f(x+T) = f(x)$.

۳.۲.۱ تعریف

فرض کنید تابع f متناوب با دوره تناوب $2a$ باشد، شکل مختلط سری فوریه[1] را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{in\pi \frac{x}{a}}, \qquad C_n = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} f(x) e^{-in\pi \frac{x}{a}}\, dx,$$

که در آن C_n را ضرایب فوریه گویند.

۴.۲.۱ تعریف (تبدیل فوریه)

تابع زیر را در نظر می‌گیریم:

$$Ff(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx} f(x)\, dx.$$

تابع $Ff(w)$ را تبدیل فوریه f و F راعملگر تبدیل فوریه گویند.

۵.۲.۱ تعریف

مجموع پواسون[2] را می‌توان به فرم زیر تعریف کرد:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} u(x+m) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} Fu(v) e^{2\pi vxi},$$

که در آن Fu، تبدیل فوریه تابع u می باشد.

۶.۲.۱ تعریف

تابع گاوسی[3] تابعی است به شکل نمایی و به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$f(x) = ae^{-\frac{(x-b)^2}{2c^2}},$$

[1] Fourier
[2] Poisson
[3] Gaussi

که در آن a و b و c ضرایب ثابت حقیقی و مثبت هستند.

۷.۲.۱ تعریف

تابع دلتای ژاکوبی[1] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\nu_\varepsilon(z|\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2} e^{2inz}.$$

۸.۲.۱ تعریف (نرم طبیعی یا نرم القایی)

فرض کنید $||.||$ یک نرم برداری روی $\mathbb{C}^m$ و $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. در این صورت نرم طبیعی متناظر به این نرم برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$||A|| = \max_{||x||=1} ||Ax||.$$

با توجه به این که ماکزیمم و مینیمم توابع پیوسته روی مجموعه‌های بسته و کراندار موجود است، وجود $||A||$ تضمین می‌شود.

۹.۲.۱ تعریف

تابع دلتای دیراک[2] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty & t = t_0, \\ 0 & t \neq t_0. \end{cases}$$

۱۰.۲.۱ تعریف

تابع دلتای کرونکر[3] به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j, \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

---

[1] Jacobi
[2] Dirac
[3] Kronecker

۱۱.۲.۱ تعریف

تابع خطا برای $a, b \in \mathbb{R}$ و $a \leq b$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$erf(a,b) := \frac{۲}{\sqrt{\pi}} \int_a^b e^{-u^۲}\, du.$$

۱۲.۲.۱ تعریف(نامساوی کوشی[۱] — شوارتز[۲])

مربع حاصل‌ضرب داخلی دو بردار از حاصل‌ضرب مربعات نرم‌های آن‌ها بیشتر نیست یعنی:

$$| < x, y > |^۲ \leq ||x||^۲||y||^۲.$$

قضیه ۱.۲.۱

فرض کنید f تابعی روی $[-c, c]$ تکه‌ای پیوسته با دوره تناوب $۲c$ باشد، در این صورت برای هر ثابت $a \in \mathbb{R}$ داریم:

$$\int_{-c}^{c} f(x)\, dx = \int_{a-c}^{a+c} f(x)\, dx.$$

قضیه ۲.۲.۱

اگر $f \in c^n[a,b]$ و $f^{(n+۱)}$ بر (a,b) موجود باشد، آنگاه برای هر c و x متعلق به بازه‌ی $[a,b]$ داریم:

$$f(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k + R_n(x),$$

که در آن

$$R_n(x) = \frac{۱}{(n+۱)!} f^{n+۱}(t)(x-c)^{n+۱},$$

$p_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} \frac{۱}{k!} f^{(k)}(c)(x-c)^k$ را چند جمله‌ای تیلور[۳] درجه‌ی n تابع f و $R_n(x)$ را باقی‌مانده‌ی $p_n(x)$ می‌نامند[۲۳].

---

[۱] Cauchy

[۲] Schwarz

[۳] Taylor

در این جا نکاتی که در فصل‌های بعد استفاده می‌شوند، را یادآوری می‌کنیم:

- فرض کنید f تابعی دلخواه باشد، در این صورت رابطه‌ی زیر را خواهیم داشت:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) = \begin{cases} f(0) + 2\sum_{m=1}^{\infty} f(m) & \text{تابعی زوج } f, \\ f(0) & \text{تابعی فرد } f. \end{cases}$$

- اگرتابع f همگرا و انتگرال‌پذیر باشد، جای $\sum$ و $\int$ را می‌توان عوض کرد، یعنی

$$\int \sum = \sum \int .$$

- از سری هندسی و مشتقات مرتبه ی اول و دوم آن، روابط زیر را می‌توان نوشت:

$$\sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{q}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} kq^k = \frac{q}{(1-q)^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^2 q^k = \frac{q^2+q}{(1-q)^3}.$$

که در آن $|q| < 1$.

- رابطه‌ی زیر خاصیت جمع پذیری انتگرال‌ها را نشان می‌دهد:

$$\sum_{m=-n}^{n} \int_{m}^{m+1} = \int_{-n}^{-n+1} + \int_{-n+1}^{-n+2} + \int_{-n+2}^{-n+3} + \ldots + \int_{n-1}^{n} = \int_{-n}^{n} .$$

۳.۱ درونیابی گاوسی

تابع $\theta(x, D)$ و $D > 0$ را به شکل زیر در نظر می‌گیریم:

$$\theta(x, D) = \frac{1}{\sqrt{\pi D}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x-m)^2}{D}} , \qquad (1.1)$$

ابتدا سری فوریه تابع $\theta(x, D)$ و ضرایب آن را محاسبه می‌کنیم:

با توجه به این‌که تابع $\theta(x, D)$ متناوب با دوره تناوب یک می‌باشد، لذا با استفاده از تعریف سری فوریه رابطه‌ی زیر را می‌توان نوشت:

$$\theta(x,D)=\sum_{v=-\infty}^{\infty}c_v e^{۲\pi vxi},\qquad c_v=\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}\theta(x,D)e^{-۲\pi vxi}\,dx\,. \tag{۲.۱}$$

با جایگذاری تابع $\theta(x,D)$ در فرمول بالا ضرایب فوریه را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$c_v=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\int_{-\frac{۱}{۲}}^{\frac{۱}{۲}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(x-m)^۲}{D}}e^{-۲\pi vxi}\,dx.$$

با استفاده از قضیه‌ی ۱.۲.۱ خواهیم داشت:

$$c_v=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\int_{۰}^{۱}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{\frac{-(x-m)^۲}{D}}e^{-۲\pi vxi}\,dx.$$

با توجه به همگرا بودن رابطه‌ی بالا و با استفاده از یادآوری (۲) رابطه‌ی بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$c_v=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{۰}^{۱}e^{\frac{-(x-m)^۲}{D}}e^{-۲\pi ivx}\,dx.$$

چون رابطه‌ی بالا گسسته می‌باشد، می توانیم هم به حدود انتگرال‌گیری و هم به خود تابع مقدار ثابتی را اضافه یا کم کنیم لذا خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}c_v&=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{m}^{m+۱}e^{\frac{-(x-m+m)^۲}{D}}e^{-۲\pi v(x+m)i}\,dx\\&=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{m}^{m+۱}e^{\frac{-x^۲}{D}}e^{-۲\pi vxi}e^{-۲\pi vmi}\,dx.\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم که $e^{-۲\pi vmi}=\cos(-۲\pi vm)+i\sin(-۲\pi vm)$، با جایگذاری در رابطه‌ی بالا می‌توان دید که

$$c_v=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{m}^{m+۱}e^{\frac{-x^۲}{D}}e^{-۲\pi ivx}(\cos(-۲\pi vm)+i\sin(-۲\pi vm))\,dx.$$

چون $\cos(۲\pi vm)=۱$ و $\sin(۲\pi vm)=۰$ لذا داریم

$$c_v=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{m}^{m+۱}e^{\frac{-x^۲}{D}}e^{-۲\pi ivx}\,dx.$$

با استفاده از یادآوری (۴) رابطه‌ی بالا را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$c_v=\frac{۱}{\sqrt{\pi D}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-x^۲}{D}}e^{-۲\pi ivx}\,dx.$$

با اضافه و کم کردن $\pi^2 Dv^2$ رابطه‌ی بالا را به فرم زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} c_v &= \frac{1}{\sqrt{\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{D} - 2\pi i v x + \pi^2 D v^2 - \pi^2 D v^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi D}} e^{-\pi^2 D v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\frac{x}{\sqrt{D}} + i\pi v \sqrt{D})^2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi D}} e^{-\pi^2 D v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x + Dvi\pi)^2}{D}}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi D}} e^{-\pi^2 D v^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{D}}\, dx. \end{aligned} \tag{۳.۱}$$

حال انتگرال $k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{D}}\, dx$ را با روش انتگرال‌گیری قطبی به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} k &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{D}}\, dx \\ k^2 &= k \times k = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{D}}\, dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-y^2}{D}}\, dy \\ k^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-(x^2+y^2)}{D}}\, dx\, dy. \end{aligned}$$

از تغییر متغیر $x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$ استفاده می‌کنیم، واضح است که $|J(r,\theta)| = r$، بنابراین

$$\begin{aligned} k^2 &= \int_{0}^{\infty} \int_{0}^{2\pi} r e^{\frac{-r^2}{D}}\, d\theta\, dr \\ &= \int_{0}^{\infty} 2\pi r e^{\frac{-r^2}{D}}\, dr \\ &= \pi D. \end{aligned}$$

می‌توان نتیجه گرفت که $k = \sqrt{\pi D}$. حال k را در رابطه‌ی (۳.۱) جایگذاری می‌کنیم و ضرایب فوریه را به فرم زیر به دست می‌آوریم:

$$c_v = \frac{e^{-\pi^2 D v^2}}{\sqrt{\pi D}} \sqrt{\pi D} = e^{-\pi^2 D v^2}.$$

باجایگذاری ضرایب فوریه در رابطه‌ی (۲.۱) سری فوریه تابع $\theta(x, D)$ به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\theta(x, D) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^2 v^2 D} e^{2\pi i v x}. \tag{۴.۱}$$

رابطه‌ی $e^{2\pi v x i} = \cos 2\pi v x + i \sin 2\pi v x$ را در رابطه‌ی (۴.۱) جایگذاری می‌کنیم و آن را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned}\theta(x,D) &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}e^{۲\pi i v x}\\ &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\left(\cos(۲\pi v x)+i\sin(۲\pi v x)\right)\\ &= \sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\cos(۲\pi v x)+i\sum_{v=-\infty}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\sin(۲\pi v x),\end{aligned}$$

از طرفی می‌دانیم که تابع $e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\cos(۲\pi v x)$ زوج و تابع $e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\sin(۲\pi v x)$ فرد می‌باشد لذا با توجه به یادآوری (۱) عبارت زیر را خواهیم داشت:

$$\theta(x,D) = ۱ + ۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{-\pi^{۲}Dv^{۲}}\cos(۲\pi v x) + ۰. \qquad (۵.۱)$$

بنابراین تابع $\theta(x,D)$ حالت خاصی از فرمول مجموع پواسون می‌باشد.

یعنی تفاضل $\theta(x,D)$ از یک، برابر با سری نامتناهی

$$۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\cos(۲\pi v x), \qquad (۶.۱)$$

است که در آن ضرایب $e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}$ و... $v = ۱,۲,۳,$ خیلی کوچک و وابسته به D می‌باشند. بویژه اگر $D \geq ۱$، برای هر x می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}&۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\cos(۲\pi v x)\\ &\leq ۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{-\pi^{۲}v^{۲}D}\\ &\leq ۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{-\pi^{۲}vD}\\ &= ۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{(-\pi^{۲}D)^{v}}\\ &= \frac{۲e^{-\pi^{۲}D}}{۱-e^{-\pi^{۲}D}} := \varepsilon,\end{aligned}$$

باجایگذاری در رابطه‌ی (۵.۱) و قدر مطلق‌گیری از دو طرف رابطه‌ی زیر را به دست می آوریم:

$$|\theta(x,D) - ۱| = ۲\sum_{v=۱}^{\infty} e^{-\pi^{۲}Dv^{۲}}|\cos(۲\pi v x)|$$