دانشگاه بیرجند

دانشکده علوم ریاضی و آمار

گروه ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد

ریاضی محض، گرایش جبر

عنوان

پوچ توانی و حل پذیری گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی

استاد راهنما

دکتر محمد مهدی نصرآبادی

استاد مشاور

دکتر حسین اقدامی

نگارنده

شفیق بحری

شهریور ۱۳۹۱

چکیده

خودریختی σ از گروه G را یک خودریختی مرکزی گوییم هرگاه σ بر گروه $G/Z(G)$ خودریختی همانی القا کند. به عبارت دیگر برای هر عنصر g از G، $g^{-1}\sigma(g)$ عنصری از مرکز گروه G باشد. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی های مرکزی گروه G را با نماد $Aut_c(G)$ نمایش می دهیم. این مجموعه یک زیرگروه نرمال از $Aut(G)$ تشکیل می دهد. اگر G یک گروه آبلی باشد آنگاه $Aut_c(G)$ با گروه $Aut(G)$ یکسان خواهد بود.

گروه خودریختی های مرکزی یک گروه متناهی در بحث خودریختی ها از اهمیت بسیاری برخوردار است و پژوهشگران بسیاری به مطالعه و بررسی این گروه پرداخته‌اند.

در این پایان نامه به طور کامل پوچ توانی و حل پذیری گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی را مورد بررسی قرار می دهیم. ارائه‌ی شرایط لازم و کافی برای پوچ توانی گروه $Aut_c(G)$ در حالتی که G یک گروه متناهی است، از مهم‌ترین اهداف این پایان نامه است. در حالتی که G یک p- گروه متناهی است و در آن $Z(G) \leqslant \Phi(G)$، یک کران بالا برای کلاس پوچ توانی گروه $Aut_c(G)$ ارائه می دهیم. مشابه این کارها را برای بررسی حل پذیری گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی انجام خواهیم داد.

واژگان کلیدی: خودریختی مرکزی؛ گروه پوچ توان؛ گروه حل پذیر.

تعداد صفحات پایان نامه: ۱۰۱

تقدیم به ساحت مقدس امیرمومنان حضرت علی ابن ابیطالب (ع)،

پدر و مادر مهربان و بزرگوارم

و

خانواده ی عزیزم

الهی... [1]

الهی! در جلال، رحمانی، در کمال، سبحانی، نه محتاج زمانی و نه آرزومند مکانی، نه کسی به تو ماند و نه به کسی مانی، پیداست که در میان جانی، بلکه جان زنده به چیزی است که تو آنی.

الهی! ضعیفان را پناهی، قاصدان را بر سر راهی، مومنان را گواهی، چه عزیز است آن کس که تو خواهی.

الهی! می بینی و می دانی و برآوردن می توانی. الهی! چو حاضری چه جویم و چون ناظری چه گویم؟

الهی! تو بساز که دیگران ندانند و تو نواز که دیگران نتوانند. الهی! چون توانستم، ندانستم و چون دانستم، نتوانستم.

الهی! هر که را عقل دادی، چه ندادی؟ و هر که را عقل ندادی، چه دادی؟!

الهی! ابوجهل، از کعبه می آید! و ابراهیم از بتخانه! کار به عنایت بود، باقی بهانه.

الهی! «دعا» به درگاه تو لجاج است، چون دانی که بنده به چه محتاج است.

ای خالق ذوالجلال، نومید مکن آن را که به درگهت نیازی دارد.

اگر تنهاترین تنها شوم، باز خدا هست

او جانشین همه نداشتن هاست...

---

[1] مناجاتی از خواجه عبدالله انصاری.

سپاس گزاری...

سپاس بیرون از اندازه و قیاس، سزاوار قائمی است بالذات، غایب از عالم اندیشه و حواس و ستایش بی حدّ و احصا، لایق صاحبی است مأمول و مرتجی در زمان شدت و رخا و درود بی نهایت به روان پاک نخستین پاسخ دهنده به ندای الهی و برگزیده‌ی بی‌چون؛ فاتح ابواب خیر و رشاد، خاتم رسولان پاک نهاد، منصور مؤید، محمود احمد، ابی القاسم محمد صلی الله علیه و آله، و بر پاکان و پاکیزگان از فرزندان آن سرور پیمبران.

بدین وسیله مراتب سپاس و قدردانی خود را نسبت به استاد راهنمای عزیز و بزرگوارم، جناب آقای دکتر نصرآبادی ابراز می‌دارم که بدون راهنمایی‌های ارزنده و سعه‌ی صدر فراوان ایشان در مراحل پژوهش، انجام این تحقیق میسر نبود. همچنین مراتب قدردانی و تشکر خود را نسبت به استاد مشاور عزیزم جناب آقای دکتر اقدامی که زحمت مشاوره‌ی اینجانب را برعهده داشتند و اساتید ارجمند آقایان دکتر حسینی و دکتر فضائلی که زحمت داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند ابراز می‌دارم.

از همه‌ی دوستان و همکلاسی‌های عزیزم بخصوص آقای سعید کاکاعبدالله و خانم‌ها اکرم چاره خواه مقدم، لیلا مرادی و فاطمه باباپور و تمامی دوستان گرانقدری که به نوعی بر گردن بنده حقّی دارند نهایت تشکر و سپاسگزاری را دارم.

در نهایت از پدر و مادر عزیز، مهربان و بزرگوارم، برادر عزیزم توفیق و خواهران عزیزتر از جانم که هر چه در توان داشتند برای کسب تحصیل من دریغ نکرده‌اند کمال تشکر و قدردانی را دارم. امید است که بتوانم جوابگوی مهربانی‌های این عزیزان باشم.

شفیق بحری

شهریور ۱۳۹۱

فهرست مطالب

پیشگفتار

خودریختی σ از گروه G را یک خودریختی مرکزی G گوییم هرگاه σ بر گروه $G/Z(G)$ خودریختی همانی القا کند. به عبارت دیگر برای هر عنصر g از G داشته باشیم $g^{-1}\sigma(g) \in Z(G)$. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های مرکزی گروه G را با نماد $Aut_c(G)$ نمایش می دهیم. $Aut_c(G)$ یک زیرگروه نرمال از $Aut(G)$ تشکیل می دهد.

بررسی مرتبه‌ی گروه $Aut_c(G)$ در حالتی که G یک گروه متناهی است در سال ۱۹۵۱ توسط هیوس [۲] [۱۰] انجام شده است. پیش از این در سال ۱۹۳۷، فیتینگ[۳] در [۶] با استفاده از سری چیف برای یک گروه متناهی، رابطه‌ای برای محاسبه‌ی مرتبه‌ی گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی ارائه داد.

گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی در بحث خودریختی ها از اهمیت بسیاری برخوردار است و بسیاری از پژوهشگران به مطالعه‌ی گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی پرداخته‌اند. از جمله می توان به کارهای صورت گرفته توسط ادنی و ین [۴] (۱۹۶۵)، کوران[۵] و مک کوان[۶] (۱۹۸۶، ۲۰۰۱ و ۲۰۰۴)، ساندرس[۷] (۱۹۶۹)، جمالی و موسوی (۲۰۰۲و ۲۰۰۵)، جعفری (۲۰۰۶) و جمالی و جعفری (۲۰۰۸) اشاره کرد. از بین کارهای صورت گرفته مقاله‌ی ادنی و ین [۱] به جهت معرفی چند همریختی از اهمیت بسیاری برخوردار است و پایه‌ی بسیاری از کارها در زمینه‌ی خودریختی مرکزی قرار گرفته است. ادنی و ین نشان دادند که در گروه متناهی G که عامل آبلی غیربدیهی نداشته باشد، یک تناظر دوسویی بین $Aut_c(G)$ و $Hom(G/G', Z(G))$ برقرار است. در سال ۲۰۰۲ جمالی و موسوی نشان دادند که اگر G یک گروه متناهی باشد که در آن $Z(G) \leqslant G'$ آنگاه $Aut_c(G)$ یک گروه آبلی است.

در این پایان نامه به طور کامل به بررسی پوچ‌توانی و حل‌پذیری گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی می پردازیم. این پایان نامه شامل چهار فصل است. در فصل اول به بیان تعاریف و قضیه‌های اساسی از جبر مقدماتی که در فصل‌های بعدی مورد استفاده قرار گرفته است می پردازیم. در فصل دوم به معرفی خودریختی مرکزی و بیان برخی از خواص اساسی خودریختی‌های مرکزی یک گروه می پردازیم. خواهیم دید که هر خودریختی مرکزی از گروه G عناصر زیرگروه G' را نقطه

[۲] N. J. Hughes
[۳] H. Fitting
[۴] Adney and Yen
[۵] M. J. Curran
[۶] Mc Caghan
[۷] Sanders

به نقطه ثابت نگه می دارد. همچنین نشان می دهیم که برای هر گروه آبلی مانند G هر خودریختی دلخواه، یک خودریختی مرکزی است. سپس با معرفی چند همریختی، ارتباط میان گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی مانند G و $Hom(G/G', Z(G))$ را بیان می کنیم. با تعریف گروه به طور محض ناآبلی و ارائه‌ی چند مثال، نشان می دهیم که اگر G یک گروه به طور محض ناآبلی متناهی باشد آنگاه یک تناظر دوسویی بین $Aut_c(G)$ و $Hom(G/G', Z(G))$ وجود دارد. سرانجام در بخش سوم نشان می دهیم که اگر G یک p- گروه غیرآبلی متناهی باشد آنگاه $Aut_c(G)$ یک p- گروه خواهد بود.

در فصل سوم به بررسی پوچ‌توانی و حل‌پذیری گروه خودریختی‌های مرکزی یک گروه آبلی متناهی می پردازیم. از آنجایی که هر گروه آبلی متناهی را می توان به صورت حاصل‌ضرب مستقیم زیرگروه‌های دوری نوشت که مرتبه‌ی هر کدام توان مثبتی از یک عدد اول است، لذا ما توجه خود را به p- گروه‌های آبلی متناهی (p یک عدد اول است) معطوف می کنیم. در ابتدا یک رابطه برای محاسبه‌ی تعداد خودریختی‌های مرکزی یک گروه آبلی ارائه می دهیم. با استفاده از این رابطه نشان می دهیم که اگر G یک ۲- گروه آبلی متناهی با پایاهای متمایز باشد آنگاه $Aut_c(G)$ یک گروه پوچ توان است. سپس به بررسی حل‌پذیری گروه خودریختی‌های مرکزی یک گروه آبلی متناهی می پردازیم. در این فصل به تعیین کلاس پوچ‌توانی و طول مشتق گروه خودریختی‌های مرکزی یک گروه آبلی متناهی نیز می پردازیم.

در فصل چهارم به بررسی پوچ‌توانی و حل‌پذیری گروه خودریختی مرکزی گروه‌های غیرآبلی متناهی می پردازیم. نشان خواهیم داد که اگر G یک گروه به طور محض ناآبلی باشد، آنگاه $Aut_c(G)$ پوچ‌توان است. نشان می دهیم که اگر G یک p-گروه غیرآبلی متناهی باشد که p یک عدد اول فرد است، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه $Aut_c(G)$ پوچ‌توان باشد آن است که G به طور محض ناآبلی باشد. در حالتی که G یک گروه غیرآبلی باشد که به طور محض ناآبلی نباشد، یک شرط لازم و کافی برای پوچ‌توانی $Aut_c(G)$ ارائه می دهیم. ارائه‌ی کران بالایی برای کلاس پوچ- توانی گروه $Aut_c(G)$ در حالتی که G یک p-گروه غیرآبلی متناهی باشد که در آن $Z(G) \leq \Phi(G)$ از اساسی‌ترین کارهای این پایان‌نامه است. در ادامه‌ی این فصل به حل‌پذیری گروه خودریختی مرکزی یک گروه غیرآبلی متناهی می پردازیم.

بررسی پوچ‌توانی و حل‌پذیری گروه خودریختی مرکزی یک گروه متناهی، به عنوان موضوعی بسیار مهم در زمینه‌ی گروه خودریختی‌ها، می تواند زمینه‌ی مساعدی برای پژوهش بیشتر در زمینه‌ی حل‌پذیری و پوچ‌توانی گروه خودریختی‌ها فراهم کند.

فصل ۱
پیش نیازها

۱.۱ مقدمه

در این فصل به بیان تعاریف و قضیه‌های اساسی و نتایجی که در فصل‌های بعدی به آن‌ها نیاز خواهیم داشت، می پردازیم. بیشتر مطالب از جبر مقدماتی دانسته فرض می شوند بجز تعاریف و قضیه‌های اساسی که کاربرد بیشتری دارند. برهان بیشتر قضایا را بیان خواهیم کرد و بقیه را به منابع، ارجاع خواهیم داد.

۲.۱ مفاهیمی از نظریه‌ی گروه ها

تعریف ۱.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و H زیرمجموعه‌ای ناتهی از G باشد. مرکزساز H در G را با نماد $C_G(H)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$C_G(H) = \{y \in G | xy = yx, \ \ \forall x \in H\}.$$

تعریف ۲.۲.۱. فرض کنید G یک گروه و M زیرمجموعه ای ناتهی از G باشد. در این صورت نرمال ساز M در G را با نماد $N_G(M)$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$N_G(M) = \{g \in G | M^g = M\},$$

که در آن M^g مزدوج M در G است و به صورت زیر تعریف می شود

$$M^g = \{g^{-1}mg | \ m \in M\}.$$

تعریف ۳.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد و x_1، x_2، ...، x_n عناصری از G باشند. جابجاگر (تعویض‌گر) x_1 و x_2 را با نماد $[x_1, x_2]$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2.$$

در حالت کلی جابجاگر از وزن $n \geq 2$ به صورت استقرایی چنین تعریف می شود

$$[x_1, x_2, \cdots, x_n] = [[x_1, \cdots, x_{n-1}], x_n].$$

قرارداد می کنیم که $[x_1] = x_1$.

لم زیر برخی از خواص اساسی جابجاگرها را بیان می کند.

لم ۴.۲.۱. *فرض کنید x، y و z عناصری از یک گروه باشند. در این صورت*

الف) $[x, y] = [y, x]^{-1}$؛

ب) $[xy, z] = [x, z]^y[y, z]$ و $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ (*اتحادهای هال*[1])؛

پ) $[x, y^{-1}] = ([x, y]^{y^{-1}})^{-1}$ و $[x^{-1}, y] = ([x, y]^{x^{-1}})^{-1}$؛

ت) $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$ (*اتحاد هال- ویت*[2]).

برهان. به ۵.۱.۵ از [۱۸] مراجعه شود. □

تعریف ۵.۲.۱. فرض کنید X_1، X_2، ...، X_n زیرمجموعه‌های ناتهی از گروه G باشند. زیرگروه جابجاگ X_1 و X_2 را با نماد $[X_1, X_2]$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] | x_i \in X_i, \quad i = 1, 2 \rangle.$$

در حالت کلی زیرگروه جابجاگر X_1، X_2، ...، X_n با استقرا به صورت زیر تعریف می شود

$$[X_1] = X_1, \quad [X_1, X_2, \cdots, X_n] = [[X_1, \cdots, X_{n-1}], X_n], \ (n \geq 2).$$

در حالت خاص زیرگروه جابجاگر $[G, G]$ را زیرگروه مشتق G می‌نامیم و آن را با نماد G' نمایش می دهیم. بنابراین

$$G' = [G, G] = \langle [g_1, g_2] | g_i \in G, \quad i = 1, 2 \rangle.$$

لم ۶.۲.۱. *فرض کنید G یک گروه و N زیرگروه نرمالی از آن باشد. در این صورت*

[1] Hall's identities
[2] Hall-Witt's identity

الف) G' *زیرگروه نرمالی از* G *است و* G/G' *گروهی آبلی است؛*

ب) G/N *آبلی است اگر و تنها اگر* $N \geqslant G'$.

برهان. به ۱۱.۵ و ۱۲.۵ از [۲۵] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۲.۱. *فرض کنید* H *،* K *و* L *زیرگروه‌هایی از* G *باشند. در این صورت*

(۱) $[H,K] \trianglelefteq \langle H,K\rangle$؛

(۲) $[H,K]=[K,H]$؛

(۳) $[H,K] \subseteq K$ *اگر و تنها اگر* $H \subseteq N_G(K)$؛

(۴) *فرض کنید* $K \subseteq H$ *و* $K \trianglelefteq G$. *در این‌صورت* $H/K \subseteq Z(G/K)$، *اگر و تنها اگر* $[H,G] \subseteq K$؛

(۵) *اگر* H *،* K *و* L *در* G *نرمال باشند، آنگاه* $[HK,L]=[H,L][K,L]$؛

(۶) *برای هر درون ریختی* φ *از* G *،* $\varphi([H,K])=[\varphi(H),\varphi(K)]$. *بخصوص اگر* K *و* H *هر دو در* G *نرمال باشند، آنگاه* $[H,K]$ *در* G *نرمال است.*

برهان. به ۱.۲ از [۸] مراجعه شود. □

تعریف ۸.۲.۱. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان و n یک عدد طبیعی باشد. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های معکوس پذیر $n \times n$ که درایه‌های هر یک از آن ها در $\mathbb{F}$اند را با نماد $GL(n,F)$ نمایش داده و آن را گروه خطی عام (از درجه‌ی n بر $\mathbb{F}$) می نامیم.
مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از $GL(n,\mathbb{F})$ که دترمینان هر یک از آن‌ها برابر یک (عضو یکه‌ی میدان $\mathbb{F}$) است، زیرگروهی از $GL(n,\mathbb{F})$ تشکیل می دهند که آن را با نماد $SL(n,\mathbb{F})$ نمایش می دهیم و آن را گروه خطی خاص(از درجه‌ی n بر $\mathbb{F}$) می‌نامیم.

قرارداد. فرض کنید $\mathbb{F}$ یک میدان متناهی باشد و $|\mathbb{F}|=q$. در این صورت گروه های $GL(n,\mathbb{F})$ و $SL(n,\mathbb{F})$ را به ترتیب با نماد های $GL(n,q)$ و $SL(n,q)$ نمایش می دهیم.

قضیه ۹.۲.۱. *فرض کنید* n *یک عدد طبیعی و* q *توان مثبتی از یک عدد اول باشد. در این صورت*

الف) $|GL(n,q)|=(q^n-1)(q^n-q)(q^n-q^2)\cdots(q^n-q^{n-1})$؛

ب) $|SL(n,q)| = (q^n - ۱)(q^n - q)(q^n - q^۲)\cdots(q^n - q^{n-۱})/(q-۱)$.

برهان. به ۲.۲.۳ از [۲۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱۰.۲.۱. گروه G را یک گروه تاب‌دار (دوره‌ای) گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عنصر از G متناهی باشد. گروه G را یک گروه فارغ از تاب گوییم هرگاه مرتبه‌ی هر عضو غیر همانی از G نامتناهی باشد.

مثال ۱۱.۲.۱. واضح است که هر گروه متناهی، یک گروه تاب‌دار است. اما عکس مطلب برقرار نیست. به عنوان مثال گروه $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ یک گروه تاب‌دار نامتناهی است.

مثال ۱۲.۲.۱. گروه‌های جمعی $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$ و $\mathbb{R}$ گروه‌هایی فارغ از تاب هستند.

تعریف ۱۳.۲.۱. فرض کنید π مجموعه‌ای از اعداد اول و π' مکمل آن در مجموعه‌ی اعداد اول باشد. عنصر x از گروه تاب‌دار G را یک π-عنصر گوییم هرگاه در تجزیه‌ی مرتبه‌ی x به اعداد اول، تنها اعداد اولی ظاهر شوند که در مجموعه‌ی π قرار دارند. گروه متناهی G را یک π-گروه گوییم هرگاه در تجزیه‌ی $|G|$ به اعداد اول، تنها اعداد اولی ظاهر شوند که به مجموعه‌ی π تعلق دارند. π'-عنصر و π'-گروه به طور مشابه تعریف می شوند. بخصوص برای مجموعه‌ی تک عنصری $\{p\}$ از مفاهیم p-عنصر و p'-عنصر استفاده می کنیم. مجموعه‌ی همه‌ی اعداد اولی که در تجزیه‌ی مرتبه‌ی گروه متناهی G ظاهر می شوند را با نماد $\pi(G)$ نمایش می دهیم.

به عنوان مثال $\pi(S_۳) = \{۲,۳\}$. اگر عنصر x از گروه تاب‌دار G یک $۲'$-گروه باشد آنگاه x یک عنصر از مرتبه‌ی فرد است.

تعریف ۱۴.۲.۱. فرض کنید p یک عدد اول باشد. گروه G را یک p-گروه می‌نامیم هرگاه مرتبه‌ی هر عنصر از G توانی از p باشد. زیرگروه H از گروه G را یک p-زیرگروه می‌نامیم هرگاه H یک p-گروه باشد.

مثال ۱۵.۲.۱. گروه $D_۸ = \langle a,b | a^۴ = b^۲ = ۱, a^b = a^۳\rangle$ و $K = \langle a,b | a^۲ = b^۲ = ۱, ab = ba\rangle$ هر دو ۲-گروه‌های متناهی هستند و گروه $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \{\frac{m}{p^n} + \mathbb{Z} | m,n \in \mathbb{Z}\}$ یک p-گروه نامتناهی است.

قضیه ۱۶.۲.۱. *فرض کنید G گروه متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G یک p-گروه است اگر و تنها اگر به ازای عدد صحیح مثبتی مانند k، $|G| = p^k$.*

برهان. به ۶.۲.۷ از [۲۷] مراجعه شود. □

تعریف ۱۷.۲.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. کوچکترین عدد صحیح مثبت m (در صورت وجود) به قسمی که برای هر $x \in G$ داشته باشیم $x^m = ۱$، را نمای G می‌نامیم و آن را با نماد $exp(G)$ نمایش می دهیم. اگر چنین عددی موجود نباشد G را از نمای نامتناهی می گوییم.
اگر G یک گروه متناهی باشد در این‌صورت به وضوح $exp(G)$ کوچکترین مضرب مشترک مرتبه‌های اعضای G خواهد بود.

مثال ۱۸.۲.۱. گروه $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲$یک گروه متناهی از مرتبه‌ی ۴ و از نمای ۲ است. در حالی که گروه $\mathbb{Z}_۲ \times \mathbb{Z}_۲ \times \cdots$ یک گروه نامتناهی از نمای متناهی ۲ است.

تعریف ۱۹.۲.۱. فرض کنید m یک عدد طبیعی بزرگتر از یک باشد. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی اعداد طبیعی مانند n که $n < m$ و m و n متباین‌اند را با نماد $U(m)$ نمایش می‌دهیم. مجموعه‌ی $U(m)$ با عمل ضرب اعداد طبیعی به پیمانه‌ی m یک گروه آبلی تشکیل می دهد. این گروه را گروه کامل رده‌های باقی مانده‌ی کاهش یافته به پیمانه‌ی m گوییم و با همان نماد $U(m)$ نمایش می دهیم.

از نظریه‌ی اعداد مقدماتی معلوم است که $|U(m)| = \phi(m)$ که در آن ϕ تابع ضربی اویلر[۳] است.

لم ۲۰.۲.۱. *به ازای هر عدد اول p، گروه $U(p)$ یک گروه دوری از مرتبه‌ی $p - ۱$ است.*

برهان. به ۳.۵.۶ از [۲۳] مراجعه شود. □

۳.۱ گروه‌های آبلی و قضایای سیلو

تعریف ۱.۳.۱. فرض کنید $G_۱$، $G_۲$، $\ldots$ ، G_n ، n گروه باشند. در مجموعه‌ی $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ عمل دوتایی را چنین تعریف می کنیم

$$(g_۱, g_۲, \cdots, g_n)(g'_۱, g'_۲, \cdots, g'_n) = (g_۱ g'_۱, \cdots, g_n g'_n),$$

که در آن g_i و g'_i ها در G_iاند. به آسانی دیده می شود که مجموعه‌ی $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ با عمل فوق یک گروه است. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم (خارجی) گروه‌های $G_۱$، $G_۲$، $\ldots$ ، G_n می‌نامیم و آن را با همان نماد $G_۱ \times G_۲ \times \cdots \times G_n$ یا $\prod_{i=۱}^{n} G_i$ نشان می دهیم.

[۳] Euler ϕ-function

در حالتی که عمل هر G_i، تعویض پذیر باشد، گاهی از نماد جمعی در $\prod_{i=1}^{n} G_i$ استفاده کرده و $\prod_{i=1}^{n} G_i$ را مجموع مستقیم گروه های G_1، G_2، $\dots$ ، G_n می‌نامیم. گاهی، در این حالت بخصوص در گروه های آبلی با عمل جمع از نماد $\oplus_{i=1}^{n} G_i$ به جای $\prod_{i=1}^{n} G_i$ استفاده می کنیم. مجموع مستقیم گروه های آبلی G_1، G_2،... و G_n را می توان بصورت $G_1 \bigoplus G_2 \bigoplus \dots \bigoplus G_n$ نیز نوشت.

قضیه ۲.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد و G_1، G_2، $\dots$ ، G_n، زیرگروه‌هایی از آن باشند به طوری که*

الف) *به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $G_i \trianglelefteq G$ ،*

ب) $G = G_1 G_2 \dots G_n$،

پ) *به ازای هر i، $1 \leq i \leq n$، $G_i \cap G_1 G_2 \dots G_{i-1} G_{i+1} \dots G_n = 1$.*

در این صورت $G \cong \prod_{i=1}^{n} G_i$.

برهان. به ۲.۱.۵ از [۲۳] مراجعه شود. □

ما درقضیه‌ی فوق به جای علامت یکریختی از علامت تساوی استفاده خواهیم کرد و خواهیم گفت G حاصل‌ضرب مستقیم (داخلی) زیرگروه‌های G_1، G_2،...، G_n است، یا G به حاصل-ضرب مستقیم زیرگروه های G_1، G_2،...و G_n از خود تجزیه می شود. هر یک از این زیرگروه‌ها را یک عامل مستقیم Gمی‌نامیم.
بنابراین علامت $G = G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ به دو معنی حاصل‌ضرب مستقیم خارجی و حاصل‌ضرب مستقیم داخلی به کار خواهد رفت و خواننده باید از زمینه ی بحث، این دو را تمیز دهد.

لم ۳.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه و A و B زیرگروه‌هایی از G باشند. اگر*

الف) $G = AB$،

ب) *به ازای هر $a \in A$ و $b \in B$ ،* $ab = ba$ و

پ) $A \cap B = 1$ ،

آنگاه $G = A \times B$.

برهان. برای اثبات کافی است نشان دهیم که A و B زیرگروه‌های نرمالی از G هستند. برای این منظور فرض کنید $a \in A$ و $g \in G$ دلخواه باشند. بنابر (الف) $c \in A$ و $b \in B$ وجود دارند که $g = cb$. حال داریم

$$g^{-1}ag = (cb)^{-1}a(cb) = (bc)^{-1}a(bc) = c^{-1}b^{-1}abc = c^{-1}b^{-1}bac = c^{-1}ac \in A.$$

بنابراین $A \trianglelefteq G$. به همین ترتیب دیده می شود که $B \trianglelefteq G$. لذا بنابر قضیه‌ی قبل، $G = A \times B$. □

لم ۴.۳.۱. *فرض کنید G_1 و G_2 دو گروه باشند و $H_1 \trianglelefteq G_1$ و $H_2 \trianglelefteq G_2$. در این صورت $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$ و $G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2$.*

برهان. فرض کنیم $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$ و $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$ دلخواه باشند. در این صورت

$$(h_1, h_2)^{-1}(g_1, g_2)(h_1, h_2) = (h_1^{-1}g_1h_1, h_2^{-1}g_2h_2) \in H_1 \times H_2.$$

بنابراین $H_1 \times H_2 \trianglelefteq G_1 \times G_2$.

به آسانی دیده می‌شود که نگاشت $\varphi : G_1 \times G_2 \to G_1/H_1 \times G_2/H_2$ با ضابطه‌ی $\varphi(g_1, g_2) = (g_1H_1, g_2H_2)$ یک بروریختی است و $ker\varphi = H_1 \times H_2$. لذا بنابر قضیه‌ی اول یکریختی $G_1 \times G_2/H_1 \times H_2 \cong G_1/H_1 \times G_2/H_2$. □

قضیه ۵.۳.۱. **(*قضیه‌ی کوشی*[۴])**. *فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد به طوری که $p \mid n$. در این صورت G شامل عنصری از مرتبه‌ی p است و از این رو دارای زیرگروهی از مرتبه‌ی p می باشد.*

برهان. به ۲.۲.۷ از [۲۷] مراجعه شود. □

تعریف ۶.۳.۱. گروه G را یک گروه فراآبلی[۵]، گوییم هرگاه زیرگروه نرمال N از G موجود باشد به طوری که N و G/N هر دو آبلی باشند.

به وضوح هر گروه آبلی یک گروه فراآبلی است اما عکس مطلب در حالت کلی برقرار نیست. به عنوان مثال گروه D_8 یک گروه فراآبلی است در حالی که آبلی نیست.

مثال ۷.۳.۱. گروه متقارن S_3 یک گروه فراآبلی است.

[۴] Cauchy's theorem
[۵] Metabelian Group

تعریف ۸.۳.۱. فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی و p یک عدد اول باشد. مجموعه‌ی

$$\{g \in G|\ \exists s \geqslant ۰,\ s.t\ |g| = p^s\ \}$$

را یک p-مولفه‌ی اولیه‌ی G گوییم و آن را با نماد $G[p]$ نمایش می‌دهیم. در برخی کتاب‌ها نماد G_p نیز برای نمایش این مجموعه به کار می رود.

به آسانی دیده می شود که G_p یک زیرگروه از G است.

قضیه ۹.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی از مرتبه‌ی n باشد. در این‌صورت اگر $m \mid n$، آنگاه G زیرگروهی از مرتبه‌ی m دارد.*

برهان. به ۹.۱.۹از [۲۷] مراجعه شود. □

قضیه ۱۰.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه متناهی غیر بدیهی باشد و $a \in G$. در این صورت اگر مرتبه‌ی aاز مرتبه‌ی هر عضو G ناکمتر باشد، آنگاه G زیرگروهی مانند H دارد به طوری که $G = \langle a \rangle \times H$.*

برهان. به ۲.۱.۶ از [۲۳] مراجعه شود. □

قضیه ۱۱.۳.۱. *فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد. در این صورت G را به یک و تنها یک صورت می توان به حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی از زیرگروه‌های دوری غیربدیهی‌اش تجزیه کرد. به عبارت دیگر، اگر*

$$G = \langle a_۱ \rangle \times \langle a_۲ \rangle \times \cdots \times \langle a_r \rangle$$

$$G = \langle b_۱ \rangle \times \langle b_۲ \rangle \times \cdots \times \langle b_s \rangle$$

دو تجزیه‌ی G باشند که در آن‌ها a_i ها و b_j ها عناصری از G هستند و

$$|a_۱| \geqslant |a_۲| \geqslant \cdots \geqslant |a_r| > ۱, \quad |b_۱| \geqslant |b_۲| \geqslant \cdots \geqslant |b_s| > ۱$$

، آنگاه $r = s$ و به ازای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant r$، $\langle a_i \rangle \cong \langle b_i \rangle$.

برهان. به ۶.۱.۶ از [۲۳] مراجعه شود. □

تعریف ۱۲.۳.۱. فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی غیربدیهی باشد و $G = \langle a_۱ \rangle \times \cdots \times \langle a_r \rangle$ که در آن به ازای هر i که $۱ \leqslant i \leqslant r$، $a_i \in G$، $|a_i| = p^{e_i}$ و $e_۱ \geqslant e_۲ \geqslant \cdots \geqslant e_r > ۱$. در این صورت اعداد $p^{e_۱}$، $p^{e_۲}$،...، p^{e_r} را پایاها[۶]ی G می‌نامیم. r-تایی $(p^{e_۱}, \cdots, p^{e_r})$ را نوع[۷] G می گوییم.

---
[۶] Invariants
[۷] Type

تعریف ۱.۳.۱۳. فرض کنید G یک p-گروه آبلی متناهی غیربدیهی از نوع $(p^{e_1}, \cdots, p^{e_r})$ باشد. اگر به ازای هر i، $1 \leqslant i \leqslant r$، $e_1 = e_2 = \cdots = e_r$، آنگاه G را یک p-گروه هم‌دوری می‌نامیم. در حالتی که $e_1 = e_2 = \cdots = e_r = 1$، G را یک p-گروه آبلی مقدماتی یا به اختصار مقدماتی می‌نامیم.

مثال ۱.۳.۱۴. گروه $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ یک ۲-گروه مقدماتی است. گروه $\mathbb{Z}_4$ یک ۲-گروه هم‌دوری است.

قضیه ۱.۳.۱۵. **(*وجود و یکتایی تجزیه در گروه‌های آبلی متناهی*)**. *فرض کنید G یک گروه آبلی متناهی باشد و $|G| = p_1^{n_1} \ldots p_k^{n_k}$ که در آن p_iها اعداد اول دوبدو متمایز و n_iها اعداد طبیعی هستند. در این صورت G را می توان به حاصل‌ضرب مستقیم تعدادی متناهی از زیرگروه‌های دوری G که مرتبه‌ی هر یک از آن‌ها توان مثبتی از یکی از اعداد اول p_1، ...، p_k است تجزیه کرد. این تجزیه قطع نظر از ترتیب عوامل مستقیم (نسبت به یکریختی این عوامل) یکتاست.*

برهان. به ۷.۱.۹ از [۲۷] مراجعه شود. □

نظر به اهمیت قضایای سیلو در نظریه‌ی گروه‌ها و استفاده از این قضایا در فصل‌های بعدی، به ذکر تعریف زیرگروه سیلو و بیان برخی قضایا و نتایج اساسی از قضایای سیلو می پردازیم.

تعریف ۱.۳.۱۶. فرض کنید G یک گروه متناهی و p یک عدد اول باشد. زیرگروه P از G را یک p-زیرگروه سیلو[8]ی G می‌نامیم، هرگاه P یک p-زیرگروه باشد و به طور سره مشمول در p-زیرگروه دیگری از G نباشد، یعنی P یک p-زیرگروه ماکسیمال G باشد.

مثال ۱.۳.۱۷. گروه متقارن S_3 دارای سه ۲-زیرگروه سیلو است که عبارتند از

$$H_1 = \{1, (1\ 2)\}, \quad H_2 = \{1, (1\ 3)\}, \quad H_3 = \{1, (2\ 3)\}.$$

قضیه ۱.۳.۱۸. **(*قضایای سیلو*[9])** *فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبه‌ی n باشد که در آن $n = p^\alpha n'$، $\alpha \geqslant 0$ و p عدد اولی است که $p \nmid n'$. در این صورت*

(الف) G حداقل یک p-زیرگروه سیلو دارد؛

(ب) هر p-زیرگروه G مشمول در یک p-زیرگروه سیلوی G است؛

(پ) هر دو p-زیرگروه سیلوی G در G مزدوج اند؛

[8] Sylow p-subgroup
[9] Sylow's Theorems

ت) *عده‌ی همه‌ی p- زیرگروه‌های سیلوی G به پیمانه‌ی p با یک همنهشت است.*

برهان. به ۷.۱.۴ از [۲۳] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۱۹.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی و H یک p- زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت H یک p- زیرگروه سیلوی یکتای G است اگر و تنها اگر H یک زیرگروه نرمال G باشد.*

برهان. به ۱۱.۳.۷ از [۲۷] مراجعه شود. $\square$

قضیه ۲۰.۳.۱. *فرض کنید G یک گروه متناهی و K یک زیرگروه نرمال از آن باشد. در این صورت*

الف) *به ازای هر p- زیرگروه سیلوی P از G، $P\cap K$ یک p- زیرگروه سیلوی K است.*

ب) *اگر P یک p- زیرگروه سیلوی G باشد، آنگاه PK/K یک p- زیرگروه سیلوی G/K است.*

برهان. الف) فرض کنیم $|G|=p^mq$ که در آن p و q متباین‌اند. همچنین فرض می کنیم P یک p-زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت $|P|=p^m$. چون $|P\cap K|\mid|P|$ لذا به ازای $i\leq m$ ای، $|P\cap K|=p^i$. از این رو، $P\cap K$ یک p-زیرگروه از K است. فرض می کنیم $|K|=p^st$ که در آن p و t متباین‌اند و $s\geq i$. فرض می کنیم $s>i$. داریم
$$|PK|=\frac{|P||K|}{|P\cap K|}=\frac{p^mp^st}{p^i}=p^mp^jt=p^{m+j}t,$$
که $j=s-i\geq 1$، که ناممکن است زیرا $|G|=p^mq$ و PK زیرگروهی از G است. بنابراین $s=i$. از این رو، $|P\cap K|=p^s$، یعنی $P\cap K$ یک p-زیرگروه سیلوی K است.
ب) فرض می کنیم $|G|=p^mq$ که در آن p و q متباین‌اند. همچنین فرض می کنیم P یک p-زیرگروه سیلوی G باشد. در این صورت $|P|=p^m$. فرض کنیم $|K|=p^st$ که در آن p و t متباین‌اند. حال طبق قسمت (الف)، $P\cap K$ یک p-زیرگروه سیلوی K است. از این رو $|P\cap K|=p^s$. حال داریم
$$|PK/K|=\frac{|PK|}{|K|}=\frac{|P||K|}{|K||P\cap K|}=\frac{|P|}{|P\cap K|}=\frac{p^m}{p^s}=p^{m-s}.$$
همچنین
$$|G/K|=\frac{|G|}{|K|}=\frac{p^mq}{p^st}=p^{m-s}r\ .$$
از این رو، PK/K یک p-زیرگروه سیلوی G/K است. $\square$

۴.۱ گروه خودریختی های یک گروه و برخی از خواص اساسی آن

تعریف ۱.۴.۱. فرض کنید G یک گروه باشد. هر یکریختی از G به G را یک خودریختی از G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی های گروه G را با نماد $Aut(G)$ نمایش می دهیم. به آسانی دیده می شود که $Aut(G)$ با عمل ترکیب توابع، یک گروه تشکیل می دهد. گروه $Aut(G)$ را گروه خودریختی های G می‌نامیم.

مثال ۲.۴.۱. برای گروه جمعی اعداد صحیح، داریم $Aut(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_۲$.

مثال ۳.۴.۱. گروه $\mathbb{Z}_۶$ دو خودریختی دارد. یک خودریختی، نگاشت همانی است و خودریختی دیگر $[۱]$ را به $[۵] = [۱]^{-۱}$ می نگارد.

مثال ۴.۴.۱. فرض کنید G یک گروه و g عنصر دلخواهی از آن باشد. به آسانی دیده می شود که نگاشت $\varphi_g : G \to G$ با ضابطه‌ی $\varphi_g : x \mapsto g^{-۱}xg$ یک خودریختی از G است.

تعریف ۵.۴.۱. فرض کنید G یک گروه و g یک عنصر دلخواه از آن باشد. خودریختی φ_g،که در مثال قبل معرفی شد، را یک خودریختی داخلی از G می‌نامیم. مجموعه‌ی همه‌ی خودریختی‌های داخلی G را با نماد $Inn(G)$ نمایش می دهیم.

لم ۶.۴.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت $Inn(G)$ زیر گروه نرمالی از $Aut(G)$ است.*

برهان. به ۲.۲ صفحه‌ی ۱۶۱ از [۲۴] مراجعه شود. □

قضیه ۷.۴.۱. *فرض کنید G یک گروه و H زیرگروهی از آن باشد. در این صورت $N_G(H)/C_G(H)$ با زیرگروهی از $Aut(H)$ یکریخت است.*

برهان. به ۱۷.۲.۵ از [۲۷] مراجعه شود. □

قضیه ۸.۴.۱. *فرض کنید G یک گروه باشد. در این صورت $Inn(G) \cong G/Z(G)$.*

برهان. نگاشت $f : G \to Inn(G)$ با ضابطه‌ی $f : g \mapsto \varphi_g$ را در نظر می گیریم. به راحتی دیده می شود که f یک همریختی پوشاست. لذا بنابر قضیه‌ی اول یکریختی $G/kerf \cong Inn(G)$. از طرفی هسته‌ی f به صورت زیر محاسبه می شود

$$g \in kerf \Leftrightarrow \varphi_g = ۱ \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G;\ \varphi_g(x) = x \;\Leftrightarrow\; \forall x \in G;\ xg = gx \;\Leftrightarrow g \in Z(G).$$