دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

بهینگی طرح‌های سطری–ستونی آشیانه‌ای

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار اقتصادی–اجتماعی

سمیه مرادی

استاد راهنما

دکتر سعید پولادساز

۱۳۸۹

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد آمار اقتصادی—اجتماعی خانم سمیه مرادی

تحت عنوان

بهینگی طرح‌های سطری—ستونی آشیانه‌ای

در تاریخ ۸۹/۱۲/۲۵ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱— استاد راهنمای پایان‌نامه	دکتر سعید پولادساز
۲— استاد مشاور پایان‌نامه	دکتر مهدی تاتاری
۳— استاد داور ۱	دکتر عباس گرامی (دانشگاه تهران)
۴— استاد داور ۲	دکتر صفیه محمودی

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده — دکتر اعظم اعتماد

فهرست مطالب

چکیده:

یکی از اصول پایه در طرح آزمایش، کاهش دادن خطای آزمایش است. طرح بلوک بندی شده اغلب این مهم را برآورده می‌کند. اگر دو منبع اغتشاش تغییر پذیر وجود داشته باشد، حذف این دو منبع اغتشاش تغییر پذیر، تنها از طریق بلوک بندی در دو جهت میسر می‌باشد. به عبارت دیگر در این حالت دو عامل بلوک بندی مورد استفاده قرار می‌گیرد که یک عامل با سطرها و عامل دیگر با ستون‌های طرح مشخص می‌شود. چنین طرحی را طرح سطری‌–ستونی می‌نامند. برای مثال در یک آزمایش کشاورزی می‌توان سطرها و ستون‌های طرح را به عنوان دفعات مختلف و روش‌های به کارگیری کودها در نظر گرفت. طرح‌های سطری – ستونی با p سطر و q ستون شامل pq واحد آزمایشی می‌باشند. در حالت کلی، یک آزمایش می‌تواند شامل گروه‌هایی از طرح‌های سطری – ستونی باشد که این گروه‌ها امکان ایجاد یک عامل بلوک بندی بیشتر و یا تکرار طرح آزمایش پایه را فراهم می‌کنند. برای مثال، ممکن است آزمایش کشاورزی مذکور، در زمین‌های مختلف تکرار شود. چنین طرح‌هایی دارای ν تیمار در b بلوک با اندازه‌ی pq می‌باشند که تیمارها در داخل هر بلوک در یک طرح سطری – ستونی شامل p سطر و q ستون قرار می‌گیرند. در این حالت سطرها و ستون‌ها داخل بلوک‌ها آشیان می‌کنند، چنین طرح‌هایی را سطری – ستونی آشیانه‌ای (NRC) می‌نامند.

در فصل دوم، دو تحلیل درون و بین بلوکی مورد بررسی قرار می‌گیرد و همچنین معیار بهینگی عمومی و چندین معیار بهینگی خاص معرفی می‌شود.

برای ساختن طرح‌های سطری – ستونی، می‌توان به کمک شبه عامل‌ها ν تیمار را به ν ترکیب تیماری یک آزمایش عاملی تخصیص داد. سپس توسط روش مخلوط کردن در دو جهت، یک طرح سطری – ستونی ساخت. در فصل سوم اشاره‌ی مختصری به طرح‌های عاملی شده و روشی برای مخلوط کردن در طرح‌های سطری – ستونی بیان شده است.

یکی از انواع مهم طرح‌های سطری – ستونی آشیانه‌ای، طرح‌های سطری – ستونی تجزیه پذیر هستند که در آن‌ها هر تیمار دقیقاً یک بار در هر گروه یا بلوک رخ می‌دهد. یک کلاس مهم از طرح‌های سطری – ستونی تجزیه پذیر، طرح‌های مربع مشبکه‌ای هستند که در این طرح‌ها $\nu = s^2$ تیمار در r بلوک قرار می‌گیرند به طوری که هر بلوک یک آرایه‌ی مربعی $s \times s$ می‌باشند. در فصل چهارم A–بهینگی طرح‌های مربع مشبکه‌ای، A–بهینگی طرح‌های مربع مشبکه‌ای محدودشده و A–بهینگی طرح‌های مربع مشبکه‌ای کلی–متعادل مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل پنجم طرح‌های سطری – ستونی آشیانه‌ای بهینه‌ی عمومی و A–بهینگی طرح‌های سطری–ستونی آشیانه‌ای تجزیه‌پذیر بررسی می‌شود.

کلمات کلیدی: بهینه‌ی عمومی، کلی–متعادل ، عامل کارایی، A– بهینگی، (M, S) بهینگی.

فصل ۱

مقدمه

۱–۱ طرح آزمایش چیست؟

بی شک مسئله ی طرح آزمایش‌ها دارای سابقه‌ی طولانی و آشنا برای هر آماردان و محقق علومی نظیر کشاورزی، روانشناسی و غیره است. در مراحل اولیه‌ی یک پروژه، پژوهشگر به فهرستی از عامل‌های مؤثر بر متغیر پاسخ نیاز دارد، که باید تدوین شود. پژوهشگر ممکن است با تعداد زیادی از این عامل‌ها مواجه شود، در این حالت شیوه‌های خاصی نیاز است که بتوان با آزمایش کردن فقط زیر مجموعه‌ای از عامل‌های مؤثر به بیشترین اطلاعات ممکن دست یافت.

در هر طرح آزمایش، آزمایشگر علاقه‌مند به بررسی اثر تیمارهای به کار برده شده و واحدهای آزمایشی که این تیمارها را دریافت می‌کنند، می‌باشد. معمولاً یک آزمایشگر روی مجموعه‌ی تیمارهای به کار برده شده، بیشتر از واحدهای آزمایشی، کنترل دارد. طراحان آزمایش همچنین به چگونگی تخصیص تیمارها به واحدهای آزمایش، علاقه‌مند هستند. وضعیت‌های ذکر شده‌ی مورد علاقه‌ی طراحان پایه و اساس هر طرحی می‌باشند.

بنابراین هر طرح شامل دو مجموعه و یک تابع بین این دو مجموعه می‌باشد. مجموعه‌ها عبارتند از،

- یک مجموعه شامل تیمارها که با حرف T نشان داده می‌شود.
- یک مجموعه شامل واحدهای آزمایشی که با حرف Ω نشان داده می‌شود.

این دو مجموعه همواره متناهی می‌باشند. تابع ϕ نیز تیمارها را به واحدها تخصیص می‌دهد.

دو امر طراحی آزمایش و تحلیل آن به هم آمیخته‌اند و لازم است که در کنار هم مورد مطالعه قرار گیرند. کارایی تجزیه و تحلیل آزمایش به طرح آزمایش خاصی که مورد استفاده قرار گرفته است، متکی می‌باشد. بدون این ملاحظات، ممکن است با صرف زمان، تلاش و هزینه در جمع‌آوری داده‌ها نتوان به نتایج مورد نظر رسید.

۱—۲ اصول پایه‌ای

سه اصل پایه‌ای طرح آزمایش، بلوک‌بندی، تصادفی‌کردن و تکرار است. در ادامه به طور مختصر این سه اصل را شرح می‌دهیم.

بلوک بندی

شرایط آزمایشی باید نماینده‌ی وضعیتی باشد که نتایج آزمایش برای آن به کار می‌رود. به منظور افزایش دامنه‌ی استنتاجات باید شرایط آزمایشی تا حدی متنوع باشند. ولی این امر موجب افرایش تنوع در متغیر پاسخ می‌شود. بلوک‌بندی کردن تکنیکی است که غالباً برای مقابله با این مشکل استفاده می‌شود. بلوک‌بندی یک آزمایش به معنای تقسیم مشاهدات به گروه‌هایی است که بلوک نامیده می‌شوند. این عمل به گونه‌ای صورت می‌گیرد که مشاهدات هر گروه تحت شرایط آزمایشی یکسانی جمع‌آوری شوند. اگر بلوک بندی به خوبی انجام شود، آن‌گاه مقایسه‌های میان دو یا تعداد بیشتری از تیمارها نسبت به مقایسه‌های مشابه در طرح‌های غیر بلوکی، به صورت دقیق‌تر انجام می‌شود.

تصادفی کردن

منظور از تصادفی کردن آن است که تخصیص تیمارها به واحدهای آزمایشی و ترتیبی که مطابق آن آزمایش‌ها انجام می‌شوند به تصادف تعیین شوند.

تکرار

منظور از تکرار تهیه‌ی مشاهدات متعدد در امتحان واحدهای آزمایشی است. تکرار آزمایش پژوهشگر را قادر می‌سازد که برآوردی برای خطای آزمایش به دست آورد. دیگر خاصیت مهم تکرار آن است که مثلاً، اگر برای برآورد اثر سطحی از یک عامل، از میانگین نمونه استفاده کنیم، آن‌گاه تکرار موجب برآوردی دقیق‌تر برای آن اثر می‌شود.

۱—۳ معرفی چند نوع طرح آزمایش

دراین بخش به معرفی مقدماتی طرح‌های آزمایش می‌پردازیم. ابتدا طرح‌های بلوکی کامل تصادفی شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس به طرح‌های بلوکی ناقص می‌پردازیم.

۱—۳—۱ طرح بلوکی کامل تصادفی شده

یکی از اصول پایه در طرح آزمایش‌ها، کاهش دادن خطای آزمایش است. بلوک‌بندی کردن طرح اغلب این مهم را برآورده می‌کند. بنابراین طرح بلوکی کامل تصادفی شده از این دیدگاه مورد توجه است. در طرح بلوکی کامل تصادفی شده، واحدهای آزمایشی در هر بلوک برابر تعداد تیمارهاست. واژه‌ی «کامل» نشان می دهد که هر بلوک شامل تمام تیمارها است. با استفاده از این طرح، بلوک‌ها برای مقایسه‌ی تیمارها، واحدهای آزمایشی همگن تری را به وجود می آورند.

تعریف ۱.۱ یک بلوک مجموعه‌ای از واحدهای آزمایشی همگن است.

۱—۳—۲ طرح بلوکی ناقص

با توجه به تعریف بلوک کامل تصادفی، گاهی اوقات با آزمایش‌هایی مواجه می‌شویم که تعداد واحدهای هر بلوک از تعداد تیمارها کمتر است. ممکن است این به آن خاطر باشد که یک محدودیت شدید روی تعداد واحدها در بلوک باشد. مثلاً در انجام یک آزمایش برای مقایسه‌ی بیش از دو تیمار روی دو قلوها، که در آن هر بلوک از دو نوزاد دو قلو تشکیل شده است.
ممکن است محدودیت سختی روی تعداد واحدها در بلوک نباشد اما یک کران بالا برای آن وجود داشته باشد. مثلاً هنگامی که روز به عنوان بلوک در نظر گرفته شود. در دیگر حالت‌ها که محدودیتی روی تعداد واحدهای هر بلوک نیست کم کردن تعداد واحدهای هر بلوک می‌تواند باعث کمتر شدن خطای آزمایشی شود.
اغلب، یک بلوک و در نتیجه اندازه‌ی آن با توجه به خصوصیات بیولوژیکی یا فیزیکی مشخص می‌شود. به عنوان مثال، نوزادان موش‌ها، دو قلوها و یا یک اتومبیل را می‌توان نام برد. در مثال نوزادان موش‌ها این حقیقت که نوزادانی که در یک زایمان متولد شده‌اند از دیگر نوزادان به هم شبیه‌ترند، قابل توجیه است. با در نظر گرفتن این نوزادان در یک بلوک واضح است که حجم بلوک محدود است.
حالا اگر در یک آزمایش فقط موش‌های ماده مورد توجه باشند، باز هم حجم بلوک محدودتر خواهد شد، به طوری که از چهار یا پنج واحد تجاوز نخواهد کرد. بنابراین مقایسه‌ی تعداد بیشتر از پنج تیمار نیازمند

نوعی طرح بلوکی ناقص خواهد بود.
در طرح‌های بلوکی ناقص اغلب تلاش بر این است که مقایسه‌ی دو به دوی تیمارها دقت یکسانی داشته باشند. این ویژگی طلب می‌کند که هر زوج از تیمارها به تعداد برابر در یک بلوک باشند. طرح‌های بلوکی ناقص دارای این ویژگی را متعادل می‌نامند.

۱ـ۴ تاریخچه‌ی طرح‌های مربع مشبکه‌ای

طرح‌های مربع مشبکه‌ای، طرح‌هایی برای ν تیمار در r بلوک می‌باشند.به طوری که هر بلوک یک آرایه‌ی مربعی $s \times s$ و $\nu = s^۲$ می‌باشد. این طرح‌ها در سال ۱۹۳۷، برای اولین بار توسط یتس [۵۷] معرفی شدند.کاکران و کاکس [۱۰] در سال ۱۹۵۷طرح‌های مربع مشبکه‌ای را در دو حالت $۲r \leq s + ۱$ و $r = s + ۱$ بررسی کردند.
بهینگی این طرح‌ها در حالت $۲r \leq s + ۱$ توسط چنگ و بیلی [۹]، در سال ۱۹۹۱ مطرح شد.
همچنین، بهینگی طرح‌های مربع مشبکه‌ای در حالت $s + ۱ < ۲r \leq ۲(s + ۱)$ توسط فدرر[۱۴]، در سال ۱۹۵۵ مطرح شد. فدرر در این وضعیت افراز سطری یک بلوک را به عنوان افراز ستونی بلوک دیگر به کار برد. ویلیبیامز[۵۳]، در سال ۱۹۸۶ چنین طرح‌هایی را مربع مشبکه‌ای محدود شده نامید.
جان و ویلیبیامز[۲۸]، در سال ۱۹۹۶ بهینگی طرح‌های مربع مشبکه‌ای و نیز طرح‌های مربع مشبکه‌ای محدود شده را بررسی نمودند. همچنین بیلی و ویلیبیامز[۵]، در سال ۲۰۰۷ بهینگی کلاس ویژه‌ای از طرح‌های مربع مشبکه‌ای به نام کلی—متعادل را بررسی نمودند که در فصل چهارم به آن پرداخته خواهد شد.

۱ـ۵ تاریخچه‌ی طرح‌های سطری — ستونی آشیانه‌ای

ساختار بلوکی چند گانه، نقش مهمی را در کنترل روند آزمایشی ایفا می‌کند و به طور وسیع در طرح و تحلیل آزمایش‌های مربوط به کشاورزی، باغبانی و جنگل‌بانی استفاده می‌شود. طرح‌های سطری — ستونی آشیانه‌ای (NRC) یک پایه‌ی ساختاری قوی برای کنترل دو بعدیِ روند آزمایشی فراهم می‌کنند.
واژه‌ی «آشیانه‌ای» نشان می‌دهد که سطرها و ستون‌ها داخل بلوک‌ها آشیان می‌کنند.
طرح‌های آشیانه‌ای برای اولین بار توسط سری‌واستاوا[۵۰] در سال ۱۹۷۸ بررسی شد. در مجموعه مقالات اگراوال و پراساد[۱] در سال ۱۹۸۲ و سینگ و دی [۴۹] در سال ۱۹۷۹، ساختار طرح‌های سطری — ستونی آشیانه‌ای ناقص متعادل بیان شد. همچنین اگراوال و پراساد[۲] در سال ۱۹۸۲ روش‌های

مختلفی برای ساخت طرح‌های سطری – ستونی آشیانه‌ای ناقص جزئی متعادل ارائه دادند.
چِنگ[۸] در سال ۱۹۸٦، ساخت طرح NRC ناقص متعادل را توسط ترکیب یک طرح بلوکی ناقص متعادل با یک طرح NRC متعادل شرح داد. روش‌های دیگری برای ساخت طرح‌های NRC از طریق طرح‌های دوره‌ای و دوره‌ای تعمیم‌یافته، توسط جرت [۲۲] در سال ۱۹۸۲ و جان [۲۴] در سال ۱۹۸۵ ارائه شد. جزئیات دیگری از طرح‌های NRC توسط سینگ [۴۸] در سال ۱۹۸۹، یودن و مُرگان [۵۱] در سال ۱۹۹۰، مِجزا و مِجزا [۳۵] در سال ۱۹۹۴، مجموعه مقالات مُرگان [۳۸] و [۳۹]، در سال‌های ۱۹۹٦ و ۲۰۰٦، هیشیدا و جیمبو [۱۷] در سال ۲۰۰۲ و میوتُه [۴۰] در سال ۲۰۰۵ ارائه شده است.
کیفر[۳۱] در سال ۱۹۵۸ طرح‌های بهینه را برای اندازه نمونه‌ی ثابت یا تحت محدودیت‌های ترکیباتی، بنیاد نهاد. بدون تردید او یکی از تأثیرگذارترین افراد در حوزه‌ی طرح‌های بهینه است. در سال‌های بعد بهینگی طرح‌های NRC توسط افرادی نظیر جاکروکس [۱۹] در سال ۱۹۸٦، چَنگ [٦] در سال ۱۹۸۹، بگچی و سینها[۳] در سال ۱۹۹۰ و چِین و همکاران [۲۰] در سال ۱۹۹۴ مورد بررسی قرار گرفت.
همچنین یک توصیف کامل از طرح‌های NRC توسط بیلی [۴] در سال ۲۰۰۴ ارائه شد. بیلی و ویلییامز [۵] در سال ۲۰۰۷ بهینگی طرح‌های NRC را در حالتی که مؤلفه‌های سطری و ستونی طرح متعادل مرتبه‌ی دوم می‌باشند، بررسی نمودند.
در این پایان نامه به بهینگی طرح‌های سطری–ستونی تجزیه پذیر، بخصوص A–بهینگی این طرح‌ها خواهیم پرداخت. در فصل اول به بیان اصول پایه‌ای طرح آزمایش‌ها پرداخته و اشاره‌ی مختصری به مقالات مهم در زمینه‌ی طرح‌های مربع مشبکه‌ای، که یک کلاس مهم از طرح‌های سطری– ستونی تجزیه پذیر است، و طرح‌های سطری–ستونی آشیانه‌ای می‌شود.
در فصل دوم، تعریف‌های لازم ارائه شده است. همچنین در این فصل دو تحلیل درون و بین بلوکی مورد بررسی قرار می‌گیرد.
در فصل سوم، اشاره‌ی مختصری به طرح‌های عاملی شده و روشی برای مخلوط کردن طرح‌های سطری–ستونی بیان می‌شود.
در فصل چهارم، A–بهینگی طرح های مربع مشبکه‌ای در دو کلاس بررسی می‌شود.
در فصل پنجم، ابتدا بهینگی عمومی طرح‌های سطری–ستونی آشیانه‌ای را بررسی نموده و در پایان روش فصل چهارم را برای طرح‌های سطری–ستونی آشیانه‌ای تجزیه‌پذیر توسعه خواهیم داد.

فصل ۲

مروری بر تحلیل بلوکی

در این فصل ابتدا مفاهیم و تعاریف مورد استفاده در این پایان‌نامه بیان می‌شوند. همچنین با استفاده از مراجع [۱۶] و [۲۳]، تئوری دو تحلیل درون و بین بلوکی بررسی شده و در انتها چند معیار بهینگی رایج معرفی می‌شود.

۲–۱ تعریف‌های پایه‌ای

فرض کنید n واحد آزمایش به b بلوک با اندازه k_j برای بلوک j ام، $j = ۱, \cdots, b$، تقسیم شده باشد، آن‌گاه،

(الف) هر ترتیب ν تیمار در b بلوک مذکور را طرح آزمایش می‌نامیم.

(ب) یک ترتیب ν تیمار به توی b بلوک با اندازه‌های $k_۱, \cdots, k_b$ را طرح بلوکی می‌نامیم، به‌طوری که $i-$ امین تیمار در r_i بلوک رخ دهد و همچنین $i-$ امین و $j-$ امین تیمار با هم در λ_{ij} بلوک ظاهر شوند.

(ج) تعداد دفعاتی که تیمار i ام در یک طرح بلوکی ظاهر می‌شود را تکرار آن تیمار می‌گوییم و با r_i نشان می‌دهیم.

(د) یک طرح بلوکی را ناقص می‌نامیم، اگر تعداد واحدهای آزمایشی هر بلوک آن کمتر از تعداد تیمارها باشد.

تعریف ۱.۲ یک ترتیب از ν تیمار در b بلوک هر یک با اندازه‌ی k، که دارای شرایط زیر باشد را یک طرح بلوکی ناقص متعادل ($BIBD$) می‌گوییم.

(۱) هر تیمار بیش از یک مرتبه در هر بلوک رخ ندهد.

(۲) هر تیمار دقیقاً در r بلوک ظاهر شود.

(۳) هر جفت تیمار با هم دقیقاً در λ بلوک ظاهر شوند.

پارامترهای یک طرح بلوکی ناقص متعادل با مشخصات بیان شده در تعریف (۱.۲) را به‌صورت (ν, b, r, k, λ) در نظر می‌گیریم.

در یک طرح بلوکی ناقص متعادل d، تعداد دفعاتی که تیمارهای i و j با هم در یک بلوک ظاهر می‌شوند با λ_{dij} نمایش داده می‌شود و برای هر i و j داریم:

$$\lambda_{dij} = \lambda \quad \forall i \neq j$$

تعریف ۲.۲ اگر تعداد دفعاتی که تیمارهای مختلف با هم در یک بلوک ظاهر می‌شوند یکسان نباشد، به این ترتیب که بعضی ازجفت‌های تیماری، λ_1 بار با هم در یک بلوک ظاهر شوند، بعضی جفت‌ها λ_2 بار و ... و بقیه‌ی جفت‌ها λ_m بار با هم در بلوک‌ها ظاهر شوند، طرح بلوکی ناقص را جزئی متعادل می‌نامیم.

تعریف ۳.۲ یک طرح را تجزیه‌پذیر گوییم اگر بتوان بلوک‌های آن را به ابربلوک‌ها افراز کرد به طوری که هر یک از این ابربلوک‌ها کامل باشند، به این مفهوم که همه‌ی تیمارها یک بار در ابربلوک‌ها رخ دهند. در یک طرح تجزیه‌پذیر همه‌ی تیمارها r مرتبه رخ می‌دهند که r تعداد ابربلوک‌ها می‌باشد، همچنین ν بر k بخش‌پذیر است زیرا $(\frac{\nu}{k})$ بیانگر تعداد بلوک‌ها در هر ابربلوک است.

طرح‌های تجزیه‌پذیر در عمل به طور وسیع استفاده می‌شوند. این طرح‌ها معمولاً در مواردی که تعداد تیمارها زیاد است، توصیه می‌شوند.

در یک آزمایش واقعی، افراز بلوک‌ها به ابربلوک‌ها معمولاً قبل از انتخاب طرح صورت می‌گیرد. بنابراین اگر ابربلوک‌های مذکور داده شده باشند، ترجیح می‌دهیم که طرح را تجزیه‌شده بنامیم.

تعریف ۴.۲ اگر بلوک‌های یک طرح بلوکی با تکرار تیماری برابر به t گروه تقسیم شوند به طوری که هر یک از این t گروه شامل α بلوک باشند و در هر گروه هر تیمار m بار رخ دهد، آن‌گاه این طرح m—تجزیه پذیر نامیده می‌شود.

تعریف ۵.۲ فرض کنید، برای $i = ۱, \ldots, \nu$، τ_i ها اثرات تیماری باشند، آن‌گاه،
(الف) ترکیب خطی $\sum_{i=۱}^{\nu} c_i\tau_i$، یک مقابله‌ی تیماری است اگر $\sum_{i=۱}^{\nu} c_i = ۰$ باشد.
(ب) دو مقابله‌ی تیماری $C_۱ = \sum_{i=۱}^{\nu} l_i\tau_i$ و $C_۲ = \sum_{i=۱}^{\nu} m_i\tau_i$ را متعامد گوییم، اگر $\sum_{i=۱}^{\nu} l_i m_i = ۰$ باشد. به بیان دیگر، دو مقابله‌ی تیماری را متعامد گوییم، اگر مجموع حاصلضرب ضرایب آن‌ها برابر صفر باشند.
(ج) طرحی که تمام مقابله‌های تیماری اصلی آن با دقت یکسان برآورد شوند، را طرح متعادل می‌نامیم.

۲–۲ تحلیل بلوکی

فرض کنید n واحد آزمایشی با b بلوک در اختیار داریم، به طوری که j–امین بلوک از k_j $(j = ۱, ۲, \ldots, b)$، واحد تشکیل شده است. تغییرات کل داده‌ها بر اساس $(n - ۱)$ درجه آزادی است که می‌توان آن را به دو مؤلفه افراز کرد: یک مؤلفه تغییرات بین بلوک‌ها و مؤلفه‌ی دیگر تغییرات بین واحدهای درون بلوک‌ها را اندازه می‌گیرد. درجه آزادی مؤلفه‌ی بین بلوکی $(b - ۱)$ و درجه آزادی مؤلفه‌ی درون بلوکی $\sum_{j=۱}^{b} (k_j - ۱) = n - b$ می‌باشد.
چون بلوک‌ها به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که واحدهای درون آن‌ها همگن باشند، لذا معمولاً مقایسه‌های درون بلوکی دقیق‌تر از مقایسه‌های بین بلوکی می‌باشد.
در تحلیل درون بلوکی، اثرات بلوک، یک مجموعه‌ی ثابت از پارامترها در نظر گرفته می‌شود. حال اگر بلوک‌ها به عنوان یک نمونه‌ی تصادفی از بلوک‌های متعلق به برخی جمعیت‌ها در نظر گرفته شوند، آن‌گاه ممکن است برآورد مقابله‌های تیماری از مقایسه‌های بین بلوکی به دست آیند.
اگر انتخاب بلوک‌ها به درستی صورت گرفته باشد، یعنی اثرات بلوک‌ها زیاد باشد، آن‌گاه ممکن است اطلاعات به دست آمده از تحلیل بین بلوکی کم باشد. از طرف دیگر اگر اثر بلوک‌ها کوچک باشد، امکان دارد فواید زیادی از تحلیل بین بلوکی به دست آید.

۳–۲ تحلیل درون بلوکی

فرض کنید یک مجموعه شامل ν تیمار را به n واحد آزمایشی اختصاص داده‌ایم، به طوری که n واحد آزمایشی به b بلوک هر یک با اندازه‌ی k_j $(j = ۱, ۲, ..., b)$، تقسیم شده‌اند. اگر n_{ij} بیانگر تعداد تکرارهای تیمار i–ام در بلوک j–ام باشد، آن‌گاه مدل زیر را داریم،

$$y_{ijk} = \mu + \tau_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \tag{۱.۲}$$

$$(i = ۱, ۲, \ldots, \nu;\ j = ۱, ۲, \ldots, b;\ k = ۱, ۲, \ldots, n_{ij})$$

که در آن y_{ijk} مشاهده‌ی مربوط به تکرار k—ام و تیمار i—ام در بلوک j—ام، μ پارامتر میانگین کل، τ_i اثر i—امین تیمار، β_j اثر j—امین بلوک و ε_{ijk} خطای مربوط به مشاهده‌ی y_{ijk} می‌باشد. ε_{ijk} ها متغیرهای تصادفی ناهمبسته با میانگین صفر و واریانس $\sigma^۲$ می‌باشند.
شایان ذکر است که در این حالت اثرات بلوک‌ها ثابت فرض شده است. مدل (۱.۲) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت،

$$\underline{y} = W\underline{\alpha} + \underline{\varepsilon} \qquad (۲.۲)$$

که در آن y و ε به ترتیب بردارهای $(n \times ۱)$ از پاسخ‌ها و خطاها، α یک بردار $(p \times ۱)$ از پارامترها و W ماتریس طرح $(n \times p)$ می‌باشد به طوری که $p = ۱ + \nu + b$ است.
مدل (۲.۲) برای یک طرح بلوکی مناسب می‌باشد. البته در عمل باید فرضیات این مدل به دقت بررسی شوند. این مدل را می‌توان به صورت زیر هم نوشت،

$$y = \underline{1}\mu + X\underline{\tau} + Z\underline{\beta} + \underline{\varepsilon} \qquad (۳.۲)$$

که در آن $(\underline{1})$ یک بردار ستونی با درایه‌های یک و X و Z به ترتیب ماتریس‌های طرح با مرتبه‌های $(n \times \nu)$ و $(n \times b)$، برای تیمارها و بلوک‌ها می‌باشند. در ماتریس X یک ستون برای هر تیمار وجود دارد. مجموع عناصر هر ستون بیانگر تعداد دفعاتی است که تیمار مربوطه در طرح رخ داده است. اگر $(\underline{r})$ نشان‌دهنده‌ی بردار تکرار تیمارها باشد، یعنی $\underline{r}' = (r_۱, r_۲, \ldots, r_\nu)$ آن‌گاه داریم،

$$X'\underline{1} = \underline{r} \qquad X'X = r^\delta \qquad (۴.۲)$$

به طوری که r^δ یک ماتریس قطری با عناصر روی قطر برابر r_i $(i = ۱, ۲, ..., \nu)$، می‌باشد. به طور مشابه اگر $\underline{k}$ برداری باشد که j امین درایه آن برابر k_j باشد، آن‌گاه داریم،

$$Z'\underline{1} = \underline{k} \qquad Z'Z = k^\delta \qquad (۵.۲)$$

که در آن k^δ یک ماتریس قطری با عناصر روی قطر برابر k_j $(j = ۱, ۲, ..., b)$، می‌باشد. توجه کنید که مجموع حاصل‌ضرب ستون i ام از ماتریس X و ستون j ام از ماتریس Z برابر تعداد دفعاتی است که تیمار i ام در بلوک j ام رخ می‌دهد. یعنی برابر n_{ij} است. بنابراین داریم،

$$X'Z = N \qquad (۶.۲)$$

به طوری که N ماتریسی $(\nu \times b)$ است که ماتریس وقوع طرح نامیده می‌شود. در نهایت، اگر T و B به ترتیب بردار مجموع‌های تیماری و بلوکی و G مجموع کل باشد آن‌گاه داریم،

$$X'\underline{y} = \underline{T}; \quad Z'\underline{y} = \underline{B}; \quad \underline{1}'\ \underline{y} = G \tag{۷.۲}$$

به طوری که درایه‌های بردارهای $\underline{T}$ و $\underline{B}$ به ازای $(i = ۱, ۲, \ldots, \nu)$ و $(j = ۱, ۲, \ldots, b)$، به ترتیب به صورت زیر می‌باشند،

$$T_i = \sum_{jk} y_{ijk} = \text{مجموع کل تیمار } i\text{—ام}$$
$$B_j = \sum_{ik} y_{ijk} = \text{مجموع کل بلوک } j\text{—ام}$$

۲—۳—۱ معادلات نرمال و نرمال کاهش یافته

با استفاده از روش حداقل مربعات معمولی، از رابطه‌ی (۲.۲) خواهیم داشت،

$$\begin{aligned}\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon} &= (\underline{y} - W\underline{\alpha})'(\underline{y} - W\underline{\alpha}) \\ &= \underline{y}'\underline{y} - ۲\underline{y}'W\underline{\alpha} + \underline{\alpha}'W'W\underline{\alpha}\end{aligned}$$

آن‌گاه با مشتق گیری داریم،

$$\frac{\partial(\underline{\varepsilon}'\underline{\varepsilon})}{\partial\underline{\alpha}} = -۲W'\underline{y} + ۲W'W\underline{\alpha}$$

معادلاتی که از این روش حاصل می‌شوند، معادلات نرمال نام دارند. معادلات نرمال برای μ، $\underline{\tau}$ و $\underline{\beta}$ به صورت زیر می‌باشند،

$$n\widehat{\mu} + \underline{r}'\widehat{\underline{\tau}} + \underline{k}'\widehat{\underline{\beta}} = G \tag{۸.۲}$$

$$\underline{r}\widehat{\mu} + r^{\delta}\widehat{\underline{\tau}} + N\widehat{\underline{\beta}} = \underline{T} \tag{۹.۲}$$

$$\underline{k}\widehat{\mu} + N'\widehat{\underline{\tau}} + k^{\delta}\widehat{\underline{\beta}} = \underline{B} \tag{۱۰.۲}$$

رابطه‌های (۸.۲)، (۹.۲) و (۱۰.۲) را می‌توان به صورت ماتریسی زیر نوشت،

$$W'W\underline{\alpha} = \begin{pmatrix} \underline{۱}'\ \underline{۱} & \underline{۱}'X & \underline{۱}'Z \\ X'\underline{۱} & X'X & X'Z \\ Z'\underline{۱} & Z'X & Z'Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \widehat{\underline{\tau}} \\ \widehat{\underline{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{۱}'\underline{y} \\ X'\underline{y} \\ Z'\underline{y} \end{pmatrix} = W'\underline{y} \tag{۱۱.۲}$$

که با توجه به رابطه‌های (۴.۲)، (۵.۲)، (۶.۲) و (۷.۲) رابطه‌ی (۱۱.۲) به صورت زیر نوشته می‌شود،

$$\begin{pmatrix} n & \underline{r}' & \underline{k}' \\ \underline{r} & r^{\delta} & N \\ \underline{k} & N' & k^{\delta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widehat{\mu} \\ \underline{\widehat{\tau}} \\ \underline{\widehat{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G \\ \underline{T} \\ \underline{B} \end{pmatrix} \qquad (۱۲.۲)$$

تعداد معادلات و مجهولات با هم برابر است ولی مجموع ν سطر رابطه‌ی (۹.۲) و نیز مجموع b سطر رابطه‌ی (۱۰.۲)، رابطه‌ی (۸.۲) را نتیجه می‌دهد. به عبارت دیگر ماتریس ضرایب $W'W$ پررتبه نمی‌باشد، در نتیجه جواب یکتا برای معادلات نرمال به دست نمی‌آید. به طور کلی، هر جواب معادلات نرمال $W'W\underline{\alpha} = W'\underline{y}$ به صورت $\widehat{\underline{\alpha}} = (W'W)^{-}W'\underline{y}$ نوشته می‌شود که در آن $(W'W)^{-}$ را وارون تعمیم یافته‌ی $(W'W)$ می‌نامیم.

برای یافتن یک جواب، باید یک مجموعه از معادلات شامل تنها پارامترهای تیماری (پارامترهایی که بیشتر مورد توجه است) را با حذف $\widehat{\mu}$ و $\underline{\widehat{\beta}}$ به‌دست آورد. برای این منظور، با ضرب طرفین رابطه‌ی (۱۰.۲) در $Nk^{-\delta}$، که $k^{-\delta}$ معکوس ماتریس k^{δ} است، داریم،

$$\underline{r}\widehat{\mu} + Nk^{-\delta}N'\underline{\widehat{\tau}} + N\underline{\widehat{\beta}} = Nk^{-\delta}\underline{B} \qquad (۱۳.۲)$$

با کم کردن رابطه (۱۳.۲) از رابطه‌ی (۹.۲) داریم،

$$L\underline{\widehat{\tau}} = \underline{q} \qquad (۱۴.۲)$$

که در آن،

$$L = r^{\delta} - Nk^{-\delta}N' \qquad (۱۵.۲)$$

و

$$\underline{q} = \underline{T} - Nk^{-\delta}B \qquad (۱۶.۲)$$

معادلات رابطه‌ی (۱۵.۲)، معادلات نرمال کاهش یافته برای پارامترهای تیماری نامیده می‌شوند.

در تحلیل درون بلوکی ماتریس ضرایب L در رابطه (۱۴.۲)، ماتریس اطلاع نامیده می‌شود. این ماتریس برای ساختن طرح بهینه در بین طرح‌های مختلف بلوکی با در نظر گرفتن معیارهای بهینگی نقش مهمی دارد. بردار q نیز بردار کل‌های تیماری تعدیل شده نام دارد.

به دلیل پر رتبه نبودن ماتریس اطلاع L، معادلات نرمال کاهش یافته جواب یکتا ندارد. به بیان دیگر چون

مجموع سطرها و ستون‌های ماتریس اطلاع L برابر صفر است، لذا $rank(L) \leq \nu - ۱$ می‌باشد. همه‌ی جواب‌های معادله‌ی (۱۴.۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت،

$$\widehat{\underline{\tau}} = \Omega \underline{q} \tag{۱۷.۲}$$

به طوری که Ω یک وارون تعمیم یافته‌ی L است.

تعریف ۶.۲ یک طرح را همبند می‌نامیم اگر و فقط اگر $rank(L) = \nu - ۱$ باشد.

اگر ماتریس L به شکل کانونی بیان شود، آن‌گاه معکوس تعمیم یافته‌ی آن به آسانی به‌دست می‌آید. فرض کنید ستون‌های ماتریس L به وسیله‌ی مجموعه بردارهای ویژه‌ی نرمال شده‌ی $(p_۱, p_۲, \ldots, p_\nu)$ مربوط به مقادیر ویژه‌ی $(\lambda_۱, \lambda_۲, \ldots, \lambda_\nu)$، تولید شده باشد. بنابراین داریم،

$$\underline{p}_i' \underline{p}_j = \begin{cases} ۱ & i = j \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$$

لذا فرم کانونی L به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$L = \sum_{i=۱}^{\nu} \lambda_i \underline{p}_i \; \underline{p}_i' \tag{۱۸.۲}$$

در این حالت، یک انتخاب برای Ω به صورت زیر است،

$$\Omega = \sum \lambda_i^{-۱} \underline{p_i} \; \underline{p}_i' \tag{۱۹.۲}$$

در رابطه‌ی (۱۹.۲)، مجموع روی همه‌ی مقادیر ویژه‌ی غیر صفر ماتریس L می‌باشد.

۲–۳–۲ برآوردپذیری

ابتدا مقدار امید ریاضی و ماتریس واریانس—کواریانس بردار کل‌های تیماری یعنی q را به‌دست می‌آوریم. برای این منظور مدل (۳.۲) را یک بار در X' و یک بار در $Nk^{-\delta}Z'$ ضرب می‌کنیم،آن‌گاه داریم،

$$X'\underline{y} = \underline{r}\mu + r^{\delta}\underline{\tau} + N\underline{\beta} + X'\underline{\varepsilon} \tag{۲۰.۲}$$

و

$$Nk^{-\delta}Z'\underline{y} = \underline{r}\mu + Nk^{-\delta}N'\underline{\tau} + N\underline{\beta} + Nk^{-\delta}Z'\underline{\varepsilon} \tag{۲۱.۲}$$