بسم الله الرحمن الرحيم

دانشگاه اصفهان
دانشکده علوم
گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض

مدولهای هم کج و تزریقی محض

استاد راهنما:

دکتر شکرالله سالاریان

پژوهشگر:

علیرضا بلانیان

خرداد ماه ۱۳۸۷

شیوه نگارش پایان نامه رعایت شده است.
تحصیلات تکمیلی دانشگاه اصفهان

بسمه تعالی

دانشگاه اصفهان

دانشکده علوم

گروه ریاضی

پایان نامه کارشناسی ارشد رشته ریاضی گرایش محض آقای علیرضا بلانیان

تحت عنوان:

مدولهای هم کج و تزریقی محض

در تاریخ ...۸۷/۳/۷..... توسط هیأت داوران زیر بررسی و با درجه ...بسیار خوب.... به تصویب نهایی رسید.

۱- استاد راهنمای پایان نامه   دکتر شکرا.. سالاریان   با مرتبه علمی دانشیار   امضاء

۲- استاد داور داخل گروه   دکتر علیرضا عبدالهی   با مرتبه علمی دانشیار   امضاء

۳- استاد داور خارج گروه   دکتر جواد اسدالهی   با مرتبه علمی دانشیار   امضاء

مهر و امضای مدیر گروه ....

دانشگاه اصفهان گروه ریاضی

تقدیر و تشکر

از زحمات فراوان و بی دریغ جناب آقای دکتر شکرالله سالاریان که با راهنمایی های خود مرا یاری نمودند کمال تشکر را دارم. همچنین از اساتید محترم بخصوص جناب آقای دکتر علیرضا عبدالهی و دکتر جواد اسداللهی که داوری این پایان نامه را بر عهده داشتند تشکر می نمایم. در پایان از کمک های صادقانه دوستان عزیزم آقایان موسی موسی زاده، محمد والایی انور، حمیدرضا محقق و محمد حکمت نژاد سپاسگذاری می نمایم.

تقدیم به

پدر بزرگوارم و مادر مهربانم.

چکیده

مدول های کج ابتدا در سال ۱۹۸۲ توسط هپل و رینگل تعریف شد، به عنوان دوگان آن می توان مدول های هم کج را در نظر گرفت. در این پایان نامه دوگان بودن این دو نظریه را به وضوح می بینیم و همچنین ثابت می کنیم که اگر R یک حلقه دلخواه باشد آن گاه، هر R – مدول هم کج تزریقی محض می باشد. در پایان کاربردهایی را از این مطلب می آوریم.

واژه های کلیدی: تزریقی محض، مدول کج، مدول هم کج

فهرست مطالب

مقدمه

فرض کنیم R یک حلقه باشد. جفت $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ از کلاسهای R ـمدولها را یک نظریه تاب نامیم، هرگاه نسبت به فانکتور Hom_R دو به دو متعامد باشند یعنی

$$\mathcal{T}=\{T\in R-Mod \mid \mathrm{Hom}_R(T,F)=\circ,\forall F\in\mathcal{F}\}$$

$$\mathcal{F}=\{F\in R-Mod \mid \mathrm{Hom}_R(T,F)=\circ,\forall T\in\mathcal{T}\}.$$

و جفت $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ از کلاسهای R ـمدولها را یک نظریه هم تاب نامیم، هرگاه نسبت به فانکتور Ext^1_R دو به دو متعامد باشند یعنی:

$$\mathcal{A}={}^{\perp}\mathcal{B}=\left\{A\in R-Mod \mid \mathrm{Ext}^1_R(A,B)=\circ,\forall B\in\mathcal{B}\right\}$$

$$\mathcal{B}=\mathcal{A}^{\perp}=\left\{B\in R-Mod \mid \mathrm{Ext}^1_R(A,B)=\circ,\forall A\in\mathcal{A}\right\}.$$

R ـمدول چپ T را کج نامیم هر گاه $Gen(T)=T^{\perp}$ و R ـمدول چپ U راهم کج نامیم هر گاه $Cogen(U)={}^{\perp}U$.

پیدایش نظریه کج (tilting theory) را می توان در ابتدای دهه هشتاد جستجو کرد. این نظریه یک روش خوب را برای مقایسه دو کاتگوری فراهم می کند، به عنوان مثال کاتگوری مدولهای جبرهای متناهی بعد را می توان به کمک نظریه کج مقایسه کرد. مدول های کج ابتدا در سال ۱۹۸۲ توسط هپل[۱] و رینگل[۲] [۱۱] در حالت جبر های

[۱] Happel
[۲] Ringel

متناهی بعد و در سال ۱۹۹۵ مدول های کج توسط کلپی [3] و ترلیفاج [4] [۸] در حالت مدول های با تولید نامتناهی تعریف شد. در سال ۲۰۰۱ آنگرلی[5] و تنل [6] [۱] رابطه بین کلاس های کج و هم کج را با پیش پوش و پیش پوشش های خاص بیان کردند.

این پایان نامه در چهار فصل تنظیم شده است. در فصل اول مفاهیم اولیه را به طور گذرا بیان می کنیم.

در فصل دوم ابتدا نظریه تاب و نظریه هم تاب را بیان کرده و سپس با استفاده از نظریه هم تاب مدول کج و مدول هم کج را مورد مطالعه قرا ر می دهیم. همچنین نشان می دهیم روش و مفاهیم به کار رفته در این پژوهش در مورد مدول های کج وهم کج با آنچه قبلاً انجام شده هم خوانی دارد. اما روش به کار رفته در این جا دوگانگی این دو نظریه را به راحتی نشان می دهد.

در فصل سوم ابتدا R—مدول تزریقی محض را تعریف کرده و سپس به بررسی و مطالعه خواص آن ها می پردازیم، به ویژه ثابت می کنیم که هر R—مدول هم کج، تزریقی محض می باشد.

در فصل چهارم ابتدا پوشش، پیش پوشش، پوش و پیش پوش را تعریف کرده و سپس مطالبی را به عنوان کاربردهایی از قضیه ۱۵.۳ می آوریم.

Colpi[3]

Trlifaj[4]

Angerli[5]

Tonolo[6]

فصل ۱

مفاهیم اولیه

در فصل اول تعاریف و قضایای مقدماتی را که در طی فصول بعدی این تحقیق مورد نیاز است را بطور گذرا بیان می کنیم و از اثبات قضایا صرف نظر می کنیم.

برای نوشتن این فصل از منابع [۱۶ و ۱۲] استفاده شده است.

تعریف ۱.۱ . فرض کنید R یک حلقه باشد. یک R − مدول (چپ)، گروهی آبلی و جمعی مانند A همراه با تابعی مانند $R \times A \longrightarrow A$ (نقش (r,a) با ra نشان داده می‌شود) است به طوری که به ازای هر $r, s \in R$ و $a, b \in A$،

(یک) $r(a+b) = ra + rb$،

(دو) $(r+s)a = ra + sa$،

(سه) $r(sa) = (rs)a$.

هرگاه R یکدار باشد و

(چهار) به ازای هر $a \in A$، $a1_R = 1_R a = a$،

دراین صورت گوییم A یک $R-$ مدول یکانی است. به همین نحو، یک $R-$ مدول راست (یکانی) نیز با تابعی چون $A \times R \longrightarrow A$ تعریف می‌شود که به ازای هر $a \in A$ و $r \in R$، با $ar \longmapsto (a,r)$ نشان داده می‌شود که در خواص (یک) تا(چهار) صدق می‌کند. هر مدول A روی حلقه‌ی جابجایی R، هم مدول چپ و هم مدول راست است، که در آن به ازای هر $a \in A$ و $r \in R$، $ar = ra$. (مگر آن که خلافش تصریح شود.)

تعریف ۲.۱ . فرض کنید R یک حلقه و A یک $R-$ مدول (چپ) باشد. زیر مجموعه‌ی ناتهی B یک زیر مدول A است، مشروط بر این که B یک زیر گروه جمعی A باشد وبه ازای هر $b \in B$ و $r \in R$، $rb \in B$.

تعریف ۳.۱ . فرض کنید A و B مدول‌هایی روی حلقه‌ی R باشند. تابع $f: A \longrightarrow B$ یک همریختی $R-$ مدولی است مشروط بر این که به ازای هر $a, c \in A$ و $r \in R$،

$$f(ra) = rf(a) \qquad , \qquad f(a+c) = f(a) + f(c).$$

همه همریختی های از A به B را با $\mathrm{Hom}_R(A,B)$ نشان می دهیم.

تعریف ۴.۱ . فرض کنیم A یک R — مدول راست و B یک R — مدول چپ باشد. حاصل ضرب تانسوری A و B عبارت است از یک گروه آبلی که با $A \otimes_R B$ نشان داده می‌شود و یک نگاشت R — دوجمعی $h : A \times B \longrightarrow A \otimes_R B$ به طوری که برای هر گروه آبلی G و هر نگاشت R — دوجمعی $f : A \times B \longrightarrow G$ همریختی منحصر به فرد $\bar{f} : A \otimes_R B \longrightarrow G$ موجود باشد به طوری که $\bar{f}h = f$.

قضیه ۵.۱ . برای هر R — مدول راست A و هر R — مدول چپ B، حاصل ضرب تانسوری $A \otimes_R B$ وجود دارد.

اثبات . به قضیه ۴.۱ از [۱٦] رجوع کنید. □

تعریف ٦.۱ . فرض کنید $\{A_i : i \in I\}$ یک خانواده از R — مدول ها باشد. حاصل ضرب این خانواده را که با $\prod_{i\in I} A_i$ نشان می دهیم، R — مدولی است که عناصر آن به صورت $(a_i)_{i\in I}$ و اعمالش به صورت زیر تعریف می شوند.

$$(a_i) + (b_i) = (a_i + b_i) \qquad , \qquad r(a_i) = (ra_i)$$

تعریف ۷.۱ . همچنین مجموع این خانواده را که با $\coprod_{i\in I} A_i$ نشان می دهیم، زیر مدولی از $\prod_{i\in I} A_i$ است که شامل همه $(a_i)_{i\in I}$ است که در آن تعداد متناهی از a_i ها مخالف صفر می باشد.

تذکر ۸.۱ . اگر $\{A_i : i \in I\}$، خانواده ای از R — مدول هایی روی حلقه‌ی R باشند و مجموعه‌ی اندیس I متناهی باشند، آن گاه $\prod_{i\in I} A_i = \coprod_{i\in I} A_i$.

تذکر ۹.۱ . اگر $|I| = \gamma$ و برای هر $i \in I$، $A_i = A$ آنگاه $\prod_{i\in I} A_i$ را با A^γ و $\coprod_{i\in I} A_i$ را با $A^{(\gamma)}$ نشان می دهیم.

تعریف ۱۰.۱ . دنباله‌ای از $R-$ مدول ها و $R-$ همریختی های

$$\cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{\varphi_2} M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_0 \xrightarrow{\varphi_0} M_{-1} \xrightarrow{\varphi_{-1}} M_{-2} \longrightarrow \cdots$$

را دقیق گوییم هرگاه، برای هر i، $Im\varphi_{i+1} = ker\varphi_i$ باشد.

تعریف ۱۱.۱ . فرض کنید A، B و C، $R-$ مدول و ψ و φ همریختی $R-$ مدولی باشند، در این صورت اگر دنباله‌ی $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$ دقیق باشد، آن را یک دنباله‌ی دقیق کوتاه گوییم.

قضیه ۱۲.۱ . (لم پنج) فرض کنید

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "t_1"'] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "t_2"'] & A_3 \arrow[r, "f_3"] \arrow[d, "t_3"'] & A_4 \arrow[r, "f_4"] \arrow[d, "t_4"'] & A_5 \arrow[d, "t_5"'] \\
B_1 \arrow[r, "h_1"] & B_2 \arrow[r, "h_2"] & B_3 \arrow[r, "h_3"] & B_4 \arrow[r, "h_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

یک نمودار جابجایی از $R-$ مدول ها و $R-$ همریختی ها باشد، با این ویژگی که هر دو سطر آن دنباله‌ی دقیق باشند.در این صورت

(یک) اگر t_2, t_4 بروریختی و t_5 تکریختی باشند، t_3 نیز بروریختی است.

(دو) اگر t_2, t_4 تکریختی و t_1 بروریختی باشند، t_3 نیز تکریختی است.

(سه) اگر t_1, t_2, t_4 و t_5 یکریختی باشند، t_3 نیز یکریختی است.

اثبات . به قضیه ۳۲.۳ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱۳.۱ . تابعگون هموردِ F را دقیق چپ نامیم هر گاه برای هر دنباله دقیق کوتاه

$$\circ \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow \circ$$

دنباله

$$\circ \longrightarrow F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C)$$

دقیق باشد. تابعگون F را دقیق راست نامیم هرگاه

$$F(A) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(C) \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد. حال اگر تابعگون F پادورد باشد، گوییم F، دقیق چپ است هرگاه

$$\circ \longrightarrow F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A)$$

دقیق باشد و دقیق راست است هر گاه

$$F(C) \longrightarrow F(B) \longrightarrow F(A) \longrightarrow \circ$$

دقیق باشد. اگر تابعگون F دقیق راست و چپ باشد، گوییم تابعگون F دقیق است.

قضیه ۱۴.۱ . برای هر R – مدول A، تابعگون‌های $\mathrm{Hom}_R(A,-)$ و $\mathrm{Hom}_R(-,A)$ دقیق چپ می باشند.

اثبات . به قضیه ۹.۲ از [١٦] رجوع کنید. □

تعریف ۱۵.۱ . دنباله دقیق کوتاه $\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$ شکافنده نامیده می‌شود، هر گاه $\mathrm{Img}f$، جمعوند مستقیمی از B باشد.

قضیه ۱۶.۱ . فرض کنید B, A و C، R — مدول باشند. اگر

$$\circ \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow \circ$$

دنباله‌ی دقیق کوتاه باشد، شرایط زیر معادل‌اند:

(یک) دنباله فوق دقیق شکافنده است.

(دو) R — همریختی مانند $f' : B \longrightarrow A$ موجود است که $f'f = ۱_A$،

(سه) R — همریختی مانند $g' : C \longrightarrow B$ موجود است که $gg' = ۱_C$.

اثبات . به قضیه‌ی ۱۸.۱ از فصل چهارم [۱۲] رجوع کنید. □

قضیه ۱۷.۱ . فرض کنید B و $\{A_i : i \in I\}$، مدول هایی روی حلقه‌ی R باشند، در این صورت یکریختی های $\mathbb{Z}$ — مدولی زیر وجود دارند،

(یک) $\mathrm{Hom}_R(B, \prod_{i\in I} A_i) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(B, A_i)$، که در این جا منظور از $\prod_{i\in I} A_i$، حاصل ضرب خانواده‌ی R — مدول های A_i است.

(دو) $\mathrm{Hom}_R(\coprod_{i\in I} A_i, B) \cong \prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R(A_i, B)$، که در این جا منظور از $\coprod_{i\in I}$،حاصل جمع مستقیم خانواده‌ی R — مدول های A_i است.

اثبات . به قضایای ۶.۲ و ۴.۲ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۱۸.۱ . فرض کنیم I یک مجموعه جهت دار (یعنی یک مجموعه که یک رابطه دوتایی با خاصیت انعکاسی وتعدی روی آن تعریف شده است.) و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. در این صورت یک سیستم مستقیم در $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس I عبارت است از فانکتور $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$.

یعنی برای هر $i \in I$ شئ F_i و برای هر $i,j \in I$ با شرط $i \leq j$ ریخت (مرفیسم) $\phi^i_j : F_i \longrightarrow F_j$ وجود داشته باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $i \in I$، ϕ^i_i همانی باشد.

(۲) اگر $i,j,k \in I$ و $i \leq j \leq k$، آن گاه $\phi^j_k \phi^i_j = \phi^i_k$.

تعریف ۱.۱۹ . فرض کنیم $\{F_i, \phi^i_j\}$ یک سیستم مستقیم در $\mathcal{C}$ باشد. حد مستقیم این سیستم عبارت است از شئ $\varinjlim F_i$ و خانواده ای از مرفیسم های $\alpha_i : F_i \longrightarrow \varinjlim F_i$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $i,j \in I$ با شرط $i \leq j$ داشته باشیم $\alpha_i = \alpha_j \phi^i_j$.

(۲) برای هر شئ X و هر خانواده از مرفیسم های $f_i : F_i \longrightarrow X$ با شرط $f_i = f_j \phi^i_j$ (به ازای $i \leq j$) یک مرفیسم منحصر به فرد $\beta : \varinjlim F_i \longrightarrow X$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[rr, "\beta"] & & X \\
& F_i \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[ur, "f_i"] \arrow[d, "\phi^i_j"] & \\
& F_j \arrow[uul, "\alpha_j"] \arrow[uur, "f_j"'] &
\end{tikzcd}$$

تعویض پذیر باشد.

قضیه ۱.۲۰ . حد مستقیم سیستم مستقیم از مدول های $\{F_i, \phi^i_j\}$ وجود دارد و به صورت زیر می باشد.

$$\varinjlim F_i = \frac{\coprod F_i}{S}$$

اثبات . به قضیه ۱۶.۲ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۲۱.۱ . نمودار زیر از همریختی های R − مدولی را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

مدول L به همراه همریختی های R − مدولی $\alpha : C \longrightarrow L$ و $\beta : B \longrightarrow L$ را جلوبر گوییم هرگاه نمودار زیر

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ C \arrow[r, "\alpha"] & L \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد و نیز اگر همریختی های R − مدولی $\alpha' : C \longrightarrow D$ و $\beta' : B \longrightarrow D$ چنان موجود باشند که نمودار فوق را جابه‌جا کنند آنگاه همریختی یکتای $\theta : L \longrightarrow D$، چنان موجود باشد که نمودار زیر

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "\beta"] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\ C \arrow[r, "\alpha"] \arrow[drr, "\alpha'"'] & L \arrow[dr, "\theta"] & \\ & & D \end{tikzcd}$$

جابه‌جایی باشد.

تعریف ۲۲.۱ . فرض کنیم I یک مجموعه جهت دار (یعنی یک مجموعه که یک رابطه دوتایی با خاصیت انعکاسی وتعدی روی آن تعریف شده است.) و $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. در این صورت یک سیستم معکوس در $\mathcal{C}$ با مجموعه اندیس I عبارت است از فانکتور پاد ورد $F : I \longrightarrow \mathcal{C}$.

یعنی برای هر $i \in I$ شئ F_i و برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leq j$ ریخت (مرفیسم) $\psi_i^j : F_j \longrightarrow F_i$ وجود داشته باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $i \in I$، ψ_i^i همانی باشد.

(۲) اگر $i, j, k \in I$ و $i \leq j \leq k$، آن گاه $\psi_i^j \psi_j^k = \psi_i^k$.

تعریف ۲۳.۱ . فرض کنیم $\{F_i, \psi_i^j\}$ یک سیستم مستقیم در $\mathcal{C}$ باشد. حد معکوس این سیستم عبارت است از شئ $\varprojlim F_i$ و خانواده ای از مرفیسم های $\alpha_i : \varprojlim F_i \longrightarrow F_i$ به طوری که در شرایط زیر صدق کند.

(۱) برای هر $i, j \in I$ با شرط $i \leq j$ داشته باشیم $\alpha_i = \psi_i^j \alpha_j$.

(۲) برای هر شئ X و هر خانواده از مرفیسم های $f_i : X \longrightarrow F_i$ با شرط $f_i = \phi_i^j f_j$ (به ازای $i \leq j$) یک مرفیسم منحصر به فرد $\beta : X \longrightarrow \varprojlim F_i$ وجود داشته باشد به طوری که دیاگرام

$$\begin{tikzcd}
\varinjlim F_i \arrow[dr, "\alpha_i"] \arrow[ddr, "\alpha_j"'] & & X \arrow[ll, "\beta"'] \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[ddl, "f_j"] \\
& F_i & \\
& F_j \arrow[u, "\psi^i_j"] &
\end{tikzcd}$$

تعویض پذیر باشد.

قضیه ۲۴.۱ . حد معکوس سیستم معکوس از مدول های $\{F_i, \phi^i_j\}$ وجود دارد.

اثبات . به قضیه ۲۲.۲ از [۱۶] رجوع کنید. □

تعریف ۲۵.۱ . نمودار زیر از همریختی های R − مدولی را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$

مدول L به همراه همریختی های R − مدولی $\alpha : L \longrightarrow C$ و $\beta : L \longrightarrow B$ را عقب‌بر گوییم هرگاه نمودار زیر

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\beta"'] & C \arrow[d, "g"] \\
B \arrow[r, "f"] & A
\end{tikzcd}$$