



دانشگاه علم و صنعت ایران  
دانشکده مکانیک

تعیین بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار محوری به  
کمک مشخصه‌های مودال

شهریار حقیقی قشقائی  
۱۴۲۶۱

پایان نامه برای دریافت درجه کارشناسی ارشد  
در رشته مهندسی مکانیک - طراحی کاربردی

استاد راهنما: دکتر محمد حق پناهی

بناخند او نجاشی

تقدیم به پدر و مادر عزیز  
و همسر مهربانم

## چکیده

در طراحی و تحلیل سازه هایی که در آنها پوسته های استوانه ای تحت بار گذاری محوری فشاری قرار دارند، بررسی مساله کمانش به عنوان یکی از مدهای ممکن تخریب ضروری است. در یک پوسته استوانه ای تقویت شده، علاوه بر پوسته، به تعداد تقویت کننده های طولی، تیرهایی بر بستر الاستیک (که همان پوسته استوانه ای است) وجود دارند و در مقابل نیروی محوری منجر به کمانش، مقاومت می کنند.

ایده اصلی این پروژه استفاده از تغییرات فرکانس های طبیعی یک سازه، در تعیین بار کمانش آن است. در کار حاضر نشان داده می شود برای سازه هایی که شکل مدهای ارتعاشی و کمانشی آنها یکسان است، مربع فرکانس های طبیعی با بار رابطه خطی دارد. همچنین در این پروژه نشان داده می شود که فرکانس طبیعی مربوط به شکل مدلی که سازه در آن مدل کمانش می کند، در بار بحرانی به صفر می رسد و همانگونه که قبل اشاره شد نحوه کاهش مربع فرکانس طبیعی فوق نسبت به بار خطی است.

از ایده مطرح شده در بالا می توان به دو نحو در تعیین بار کمانش یک سازه استفاده کرد:

\* اصلاح مدل به کمک مدهای ارتعاشی .

\* برون یابی منحنی مربع فرکانس طبیعی - بار .

استفاده از نتایج آزمایشات ارتعاشی در شناسایی سازه های واقعی و در پی آن اصلاح مدل های ریاضی ساخته شده برای تحلیل سازه (تعیین شرایط مرزی واقعی و نواقص هندسی اولیه، نحوه مدل کردن اتصالات و مانند آنها، تعیین خروج از مرکزی بار) از اهمیت فوق العاده ای برخوردار است. در روش دوم از این واقعیت استفاده می شود که مقدار فرکانس طبیعی متناظر با شکل مدل کمانش، در بار بحرانی به صفر می رسد. چنانچه فرکانس مربوط به مدل فوق، در بارهایی کوچکتر از بار بحرانی اندازه گیری شود، با برون یابی منحنی گذرنده از نقاط اندازه گیری شده، می توان باری که به ازاء آن فرکانس طبیعی فوق صفر می شود (بار کمانش) را تعیین نمود.

در این پروژه تیر به عنوان جزء ساده شده ای از پوسته استوانه ای تقویت شده (که در آن تیر بر بستر الاستیک قرار دارد) مورد تحلیل تئوری و آزمایشی و همچنین پوسته استوانه ای به تنها یی مورد بررسی تئوری قرار می گیرند.

## قدرتانی و تشکر

صمیمانه‌ترین و خالص‌ترین تشکرات قلبی‌ام را حضور جناب آقای دکتر محمد حق‌پناهی که در تمام مراحل پروژه، در نهایت صمیمیت و علاقمندی، و با گشاده‌روئی در اوقات مختلف مرا پذیرا بوده و از بذل هرگونه عنایت و راهنمائی دریغ نداشته‌اند، تقدیم می‌دارم.  
همچنین شایسته است از مسئولین محترم آزمایشگاه‌های مودال و مواد مركب و کارگاه دانشکده مکانیک، که در انجام این پروژه نهایت همکاری را داشته‌اند، صمیمانه تشکر نمایم.

## فهرست مطالب

صفحه	عنوان
۱	پیشگفتار
۴	فصل ۱ : کمانش پوسته های استوانه ای تحت بار محوری
۵	۱-۱- مقدمه
۶	۱-۲- ملاحظاتی در مورد کمانش پوسته های استوانه ای
۹	۱-۳- عوامل موثر بر استحکام کمانشی پوسته های استوانه ای
۱۲	۱-۴- روش های تعیین بار کمانش پوسته های استوانه ای
۱۳	فصل ۲ : تغییر فرکانس های طبیعی نسبت به بار محوری
۱۷	فصل ۳ : فرکانس های طبیعی تیر تحت بار محوری
۱۸	۳-۱- مقادیر تحلیلی بار کمانش و فرکانس های طبیعی تیر بدون بار محوری
۲۰	۳-۲- استخراج ماتریس های مورد نیاز در تحلیل کمانشی و ارتعاشی تیر به روش اجزاء محدود
۲۲	۳-۳- تغییرات فرکانس های طبیعی تیر نسبت به بار محوری
۲۶	فصل ۴ : روش تحلیلی و اجزاء محدود برای مسائل ارتعاشی و کمانشی پوسته های استوانه ای
۲۷	۴-۱- حل تحلیلی مسئله کمانش پوسته استوانه ای تحت بار محوری
۳۳	۴-۲- مقادیر تحلیلی فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای بدون بار محوری
۳۶	۴-۳- المان های پوسته با تقارن محوری
۳۸	۴-۴- ماتریس سختی هندسی برای المان پوسته دوار
۴۱	۴-۵- استخراج ماتریس های مورد استفاده در تحلیل کمانشی و ارتعاشی پوسته استوانه ای به روش اجزاء محدود
۴۴	فصل ۵ : فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای تحت بار محوری
۴۵	۵-۱- ارزیابی نتایج کمانشی و ارتعاشی بدست آمده از روش اجزاء محدود
۵۳	۵-۲- تغییرات فرکانس های طبیعی پوسته استوانه ای نسبت به بار محوری
۶۲	۵-۳- برخی ملاحظات عملی در استخراج فرکانس های طبیعی پوسته های استوانه ای

## فهرست مطالب

عنوان		صفحه
فصل ۶ : استخراج فرکانس‌های طبیعی تیر دوسرگیردار تحت بار محوری به کمک آزمایش		۶۴
۶۵	..... ملاحظات ابعادی	۱
۶۸	..... نمونه ۶-۲	آزاد
۷۰	..... نمونه کششی ۶-۳	۳
۷۲	..... نمونه فشاری ۶-۴	۴
۷۶	..... تحلیل نتایج آزمایش ۶-۵	۵
۷۸	فصل ۷ : نتیجه گیری و پیشنهاد برای ادامه کار	۱
۷۹	..... نتیجه گیری ۷-۱	۱
۸۳	..... پیشنهادات برای ادامه کار ۷-۲	۲

## فهرست تصاویر

صفحه	عنوان	شكل
		فصل اول:
۶	منحنی بارجابجایی برای یک سازه تحت بار کمانش.....	۱-۱
۷	تغییر مدهای محیطی در محدوده بعد از کمانش.....	۱-۲
۸	پدیده پرش، بعد از رسیدن به بار کمانش.....	۱-۳
		فصل سوم:
۲۳	تغییرات مربع اولین فرکانس طبیعی یک تیر با شرایط مرزی مختلف تحت بار محوری فشاری.....	۳-۱
۲۴	اثر شرایط مرزی بر نحوه تغییرات مربع فرکانس طبیعی اول تیر نسبت به بار محوری فشاری.....	۳-۲
۲۴	اثر شرایط مرزی بر نحوه تغییرات مربع فرکانس طبیعی دوم تیر نسبت به بار محوری فشاری.....	۳-۳
۲۵	تغییرات مربع فرکانس‌های طبیعی یک تیر با شرایط مرزی دوسرگیردار، تحت بار محوری فشاری.....	۳-۴
		فصل چهارم:
۲۷	مختصات به کار گرفته شده در تحلیل پوسته استوانه‌ای.....	۴-۱
۲۸	المان دیفرانسیلی از یک پوسته به همراه نیروها و گشتاورهای وارد بر آن..	۴-۲
۳۷	المان پوسته با تقارن محوری.....	۴-۳
		فصل پنجم:
۴۸	مقایسه همگرایی المان خطی و درجه سه نسبت به تنوری - Donnel در مد $n=4, m=1$ برای پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی SS3.....	۵-۱
۵۱	همگرایی مقدار بار کمانش (بدون بعد) با استفاده از المان خطی با مش‌بندی اصلاح شده و مش‌بندی با فواصل مساوی.....	۵-۲
۵۱	همگرایی مقدار بار کمانش (بدون بعد) با استفاده از المان درجه سه با مش‌بندی اصلاح شده و مش‌بندی با فواصل مساوی.....	۵-۳
۵۴	تغییرات فرکانس‌های بی بعد شده، مربوط به سه مد اول برای شرط مرزی SS4.....	۵-۴

## فهرست تصاویر

صفحه	عنوان	شکل
۵۵	تغییرات فرکانس‌های بی‌بعد شده، مربوط به مد $m=1, n=4$	۵-۵
۵۶	کاهش خطی مریع فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده در مد $n=1, m=17$ برای	۵-۶
۵۷	شرط مرزی SS4	۵-۷
	تغییرات مریع فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده مربوط به مد‌های طولی	۵-۸
۵۸	نرديك به مد کمانش برای شرایط مرزی SS4	۵-۹
	تغییرات مریع فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده مربوط به مد‌های طولی	۵-۱۰
۵۹	نرديك به مد کمانش برای شرایط مرزی SS4 در نرديكی بار کمانش.....	۵-۱۱
	کاهش خطی مریع فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده در مد $n=1, m=17$ برای	۵-۱۲
۶۰	شرط مرزی SS4 و C4	۵-۱۳
	کاهش خطی مریع فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد شده در مد $n=1, m=17$ برای	۵-۱۴
۶۰	شرط مرزی C4	۵-۱۵
	شكل مد ارتعاشی برای شرط مرزی C4	۵-۱۶
۶۱		
۶۲	شكل مد کمانشی برای شرط مرزی C4	۵-۱۷
	<b>فصل ششم:</b>	
۶-۱	منحنی نیرو بر حسب جابجایی فک دستگاه کشش، برای نمونه‌ای مشابه	۶-۱
۶۶	نمونه T300	۶-۲
۶۷	منحنی نیرو بر حسب جابجایی فک دستگاه کشش، برای نمونه C300-2	۶-۳
۶۹	نمونه آزاد (F300)	۶-۴
۷۱	تغییرات مریع اولین فرکانس طبیعی نمونه کششی (T300)	۶-۵
۷۱	تغییرات مریع فرکانس‌های طبیعی نمونه کششی (T300)	۶-۶
۷۲	نحوه گرفتن نمونه کششی	۶-۷
۷۳	نمونه فشاری به همراه پایه‌ها برای تامین شرایط دوسرگیردار	۶-۸
۷۴	تغییرات مریع اولین فرکانس طبیعی نمونه C306	۶-۹
۷۴	تغییرات مریع اولین فرکانس طبیعی نمونه 2-C300-2	۶-۱۰
۷۵	تغییرات مریع فرکانس‌های طبیعی نمونه 2-C300-2	۶-۱۱
۷۶	تغییرات مریع فرکانس‌های طبیعی نمونه C306	۶-۱۲

## فهرست جداول

صفحه	عنوان	جدول
		فصل اول:
۱۲	روش های تعیین بار کمانش پوسته های استوانه ای تحت بار محوری ...	۱-۱
		فصل سوم:
۱۹	مقادیر ویژه (بار محوری) معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر تحت بار محوری.....	۳-۱
۱۹	مقادیر ویژه (ارتعاشی) معادله دیفرانسیل حاکم بر تیر.....	۳-۲
		فصل چهارم:
۳۵	فرکانس های طبیعی بدون بعد با استفاده از تئوری خمثی و تئوری غشایی.....	۴-۱
		فصل پنجم:
۴۷	فرکانس های طبیعی بدون بعد ( $\Omega^2$ ) ، با استفاده از روش اجزا محدود و تئوری خمثی.....	۵-۱
۴۸	مقدار فرکانس طبیعی(بدون بعد) در مدهای $n=4, m=1$ برای پوسته استوانه ای با شرایط مرزی SS3، بدست آمده از المان خطی و درجه سه...	۵-۲
۵۰	تنش بحرانی بدون بعد برای شرایط مرزی مختلف با استفاده از المان درجه سه و الگوی مش بندی اصلاح شده.....	۵-۳
۵۲	مقدار بار کمانشی بدون بعد مقدار بار کمانش (بدون بعد) برای المان خطی و درجه سه با مش بندی اصلاح شده و مش بندی با فواصل مساوی.....	۵-۴
۵۲	تنش بحرانی بدون بعد برای شرایط مرزی SS2 برای استوانه به ابعاد $\frac{L}{R} = 1.75, \frac{R}{h} = 800$ .....	۵-۵
۵۵	حساسیت فرکانس های طبیعی بی بعد شده، مربوط به مدهای مختلف، نسبت به شرایط مرزی.....	۵-۶
۵۷	مقادیر مربع فرکانس های طبیعی بی بعد شده مربوط به مد کمانش برای شرایط مرزی SS3 ، C4 و C3 ، SS4	۵-۷

## فهرست جداول

صفحه	عنوان	جدول
	فصل ششم:	
۶۹	فرکانس های طبیعی تیر آزاد (F300)	۶-۱
۷۰	فرکانس های طبیعی تیر تحت بار کششی (T300)	۶-۲
۷۳	مشخصات نمونه های فشاری	۶-۳

## پیشگفتار

ایده اصلی این پروژه استفاده از تغییرات فرکانس‌های طبیعی یک سازه، در تعیین بار کمانش آن است.

در طراحی و تحلیل سازه‌هایی که در آنها پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار گذاری محوری فشاری قرار دارند، بررسی مساله کمانش به عنوان یکی از مدهای ممکن تخریب ضروری است. استفاده از تقویت کننده‌های طولی، استحکام کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای را افزایش می‌دهد. در یک پوسته استوانه‌ای تقویت شده، علاوه بر پوسته، به تعداد تقویت کننده‌های طولی، تیرهایی بر بستر الاستیک (که همان پوسته استوانه‌ای است) وجود دارند و در مقابل نیروی محوری منجر به کمانش، مقاومت می‌کنند. در پوسته‌های استوانه‌ای به کارگیری تقویت کننده‌های طولی تغییرات قابل ملاحظه‌ای در رفتار سازه ایجاد خواهد کرد. به عنوان مثال استحکام پوسته بدون تقویت به شدت تحت تاثیر نوافض هندسی اولیه است، در حالیکه استفاده از تقویت کننده‌های طولی، این حساسیت را کاهش می‌دهد و در مقابل، تاثیرپذیری از شرایط مرزی را قوت می‌بخشد.

در کار حاضر نشان داده می‌شود برای سازه‌هایی که شکل مدهای ارتعاشی و کمانشی آنها یکسان است، مربع فرکانس‌های طبیعی با بار رابطه خطی دارد. در اینجا منظور از بار، نیرو و یا فشاری است که منجر به کمانش می‌شود، مانند نیروی محوری در تیر و یا فشار هیدرولستاتیک در پوسته‌استوانه‌ای. همچنین در این پروژه نشان داده می‌شود<sup>۱</sup> که فرکانس طبیعی مربوط به شکل مدد که سازه در آن مد کمانش می‌کند<sup>۲</sup>، در بار بحرانی به صفر می‌رسد و همانگونه که قبلاً اشاره شد نحوه کاهش مربع فرکانس طبیعی فوق نسبت به بار خطی است.

<sup>۱</sup> در این مورد نیز فرض یکسان بودن شکل مدهای ارتعاشی و کمانشی لازم است.

<sup>۲</sup> مثلاً در یک تیر با تکیه‌گاه مفصلی، منظور اولین مد ارتعاشی است.

از ایده مطرح شده در بالا می‌توان به دو نحو در تعیین بار کمانش یک سازه استفاده کرد. به عبارت دیگر ایده فوق حاوی دو مفهوم زیر است که در تعیین بار کمانش می‌توان از هریک از آنها استفاده کرد:

- \* کاهش خطی مربع فرکانس‌های طبیعی سازه.
- \* کاهش خطی مربع فرکانس طبیعی مربوط به شکل مد کمانش و رسیدن این فرکانس به صفر در بار بحرانی.

استفاده از نتایج آزمایشات ارتعاشی در شناسایی سازه‌های واقعی و در پی آن اصلاح مدل‌های ریاضی ساخته شده برای تحلیل سازه<sup>۳</sup>، در تعیین بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای بسیار رایج است. در کمانش پوسته‌های استوانه‌ای علاوه بر تعیین شرایط مرزی واقعی و نواقص هندسی اولیه، نحوه مدل کردن اتصالات و مانند آنها، تعیین خروج از مرکزی بار از اهمیت فوق العاده‌ای برخوردار است. شناسایی و تعیین میزان خروج از مرکزی بار به کمک آزمایشات ارتعاشی سازه تحت بار محوری امکان پذیر می‌باشد.

در روش دوم از این واقعیت استفاده می‌شود که مقدار فرکانس طبیعی متناظر با شکل مد کمانش، در بار بحرانی به صفر می‌رسد. چنانچه فرکانس مربوط به مد فوق، در بارهایی کوچکتر از بار بحرانی اندازه گیری شود، با بروز یابی منحنی گذرنده از نقاط اندازه گیری شده، می‌توان باری که به ازاء آن فرکانس طبیعی فوق صفر می‌شود (بار کمانش) را تعیین نمود.

در این پروژه تیر به عنوان جزء ساده شده‌ای از پوسته استوانه‌ای تقویت شده (که در آن تیر بر بستر الاستیک قرار دارد) و همچنین پوسته استوانه‌ای به تنها یکی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

در فصل اول گزارش این پروژه، پدیده کمانش در پوسته‌های استوانه‌ای تقویت شده و بدون تقویت مورد بررسی اجمالی قرار می‌گیرد. در فصل دوم پدیده تغییرات خطی مربع فرکانس‌های طبیعی نسبت به بار مطرح در فصل بعدی به کمک روش اجزاء محدود این پدیده برای تیر تحت بار محوری نشان داده می‌شود.

در تحلیل پوسته‌های استوانه‌ای، برای بررسی صحت مقادیر بدست آمده از روش اجزاء محدود لازم است این مقادیر با نتایج بدست آمده از روش‌های دیگر مقایسه شوند. از این رو در فصل سوم این گزارش، مقدار تنش بحرانی<sup>۴</sup> در پوسته‌های استوانه‌ای به کمک روش تحلیلی و همچنین روش تحلیلی تعیین فرکانس‌های طبیعی برای یک پوسته استوانه‌ای با شرایط مرزی خاص به اختصار

<sup>۳</sup> modal updating

<sup>۴</sup> تنش موجود در پوسته استوانه‌ای در اثر اعمال بار کمانش.

بیان می‌گردد. در ادامه این فصل، دو نوع المان برای پوسته‌های استوانه‌ای معرفی می‌شود و نیز برخی جزئیات به کار گرفته شده در روش اجزاء محدود مطرح می‌گردد.

در فصل پنجم بعد از ارزیابی نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود و مقایسه آنها با مقادیر تحلیلی، تغییرات مریع فرکانس‌های طبیعی پوسته استوانه‌ای مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در فصل ششم، نتایج بدست آمده از آزمایش ارتعاشی تیر تحت بار محوری ارائه می‌شود و نتایج بدست آمده تحلیل می‌گردد.

در انتهای این گزارش ضمن جمع‌بندی نتایج بدست آمده در طی این پژوهش، پیشنهاداتی نیز جهت ادامه کار ارائه می‌شود.

## فصل ۱

### کمانش پوسته‌های استوانه‌ای تحت بار محوری

شامل:

۱. مقدمه

۲. ملاحظاتی در مورد کمانش پوسته‌های استوانه‌ای

۳. عوامل موثر بر استحکام کمانشی پوسته‌های استوانه‌ای

۴. روش‌های تعیین بار کمانش پوسته‌های استوانه‌ای