دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

رگرسیون فازی مبتنی بر $L_۱$ نرم

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آمار اقتصادی– اجتماعی)

مریم کلکین نما

استاد راهنما

دکتر سید محمود طاهری

۱۳۸۷

دانشگاه صنعتی اصفهان

دانشکده علوم ریاضی

پایان‌نامه کارشناسی ارشد (آمار اقتصادی– اجتماعی)خانم مریم کلکین نما

تحت عنوان

رگرسیون فازی مبتنی بر L_1 نرم

در تاریخ توسط کمیته تخصصی زیر مورد بررسی و تصویب نهائی قرار گرفت.

۱– استاد راهنمای پایان‌نامه دکتر سید محمود طاهری

۲– استاد مشاور پایان‌نامه سید رضا حجازی

۳– استاد داور ۱ دکتر حمید ملکی سروستانی
(دانشگاه صنعتی شیراز)

۴– استاد داور ۲ دکتر ایرج کاظمی (دانشگاه اصفهان)

سرپرست تحصیلات تکمیلی دانشکده

فهرست مطالب

چکیده

رگرسیون فازی مبتنی بر کمترین قدر مطلق انحرافات مورد مطالعه و تحقیق قرار گرفته است. ابتدا متری بر روی اعداد فازی LR تعریف می‌کنیم و سپس از آن برای به دست آوردن ضرایب مدل‌های بهینه رگرسیون فازی استفاده می‌نماییم. اساس روش پیشنهادی بدین صورت است که مجموع فاصله‌های بین خروجی‌های فازی مشاهده شده و خروجی‌های فازی برآورد شده از مدل که با متر معرفی شده اندازه‌گیری می‌شوند، مینیمم شود. برای حل این مساله مینیمم سازی، آن را به یک روش برنامه‌ریزی ریاضی(خطی و یا غیرخطی) تبدیل می‌کنیم.

پس از معرفی چند معیار نیکویی برازش مدل‌های رگرسیونی و در قالب چند مثال عددی، عملکرد روش رگرسیونی پیشنهادی با دیگر روش‌های رگرسیونی مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

رده بندی موضوعی: اولیه ۰۴A۷۲. ثانویه ۶۲J۰۵.

کلمات کلیدی: رگرسیون فازی، کمترین قدرمطلق انحرافات، متر بر فضای اعداد فازی و نیکویی برازش.

فصل ۱

مقدمه

در این فصل تعاریف و قضایای نظریه مجموعه‌های فازی، رگرسیون کمترین قدر مطلق انحرافات و رگرسیون فازی به منظور آشنایی خواننده و در حد لازم آورده شده است.
مطالب بخش اول عمدتا مبتنی بر مراجع [۶۴] و [۲۸] و[۶۱] و مطالب بخش دوم مبتنی بر مراجع [۷۰] و [۴۱] می‌باشند.

۱.۱ مجموعه‌های فازی

نظریه مجموعه‌های فازی در سال ۱۹۶۵ توسط پروفسور لطفی عسکر زاده[۱] دانشمند ایرانی تبار و استاد دانشگاه برکلی آمریکا ارایه شد[۶۱]. این نظریه از زمان ارایه آن تاکنون، گسترش و تعمیق زیادی یافته و کاربردهای گوناگونی در زمینه‌های مختلف پیدا کرده است.

در نظریه مجموعه‌های قطعی، یک مجموعه معمولی با یک ویژگی دقیق و معین مشخص می‌شود. بدین صورت که اگر یک عضو مجموعه مرجع، آن ویژگی را دارا باشد عضو مجموعه مورد نظر است و اگر فاقد آن ویژگی باشد، عضو آن مجموعه نیست. برای مثال، ویژگی «اول بودن» اعداد حقیقی، یک ویژگی خوش تعریف است. به این صورت که برای هر عدد حقیقی می‌توان گفت که یا یک عدد اول است یا یک عدد اول نیست. با فرض اینکه X یک مجموعه مرجع باشد، برای هر زیرمجموعه معمولی A از مجموعه

[۱] L. A. Zadeh

مرجع که با یک ویژگی خوش تعریف مشخص می‌شود، می‌توان یک تابع نشانگر تعریف کرد که برای هر عضو متعلق به A مقدار یک و برای هر عضو غیرمتعلق به A، مقدار صفر بگیرد، یعنی

$$I_A(x) = \begin{cases} ۱ & x \in A \\ ۰ & x \notin A. \end{cases}$$

اما نکته مهم این است که اکثر مفاهیمی که با آن‌ها مواجه هستیم و براساس آن زندگی روزمره خود را پیش می‌بریم، مفاهیمی دقیق و خوش تعریف نیستند، مثلاً هوای خیلی سرد، لامپ با طول عمر زیاد، مجموعه اعداد بزرگ و ... . برای این ویژگی‌ها مرز مشخص و دقیقی را نمی‌توان تعیین کرد. برای مثال از نظر یک فرد، هوای ۵ درجه سانتی‌گراد و از نظر فرد دیگری هوای ۲− درجه سانتی‌گراد، هوای خیلی سرد است. نظریه مجموعه‌های قطعی از عهده صورت‌بندی این مفاهیم و ویژگی‌ها برنمی‌آید.

نظریه مجموعه‌های فازی، یک قالب جدید ریاضی به منظور به الگو درآوردن این مفاهیم و ویژگی‌ها و تحلیل آن‌ها ارایه می‌دهد. این نظریه یک تعمیم طبیعی از نظریه مجموعه‌های قطعی است. برای توضیح مفهوم مجموعه فازی، به یک مثال توجه کنید. فرض کنید می‌خواهیم مجموعه اعداد بزرگ را تعریف کنیم. طبیعی است که «بزرگ بودن» یک ویژگی خوش تعریف نیست. بنا به پیشنهاد زاده، اجازه می‌دهیم که هر x در مجموعه اعداد حقیقی، به اندازه یک مقدار بین صفر و یک، عضو مجموعه اعداد بزرگ باشد، به طوری که هر چه آن x بزرگ‌تر باشد، عدد مورد نظر برای عضویت آن در مجموعه اعداد بزرگ به یک نزدیک‌تر باشد و بالعکس هر چه آن x کوچک‌تر باشد، عدد مربوط به عضویت آن در مجموعه اعداد بزرگ، به صفر نزدیک‌تر باشد. در این صورت به جای این‌که بگوییم یک عدد حقیقی، بزرگ است یا بزرگ نیست، می‌گوییم این عدد به اندازه مثلاً ۰/۸ عضو مجموعه «اعداد بزرگ» است. اساس کار نظریه مجموعه‌های فازی، گسترش مفهوم تابع نشانگر یک مجموعه، با برد $[۰, ۱]$ به جای $\{۰, ۱\}$ است.

تعریف ۱.۱ یک زیر مجموعه فازی A (از این پس به کوتاهی: مجموعه فازی) از مجموعه مرجع X، توسط یک تابع عضویت[۲] $\mu_A(x) : X \longrightarrow [۰, ۱]$ مشخص می‌شود که در آن برای هر $x \in X$، $\mu_A(x)$ میزان عضویت x در مجموعه فازی A است. نزدیکی این عدد به یک، نشان دهنده تعلق بیشتر x به مجموعه فازی A و نزدیکی آن به صفر، نشان دهنده تعلق کمتر x به A است.

توجه کنید که اگر x کاملاً در A عضو باشد، $\mu_A(x) = ۱$ و اگر اصلاً در A عضو نباشد، $\mu_A(x) = ۰$ است. لذا مجموعه‌های معمولی و توابع نشانگر آن‌ها حالت خاصی از مجموعه‌های فازی و توابع عضویت آن‌ها

[۲] Membership Function

است.

تذکر: از این پس به منظور سادگی، گاهی به جای $\mu_A(x)$، از $A(x)$ به عنوان تابع عضویت مجموعه فازی A استفاده می‌کنیم.

برای نشان دادن یک مجموعه فازی روش‌های مختلفی رایج است. یک روش متداول به کار بردن مستقیم تابع عضویت مجموعه فازی است که آن وقتی که مجموعه مرجع پیوسته باشد استفاده می‌شود.

مثال ۱.۱ فرض کنید $X = \{۱, ..., ۷\}$. می‌خواهیم یک مجموعه فازی تعریف کنیم که اعضای آن ویژگی نادقیق «کوچک» را داشته باشند. برای مدل‌سازی این مجموعه کافی است تابع عضویت این مجموعه فازی را مشخص کنیم. تعیین این تابع بستگی به نظر تصمیم‌گیرنده دارد. مثلاً یک تابع عضویت می‌تواند به صورت زیر تعریف شود

$$A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۱ \\ ۰/۹ & x = ۲ \\ ۰/۷ & x = ۳ \\ ۰/۵ & x = ۴ \\ ۰/۳ & x = ۵ \\ ۰/۱ & x = ۶ \\ ۰ & x = ۷ \end{cases}$$

برای مثال $A(۳) = ۰/۷$ بدین معنی است که از نظر تصمیم‌گیر عدد ۳ به اندازه ۰/۷ به مجموعه فازی اعداد کوچک تعلق دارد. به سخن دیگر از نظر وی گزاره « ۳ عددی کوچک است » به اندازه ۰/۷ درست است.

نکته: تعریف تابع عضویت یک مجموعه فازی بستگی به نظر فرد تصمیم‌گیر دارد. در واقع این تعریف جنبه ذهنی و شخصی دارد. لذا می‌توان توابع عضویت مختلفی را برای یک مجموعه فازی که بیانگر یک ویژگی فازی باشد، متصور بود.

تعریف ۲.۱ فرض کنید X یک مجموعه مرجع و A یک زیرمجموعه فازی از آن باشد،

$$supp(A) = \{x \in X | A(x) > ۰\}$$

تعریف ۳.۱ $M = sup_x A(x)$ ارتفاع یک مجموعه فازی نامیده می‌شود. اگر این عدد برابر یک باشد آن‌گاه مجموعه فازی A را نرمال و در غیر این‌صورت آن را زیرنرمال می‌نامیم. البته هر مجموعه فازی زیرنرمال را می‌توان با تقسیم درجات عضویت آن بر ارتفاع A نرمال کرد.

مثال ۲.۱ در مثال ۱.۱، $supp(A) = \{۱, ۲, ..., ۷\}$. همچنین مجموعه فازی A مجموعه فازی نرمال است.

تعریف ۴.۱ زیر مجموعه معمولی از عناصر X را که درجه عضویت آن‌ها در مجموعه فازی A، حداقل به بزرگی α باشد را $\alpha-$برش A (مجموعه تراز α ام وابسته به A) گوییم و با A_α نشان می‌دهیم

$$A_\alpha = \{x \in X | A(x) \geq \alpha\} \quad ۰ < \alpha \leq ۱$$

همچنین ۰$-$برش A را به صورت بستار تکیه‌گاه آن یعنی به صورت $A_۰ = cl(\{x \in X | A(x) > ۰\})$ تعریف می‌کنیم.

مثال ۳.۱ فرض کنید$X = \{۰, ۱, ۲, ...\}$ مجموعه مقادیر یک متغیر تصادفی پواسون مربوط به تعداد تصادفات شبانه‌روزی در یک ناحیه باشد و فرض کنید مجموعه فازی A بیانگر «تعداد تصادفات کم » با تابع عضویت زیر تعریف شود

$$A(x) = \begin{cases} ۱ & x = ۰ \\ ۰/۸ & x = ۱ \\ ۰/٦ & x = ۲ \\ ۰/۴ & x = ۳ \\ ۰/۲ & x = ۴ \end{cases}$$

در این صورت چند α $-$برش A عبارت‌اند از

$$A_{۰/۲} = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\}, \quad A_{۰/۵} = \{۰, ۱, ۲\}$$
$$A_{۰/٦} = \{۰, ۱, ۲\}, \quad A_{۰/۸۵} = \{۰\}$$

به طور خلاصه می‌توان نوشت

$$A_\alpha = \begin{cases} \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴\} & ۰ < \alpha \leq ۰/۲ \\ \{۰, ۱, ۲, ۳\} & ۰/۲ < \alpha \leq ۰/۴ \\ \{۰, ۱, ۲\} & ۰/۴ < \alpha \leq ۰/٦ \\ \{۰, ۱\} & ۰/٦ < \alpha \leq ۰/۸ \\ \{۰\} & ۰/۸ < \alpha \leq ۱ \end{cases}$$

قضیه ۱.۱ (اتحاد تجزیه[۳]) [٦۲] فرض کنید A مجموعه‌ای فازی از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت $A(.)$ باشد. در این صورت

$$A(x) = sup_{\alpha \in [۰, ۱]} \alpha . I_{A_\alpha (x)}$$

که در آن $I_{A_\alpha}(.)$ تابع نشانگر α $-$برش A است.

[۳] Resolution Identity

تعریف ۵.۱ [۶۱] مجموعه فازی A از $\mathbb{R}$ را محدب گوییم اگر هر α−برش A (برای $0 < \alpha \leq 1$) محدب باشد.

مثال ۴.۱ مجموعه فازی تقریبا صفر را با تابع عضویت $A(x) = e^{-x^2}$ در نظر بگیرید. α−برش‌های A به صورت زیر می‌باشند

$$\begin{aligned} A_\alpha &= \{x : A(x) \geq \alpha\} \\ &= \{x : -\sqrt{-ln\alpha} \leq x \leq \sqrt{-ln\alpha}\} \end{aligned}$$

که به روشنی مجموعه‌های محدب هستند، لذا A یک مجموعه فازی محدب است.

اکنون اصل مهمی را بیان می‌کنیم که برای تعیین حاصل عمل یک تابع بر مجموعه‌های فازی به کار می‌رود.

تعریف ۶.۱ [۶۴] (اصل توسیع یا اصل گسترش[۴]) فرض کنید $X_1, ..., X_n$، n مجموعه مرجع و $X = X_1 \times ... \times X_n$ حاصل ضرب دکارتی آن‌ها باشد. هم‌چنین $A_1, ..., A_n$، n مجموعه فازی به ترتیب از $X_1, ..., X_n$ باشند. به‌علاوه $y = f(x_1, ..., x_n)$ یک نگاشت از X به Y باشد. حاصل عمل f بر n مجموعه فازی $A_1, ..., A_n$ به صورت مجموعه فازی B از Y با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$B(y) = f(A_1, ..., A_n)(y) = \begin{cases} sup_{\substack{x_1, ..., x_n \\ y = f(x_1, ..., x_n)}} min\{A_1(x_1), ..., A_n(x_n)\} & f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

مثال ۵.۱ فرض کنید X_1 و X_2 مجموعه اعداد حسابی، A_1 مجموعه فازی اعداد خیلی کوچک و A_2 مجموعه فازی اعداد تقریبا ۲ با توابع عضویت زیر باشند

$$A_1 = \left\{\frac{1}{0}, \frac{0/8}{1}, \frac{0/6}{2}, \frac{0/4}{3}, \frac{0/2}{4}\right\}, \quad A_2 = \left\{\frac{0/5}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0/5}{3}\right\}$$

آن‌گاه براساس اصل توسیع، حاصل عمل $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ بر A_1 و A_2 به صورت مجموعه فازی زیر به‌دست می آید.

$$\left\{\frac{0/5}{1}, \frac{1}{2}, \frac{0/8}{3}, \frac{0/6}{4}, \frac{0/5}{5}, \frac{0/4}{6}, \frac{0/2}{7}\right\}$$

[۴] Extension Principle

اعداد فازی

اعداد فازی که زیر مجموعه‌های فازی خاصی از مجموعه اعداد حقیقی هستند، در بیشتر مسایل کاربردی استفاده می‌شوند. در ادامه مفاهیم و نتایج اصلی درباره اعداد فازی را براساس مرجع [٦۴] یادآوری می‌کنیم.

تعریف ۷.۱ فرض کنید $f(x)$ تابعی حقیقی مقدار بر $\mathbb{R}$ باشد. در این صورت f را نیم‌پیوسته بالایی [5] گوییم هرگاه

الف) [۴۳] برای هر $\alpha \in (۰, ۱]$ مجموعه $\{x : f(x) \geq \alpha\}$ مجموعه‌ای بسته در $\mathbb{R}$ باشد.

یا به طور معادل

ب)[۴۲] $f(x)$ نیم‌پیوسته بالایی در y است اگر و فقط اگر

$$\forall \epsilon > ۰, \exists \delta > ۰ \; s.t. \; |x - y| < \delta \longrightarrow f(x) - f(y) < \epsilon.$$

تعریف ۸.۱ [٦۴] مجموعه فازی N از $\mathbb{R}$ را یک عدد فازی (فازی حقیقی) گوییم، اگر

۱) N یک مجموعه فازی محدب و نرمال و تک نمایی باشد،

۲) تابع عضویت آن، یک تابع نیم‌پیوسته بالایی باشد.

منظور از تک نمایی بودن این است که تنها یک x وجود داشته باشد که $A(x) = ۱$.

با این تعریف و نیز تعریف تحدب، معلوم می‌شود که اگر N یک عدد فازی باشد، آن‌گاه مجموعه α−برش آن بسته و نیز محدب است و این یعنی که N_α یک بازه بسته است. مجموعه $\alpha -$ برش N را با $N_\alpha = [N_\alpha^L, N_\alpha^U]$ نشان می‌دهیم. چون تابع عضویت N نیم پیوسته بالایی است، N_α^L, N_α^U نیز نسبت به α پیوسته هستند.

N یک عدد دقیق[6] (غیر فازی) با مقدار m نامیده می‌شود هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد

$$N(x) = \begin{cases} ۱ & x = m \\ ۰ & x \neq m \end{cases}$$

توجه کنید که برای هر α، $N_\alpha^L = N_\alpha^U = m$.

مجموعه همه اعداد فازی از $\mathbb{R}$ را با $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۹.۱ [٦۴] عدد فازی N را مثبت (منفی) گوییم اگر برای هر $x \leq ۰$ ($x \geq ۰$)، $N(x) = ۰$.

عدد فازی N را نامنفی (نامثبت) گوییم اگر برای هر $x < ۰$ ($x > ۰$)، $N(x) = ۰$.

---
[5] Upper Semicontinuous

[6] Crisp

نوع خاصی از اعداد فازی، اعداد فازی LR هستند که علاوه بر این‌که ساختار ویژه‌ای دارند، برخی اعمال حسابی بر آن‌ها از قواعد خاصی پیروی می‌کند. این ویژگی‌ها باعث شده است که در کاربردها، عمدتاً از این نوع اعداد فازی استفاده شود.

تعریف ۱۰.۱ [۱۴](عدد فازی LR) اگر ساختار تابع عضویت عدد فازی N به صورت زیر باشد

$$N(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) & x \leq m \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) & x \geq m \end{cases}$$

که در آن توابع شکل L و R، توابعی غیر صعودی از $\mathbb{R}^+$ به $[0,1]$ هستند و $L(0) = R(0) = 1$، آن‌گاه N را یک عدد فازی LR نامیده و با نماد $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ نشان می‌دهیم. عدد حقیقی m را مقدار نما (یا مرکز و یا میانه) و اعداد مثبت α و β را به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌نامیم.
در صورتی که $L = R$ و $\alpha = \beta$، آن‌گاه عدد فازی را متقارن نامیده و با $N = (m, \alpha)_{LL}$ نشان می‌دهیم.
برای $\alpha = 0$ قرار می‌دهیم $L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right) = 0$ و برای $\beta = 0$ قرار می‌دهیم $R\left(\frac{x-m}{\beta}\right) = 0$، و لذا منظور از $X = (m, 0, 0)_{LR}$ یک عدد دقیق با مقدار m است.

اعداد فازی LR متداول در تعریف زیر معرفی شده‌اند.

تعریف ۱۱.۱ فرض کنید $N = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $L = R$
الف) اگر $L(x) = max\{0, 1 - |x|\}$، آن‌گاه N را یک عدد فازی مثلثی [۷] نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_T$ نشان می‌دهیم.
ب) اگر $L(x) = e^{-x^2}$، آن‌گاه N را یک عدد فازی نرمال [۸] نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_N$ نشان می‌دهیم.
ج) اگر $L(x) = max\{0, 1 - x^2\}$، آن‌گاه N را یک عدد فازی سهموی [۹] نامیده و با $N = (m, \alpha, \beta)_P$ نشان می‌دهیم.

تعریف ۱۲.۱ (بازه‌ی فازی LR) اگر در تعریف عدد فازی شرط تک‌نمایی بودن برداشته شود، آنگاه یک بازه فازی با نماد $N = (m_1, m_2, \alpha, \beta)_{LR}$ و با تابع عضویت زیر خواهیم داشت

$$N(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1-x}{\alpha}\right) & x \leq m_1 \\ 1 & m_1 \leq x \leq m_2 \\ R\left(\frac{x-m_2}{\beta}\right) & x \geq m_2 \end{cases}$$

که در آن اعداد حقیقی m_1 و m_2 به ترتیب نمای اول و نمای دوم و اعداد مثبت α و β به ترتیب پهنای چپ و پهنای راست N می‌باشند.

[۷] Triangular
[۸] Normal
[۹] Parabolic

اگر $L(x) = R(x) = max\{۰, ۱ - |x|\}$ آن‌گاه بازه فازی را عدد فازی ذوزنقه‌ای [۱۰] نیز می‌نامند و با $N = (m_۱, m_۲, \alpha, \beta)_{Tr}$ نشان می‌دهند.
بازه فازی می‌تواند به عنوان تعمیمی از عدد فازی تلقی شود. در واقع زمانی که $m_۱ = m_۲ = m$، آن‌گاه‌بازه فازی به عدد فازی تبدیل می‌شود.

اکنون چند تعریف و قضیه را در مورد حساب اعداد فازی بیان می‌کنیم. نخست مفهوم $T-$ نرم را یادآور می‌شویم.

تعریف ۱۳.۱ [۶۴] تابع دو متغیره $T(x, y) : I \times I \to I = [۰, ۱]$ را یک $T-$نرم[۱۱] گویند هرگاه

۱) $\forall x \in [۰, ۱],\ T(x, ۱) = x$

۲) یکنوایی: $x_۱ \le x_۲,\ y_۱ \le y_۲ \to T(x_۱, y_۱) \le T(x_۲, y_۲)$

۳) جابجایی: $T(x, y) = T(y, x)$

۴) شرکت پذیری: $T(x, T(y, z)) = T(T(x, y), z)$

نمونه‌هایی از $T-$نرم‌ها، $T_m(a, b) = min(a, b)$، $T_p(a, b) = ab$ و $T_L(a, b) = max(۰, a+b-۱)$ هستند.

گزاره ۱.۱ [۶۴] برای هر $T-$نرم دلخواه داریم

$$T_w(x, y) \le T(x, y) \le T_m(x, y)$$

که $T_m(x, y) = min(x, y)$. همچنین

$$T_w(x, y) = \begin{cases} x & y = ۱, \\ y & x = ۱, \\ ۰ & not. \end{cases}$$

ضعیف‌ترین T $-$نرم است که به نام $T-$ نرم دراستیک نیز نامیده می‌شود.

تعریف ۱۴.۱ [۱۴] فرض کنید M و N دو عدد فازی و $* : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک عملگر دوتایی بر اعداد حقیقی باشند. حاصل عمل تعمیم یافته $\circledast$ بر M و N بر طبق اصل توسیع، به صورت یک مجموعه فازی از $\mathbb{R}$ با تابع عضویت زیر تعریف می‌شود

$$(M \circledast N)(z) = Sup_{x,y;\ x*y=z} T(M(x), N(y))$$

[۱۰] Trapezoidal
[۱۱] T-Norm

که در آن $T(.,.)$، یک T—نرم است.

در حالت خاص برای چهار عمل اصلی و با استفاده از T—نرم مینیمم در تعریف بالا داریم

$$(M \oplus N)(z) = Sup_{z=x+y} min[M(x), N(y)]$$

$$(M \ominus N)(z) = Sup_{z=x-y} min[M(x), N(y)]$$

$$(M \otimes N)(z) = Sup_{z=x*y} min[M(x), N(y)]$$

$$(M \oslash N)(z) = Sup_{z=x/y} min[M(x), N(y)]$$

به شرط اینکه در رابطه آخر، $y \neq ۰$.

از این پس، مگر در مواردی که گفته شود، همواره از عملگر مینیمم برای حساب اعداد فازی استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲.۱ فرض کنید M و N دو عدد فازی مثبت باشند. در این صورت $M \oplus N$، $M \ominus N$، $M \otimes N$ و $M \oslash N$ نیز اعداد فازی هستند.

در ادامه اعمال حسابی بر اعداد فازی LR را با استفاده از T—نرم مینیمم بیان می‌کنیم.

قضیه ۳.۱ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $\lambda \in \mathbb{R}$ آن‌گاه

$$\lambda M = M\lambda = \begin{cases} (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR}, & \lambda > ۰ \\ (\lambda m, -\lambda\beta, -\lambda\alpha)_{RL}, & \lambda < ۰ \end{cases}$$

نتیجه ۴.۱ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$، آن‌گاه قرینه M به صورت $(-)M = (-m, \beta, \alpha)_{RL}$ می‌باشد.

قضیه ۵.۱ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \gamma, \delta)_{LR}$، آن‌گاه $M \oplus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M \oplus N = (m + n, \alpha + \gamma, \beta + \delta)_{LR}$$

نتیجه ۶.۱ اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \gamma, \delta)_{RL}$، آن‌گاه $M \ominus N$ یک عدد فازی LR به صورت زیر است

$$M \ominus N = (m - n, \alpha + \delta, \beta + \gamma)_{LR}$$

درباره ضرب و تقسیم، روابط دقیقی هم‌چون آنچه که برای جمع و تفاضل گفته شد وجود ندارد. اصولاً حاصل ضرب دو عدد فازی LR، یک عدد فازی LR، نخواهد بود. هم‌چنین در حالت‌هایی که حاصل تقسیم دو عدد فازی LR یک عدد فازی می‌شود، عدد حاصل از نوع LR نیست. اما برای ضرب و تقسیم، روابطی تقریبی پیشنهاد شده که در ادامه آن‌ها را بیان می‌کنیم.

روابط تقریبی برای ضرب [۱۴]

الف— اگر $M > ۰$ و $N > ۰$ آن‌گاه

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \simeq (mn, m\gamma + n\alpha, m\delta + n\beta)_{LR}$$

ب— اگر $M < ۰$ و $N > ۰$ آن‌گاه

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \simeq (mn, n\alpha - m\delta, n\beta - m\gamma)_{LR}$$

ج— اگر $M > ۰$ و $N < ۰$ آن‌گاه

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \simeq (mn, m\gamma - n\beta, m\delta - n\alpha)_{LR}$$

ه— اگر $M < ۰$ و $N < ۰$ آن‌گاه

$$M \otimes N = (m, \alpha, \beta)_{LR} \otimes (n, \gamma, \delta)_{LR} \simeq (mn, -n\beta - m\delta, -n\alpha - m\gamma)_{RL}$$

روابط تقریبی برای تقسیم [۳۹]

اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ یک عدد فازی مثبت باشد، آن‌گاه

$$M^{-۱} \simeq (m^{-۱}, \beta m^{-۲}, \alpha m^{-۲})_{RL}$$

اگر $M = (m, \alpha, \beta)_{LR}$ و $N = (n, \gamma, \delta)_{RL}$ دو عدد فازی مثبت باشند، آنگاه

$$(M \oslash N) \simeq (\frac{m}{n}, \frac{\delta m + \alpha n}{n^{۲}}, \frac{\gamma m + \beta n}{n^{۲}})_{LR}$$

هر چه پهناهای اعداد فازی M و N نسبت به مقادیر نمای آن‌ها کوچک باشند، روابط فوق دقیق‌تر هستند. نیز در همسایگی مقادیر نما، این روابط دقت بیشتری دارند.

حساب اعداد فازی طبق اتحاد تجزیه

تعریف ۱۵.۱ فرض کنید $\odot_{int}$ یک عملگر دوتایی $\oplus_{int}$، $\ominus_{int}$، $\otimes_{int}$ یا $\oslash_{int}$ بر دو بازه‌ی $M_\alpha = [M_\alpha^L, M_\alpha^U]$ و $N_\alpha = [N_\alpha^L, N_\alpha^U]$ باشد. در این صورت مجموعه $M_\alpha \odot_{int} N_\alpha$ به صورت زیر تعریف می شود

$$M_\alpha \odot_{int} N_\alpha = \{z \in \mathbb{R} | z = x \circ y, \forall x \in M_\alpha, \forall y \in N_\alpha\},$$

که در آن $\circ$ یک عملگر دوتایی $+$، $-$، $\times$ یا $/$ می‌باشد.

قضیه ۷.۱ [۲۸]اگر a و b دو عدد فازی باشند آن‌گاه

الف)

$$(a \oplus b)_\alpha = [a_\alpha^L + b_\alpha^L, a_\alpha^U + b_\alpha^U], \quad (a \ominus b)_\alpha = [a_\alpha^L - b_\alpha^U, a_\alpha^U - b_\alpha^L]$$

ب)

$$(a \otimes b)_\alpha = [min\{a_\alpha^L b_\alpha^L, a_\alpha^U b_\alpha^U, a_\alpha^L b_\alpha^U, a_\alpha^U b_\alpha^L\}, max\{a_\alpha^L b_\alpha^L, a_\alpha^U b_\alpha^U, a_\alpha^L b_\alpha^U, a_\alpha^U b_\alpha^L\}]$$

ج) اگر a یک عدد فازی نامنفی و b یک عدد فازی مثبت باشند آن‌گاه

$$(a \oslash b)_\alpha = [a_\alpha^L / b_\alpha^U, a_\alpha^U / b_\alpha^L]$$

۲.۱ رگرسیون کمترین قدرمطلق انحرافات

رگرسیون

یکی از کاربردی‌ترین روش‌ها برای تحلیل داده‌ها در بین ابزارهای آماری، تحلیل رگرسیونی است. تحلیل رگرسیونی، روشی کارآمد برای بررسی و مدل سازی ارتباط بین متغیرها است که از این مدل‌های رگرسیونی در توصیف داده‌ها، برآورد پارامترهای مجهول، پیش‌گویی و کنترل استفاده می‌شود. به منظور دست‌یابی به یک مدل رگرسیونی به مشاهداتی از متغیرهای مستقل (توضیحی) $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_p)$ و نیز مشاهداتی از متغیر وابسته (پاسخ) y نیاز داریم. برای توضیح، ساده‌ترین حالت را در نظر می‌گیریم که تنها یک متغیر مستقل x وجود داشته باشد. فرض کنید که رابطه بین این دو متغیر یک رابطه خطی به صورت زیر باشد

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i \qquad (۱)$$

که در آن β_0 عرض از مبدا و β_1 شیب خط است. از آن‌جایی که مشاهدات دقیقاً روی یک خط مستقیم قرار نمی‌گیرند و مقداری خطا بین هر y_i و مقدار متناظر آن از مدل وجود دارد، لذا معادله (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i \qquad (2)$$

که در آن مولفه‌های ϵ_i، به عنوان خطای تصادفی تلقی می‌شوند. بدین معنی که به عنوان متغیری تصادفی، اندازه ناتوانی مدل در برازش دقیق داده‌ها را اندازه‌گیری می‌کنند. این خطا ممکن است به دلیل عدم حضور برخی از متغیرهای موثر، خطاهای تصادفی مربوط به مشاهدات و اندازه‌گیری‌ها و ... صورت پذیرد [۴۱].

روش‌های مختلفی برای برآورد پارامترهای یک مدل رگرسیونی وجود دارد. سه تا از این روش‌ها، عبارت‌اند از (۱) مینیمم سازی مجموع مربعات انحرافات، (۲) مینیمم سازی مجموع قدرمطلق انحرافات و (۳) مینیمم سازی ماکزیمم قدرمطلق انحرافات. این سه روش، اعضای کلاس برآوردگرهای L_p هستند که توسط مینیمم کردن آنچه که به نام متر مینکوسکی [۱۲] یا معیار نرم$-L_p$، تعریف شده و به صورت

$$\{\sum_{i=1}^{n} |\epsilon_i|^p\}^{1/p} \quad p \geq 1$$

است، به دست می‌آیند. در حالت $p = 1$، این متربه نام متر قدرمطلق و یا نرم$-L_1$ شناخته شده است و مینیمم سازی این متر (فاصله)، به نام روش کمترین قدر مطلق انحرافات نامیده می‌شود. در حالت $p = 2$، این معیار به نام متر اقلیدسی و یا نرم$-L_2$ خوانده می‌شود که مینیمم سازی مبتنی بر آن، به نام روش کمترین مربعات انحرافات نامیده می‌شود. روش کلاسیک برای حل مسایل رگرسیون، روش کمترین مربعات مقادیر است. در حالت $p = \infty$ مینیمم کردن L_p، به صورت مینیمم کردن ماکزیمم قدرمطلق مقادیر است و به نام روش مینیماکس یا چبیشف [۱۳] خوانده می‌شود [۱۳].

پایه و اساس روش کمترین مربعات به گوس [۱۴] و لژاندر [۱۵] باز می‌گردد. این روش (و تعمیم‌های آن) به دلیل راحتی محاسبات و جواب‌های بسته مبتنی بر آن مورد توجه بسیاری از آماردانان است.

در مدل رگرسیون خطی چندگانه $y_i = \sum_{k=1}^{p} \beta_k x_{ik} + \epsilon_i$ وقتی که مشاهدات y_i دارای توزیع نرمال باشند، روش کمترین مربعات برآوردهایی از β_j ها ارایه می‌کند که دارای خواص آماری خوبی است، از جمله اینکه در این حالت برآوردهای حاصل از این روش، همان برآوردهای ماکزیمم درستنمایی هستند. در

[۱۲] Minkowsky
[۱۳] Chebychev
[۱۴] C.F. Gauss
[۱۵] A.M. Legendre

حالی‌که مشاهدات توزیع غیر نرمال داشته باشند به‌خصوص که از توزیع‌های با دم سنگین (ضخیم) و یا طولانی آمده باشند، ممکن است روش کمترین مربعات مناسب نباشد، چرا که دم‌های ضخیم در یک توزیع، یعنی مشاهدات دور از میانگین هم احتمال نسبتا زیادی دارند و این امر باعث تولید داده پرت می‌شود و این نقاط معمولا بر برآوردهای کمترین مربعات اثر گذار هستند. مهارت زیاد در تحلیل باقیمانده‌ها برای شناسایی نقاط پرت همراه با به‌کارگیری روش‌هایی برای تشخیص مشاهدات اثرگذار می‌تواند تحلیل‌گر را در اثر احتمالی داده‌های دور افتاده بر مدل رگرسیونی یاری دهد.

در کنار این روش‌ها، محققان و آماردانان به ایجاد روش‌های نیرومند[۱۶] (استوار) پرداخته‌اند که برای کاهش اثر مشاهدات پرت به کار می‌رود. هدف روش نیرومند این است که باقیمانده‌های مرتبط با نقاط پرت را کنار بگذارد تا بدین وسیله تشخیص آن‌ها ساده‌تر شود. یکی از روش‌های نیرومند، روش کمترین قدر مطلق انحرافات ($Least\ Absolute\ Deviations : LAD$) است. این روش نیرومند به خصوص در مواردی که توزیع‌های خطا دارای دم طولانی و ضخیم هستند، مثل لاپلاس و کوشی، به کار می‌رود [۷۰] .

تاریخچه‌ای مختصر از روش LAD

از لحاظ تاریخی، احتمالاً برآورد LAD قدیمی‌ترین روش نیرومند است. اولین منبع شناخته شده در استفاده از مینیمم کردن مجموع قدر مطلق انحرافات، به مطالعه گالیله (۱۶۳۲) برمی‌گردد [۱۳]. اما برای اولین بار به طور تخصصی، بوسکوویچ[۱۷] در سال ۱۷۵۷ مینیمم کردن مجموع قدر مطلق انحرافات را به عنوان یک معیار برای برازش یک خط در رگرسیون خطی ساده پیشنهاد داد. همچنین او نشان داد که این خط دقیقاً از نقطه میانگین دو متغیر x و y عبور می‌کند. (یعنی در مدل رگرسیون خطی ساده $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \epsilon_i$ مساله مینیمم سازی $\sum_{i=1}^{n} |y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i|$ با توجه به قید $\sum_{i=1}^{n}(y_i - \beta_0 - \beta_1 x_i) = 0$ حل شود.) او همچنین در سال ۱۷۶۰ یک روش هندسی برای حل مساله در حالت رگرسیون خطی ساده ارایه داد. در سال ۱۷۹۳ لاپلاس[۱۸] معیار بوسکوویچ را اقتباس کرده و روش هندسی او را با یک روش جبری جایگزین کرد [۱۲].

فوریه[۱۹] (۱۸۲۴) اولین کسی بود که مساله LAD را به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی فرمول بندی کرد امادر آن زمان الگوریتم‌های کارا برای حل چنین مسایلی وجود نداشت [۱۲].

با عنوان کردن روش کمترین مربعات (LS) در سال ۱۸۰۵، این روش به دلایل زیر بیشتر از روش LAD مورد توجه آماردانان قرار گرفت. دلیل اول سادگی نسبی محاسبات و دلیل دوم یکتایی جواب‌های کمترین

[۱۶] Robust
[۱۷] R.J. Boscovich
[۱۸] P.S. Laplace
[۱۹] J.B.J. Fourier

مربعات و داشتن شکل صریح آنها در اکثر مواقع بود.

روش LAD پس از چند سال وقفه در سال ۱۸۸۷ دوباره مورد توجه محققان قرار گرفت و این به علت مطالعات و نتایج کارهای اجورث [۲۰] بود. دستاوردهای او در این زمینه شامل موارد زیر بود: حذف قید عبور خط رگرسیونی از نقاط میانگین، بحث بر روی عدم یکتایی جواب LAD و اثبات این‌که جواب مساله LAD زمانی که خطاها از توزیع لاپلاس تبعیت کنند معادل با برآوردگرهای ماکزیمم درستنمایی است . او همچنین یک الگوریتم برای حل مساله رگرسیونی LAD ارایه کرد [۱۲]. رودز[۲۱] (۱۹۳۰) و بعد از او سینگلتون [۲۲] (۱۹۴۰) یک الگوریتم تکرار شونده را برای تولید جواب‌های LAD پیشنهاد دادند که بهبود یافته‌ای از الگوریتم اجورث بود، اما به دلیل این‌که با افزایش تعداد متغیرهای توضیحی ناکارامد می‌شد، مورد استفاده زیادی قرار نگرفت [۱۲]. در سال ۱۹۵۵ چارنز[۲۳] و کوپر[۲۴] و فرگوسن [۲۵]، از شیوه سیمپلکس در حل مسایل خطی استفاده کرده و برآوردهای LAD را از طریق صورت بندی مساله رگرسیون LAD به صورت یک مساله برنامه‌ریزی خطی، به دست آوردند. این کار باعث شد که علاقه‌ای دوباره در استفاده از این برآوردها ایجاد شود و الگوریتم‌هایی خاص برای حل این نوع مسائل برنامه‌ریزی خطی با ساختار ویژه پیشرفت یابد [۱۲]. در این راستا، با گسترش روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی خطی، روش تنظیم مسائل به صورت اولیه و دوگان مطرح شد. (برای دیدن مساله اولیه و دوگان، به مطالب آخر همین بخش مراجعه کنید.) الگوریتم مساله اولیه که توسط بارودل [۲۶] و یانگ [۲۷] (۱۹۶۶) ارایه شد، اولین الگوریتمی بود که در آن از ساختار خاص مساله دوگان استفاده شد. الگوریتم آن‌ها براساس روش سیمپلکس بود اما با برخی روش‌های محاسباتی خاص الگوریتم سریعتری تولید شد. بارودل و روبرتز [۲۸] (۱۹۷۳) یک الگوریتم کارا را براساس مساله اولیه ارایه کردند که بهبود یافته‌ای از الگوریتم قبلی بارودل و یانگ و سریع‌تر از آن بود. این الگوریتم در نرم‌افزار آماری $S-Plus$ نوشته شده و با اجرای دستور $l1fit$ می‌توان به آن دست یافت.

آرمسترانگ [۲۹] و فروم[۳۰] و کانگ [۳۱] (۱۹۷۹) یک روش سیمپلکس اصلاح شده با استفاده از تجزیه

[20] F.Y. Edgeworth
[21] E.C. Rhodes
[22] J. Singelton
[23] A. Charnes
[24] W.W Cooper
[25] R. Ferguson
[26] J. Barrodale
[27] A. Young
[28] F.D.K. Roberts
[29] R.D.S. Armstrong
[30] A. Ferom
[31] S. Kang